

Représentation espace-état des processus spatiaux non stationnaires

Reinhard Furrer, DMA, EPFL-Lausanne, Suisse

3

Représentation espace-état des processus spatiaux non stationnaires

Une décomposition basée sur l'échelle de la variation est

$$Z(x) = \mu(x) + U(x) + V(x) + \varepsilon(x) \quad x \in \mathcal{D}$$

où

- $\mu(\cdot) = E[Z(\cdot)]$ est la partie déterministe de la moyenne
- \sim variation à grande échelle
- $U(\cdot)$ est un processus I_2 d'espérance nulle, intrinsèquement stationnaire
- \sim variation lisse à petite échelle
- $V(\cdot)$ est un processus d'espérance nulle, intrinsèquement stationnaire
- \sim variation à micro-échelle
- $\varepsilon(\cdot)$ est un bruit blanc
- \sim erreur de mesure

5

Représentation espace-état des processus spatiaux non stationnaires

Solution de l'équation intégrale

Pour résoudre analytiquement l'équation intégrale nous considérons le noyau

$$\kappa(x, s) = \kappa_N(x, s) = \sum_{k=1}^K \beta^k \phi^k(x) \psi^k(s)$$

où $\phi^k(\cdot), \psi^k(\cdot)$ et N sont connus, et β_1, \dots, β_N sont les paramètres.

Le processus $W(x)$ peut être exprimé explicitement par une fonction du noyau $\kappa(x, \cdot)$, et du processus $Y(x)$.

2

Représentation espace-état des processus spatiaux non stationnaires

Le problème

Pour une analyse géostatistique on dispose souvent d'un échantillon $\{z(x_i) : x_i \in \mathcal{D}\}$ qui est un sous-ensemble d'une réalisation d'un processus spatial $\{Z(x) : x \in \mathcal{D}\}$.

Une analyse typique consiste dans les étapes suivantes :

- analyse exploratoire des données
- extraction des éléments stationnaires
- estimation des moments d'ordre deux
- ajustement des modèles paramétriques
- prédiction spatiale, krigage, ...

4

Représentation espace-état des processus spatiaux non stationnaires

On décompose le processus $Z(x)$ par

$$Z(x) = W(x) + \varepsilon(x)$$

$$W(x) = \int_{\mathcal{D}} \kappa(x, s) W(s) ds + Y(x) \quad x \in \mathcal{D}$$

où

- $\kappa(\cdot, \cdot)$ est une fonction suffisamment régulière de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}
- \sim noyau
- $Y(\cdot)$ est un processus stationnaire de deuxième ordre avec un covarogramme paramétrisé $c(h; \eta_1, \dots, \eta_M)$
- \sim source stochastique
- $\varepsilon(\cdot)$ est un bruit blanc orthogonal à $Y(\cdot)$
- \sim erreur de mesure

6

Représentation espace-état des processus spatiaux non stationnaires

Expression explicite de $W(x)$

Le processus $W(x)$ peut être exprimé explicitement par

$$W(x) = \sum_{N=1}^N \beta^N \int_{\mathcal{D}} \psi^N(s) Y(s) ds + Y(x)$$

où (β^N) est l'inverse de $(I - D)$, avec $(d_{ij}) = \int_{\mathcal{D}} \psi^i(s) \phi^j(s) ds$.

Avec h_i bien choisis, on a

$$\int_{\mathcal{D}} \psi^i(s) Y(s) ds \approx \sum_{u=1}^m h^i \psi^i(x_u) Y(x_u)$$

D'où

$$W(x) \approx \sum_{u=1}^m \sum_{i=1}^N \beta^i h^i \psi^i(x) Y(x_u)$$

Equations des moments d'ordre deux

Ayant un échantillon $\{z(x_j) : x_1, \dots, x_n \in \mathcal{D}\}$, on doit estimer :

- le noyau,
- les coefficients β_1, \dots, β_N ,
- les caractéristiques des moments d'ordre deux du processus $Y(x)$,
- i.e. les paramètres du covarlogramme η_1, \dots, η_L

On part de l'équation

$$E[Z(x_i)Z(x_j)] = E[W(x_i)W(x_j)] + E[\varepsilon(x_i)\varepsilon(x_j)]$$

$$\sum_{i,j=1}^{L+1} p(-\xi_{ij} + \xi_{ij}(\eta, \beta))$$

Les estimateurs $\hat{\eta}$ et $\hat{\beta}$ sont tels que soit minimal.

Estimation des paramètres

Solent

ξ_{ij} une estimation de $E[Z(x_i)Z(x_j)]$

$\xi_{ij}(\eta, \beta)$ une approximation de $E[W(x_i)W(x_j)] + E[\varepsilon(x_i)\varepsilon(x_j)]$

p une fonction de perte convexe

Alors notre problème se réduit à :

Aspects computationnels

- Choisir $\phi_h(\cdot) = \psi_h(\cdot)$ telles que $\int_{\mathcal{D}} \phi_h(x)\psi_l(x)dx = \delta_{hl}$
- Pour $|x_i - x_j|$ grand, $p(\cdot) \equiv 0$
- Notation matricielle du critère de minimisation

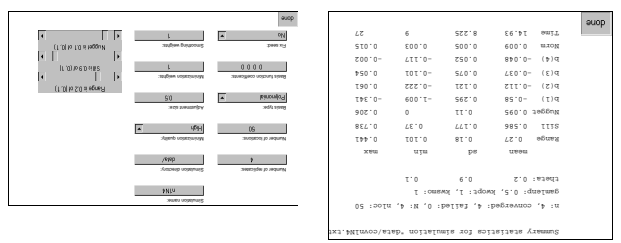
$$A(\theta) = -(\xi_{ij}) + M(\theta)^T C(u) M(\theta) + \sigma^2 I$$

où $M(\theta) = \psi^T G \Phi(\theta) + I$, avec $\Phi(\theta) = (\theta_1^T \dots \theta_N^T) \circ \phi$, $\psi = (I_N^T H^T) \circ \psi$,

$$\phi^{(h)} = \phi_h(x), \text{ et } \psi^{(h)} = \psi_h(x).$$

- Le résultat ne dépend pas des décisions subjectives sur la stationnarité
- Tout les types de tendances et de structures moyennes sont inclus
- La procédure est complètement automatisée

Avantages de cette méthode

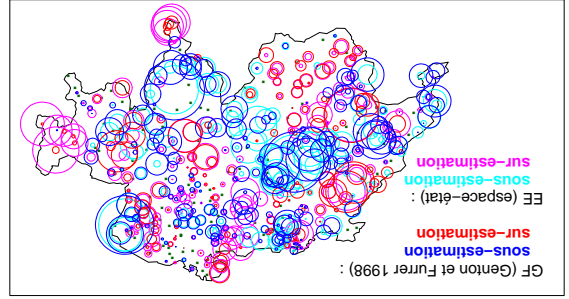


Captures d'écran du programme

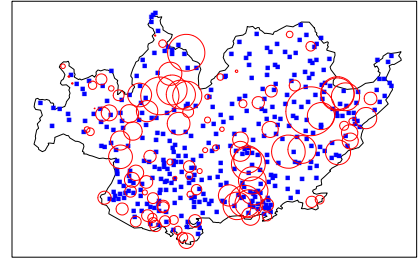
- Le concept non paramétrique abouti dans une minimisation multi-dimensionnelle
- Il n'y a pas un minimum unique
- Le choix subjectif des fonctions de base $\phi_h(\cdot)$ et $\psi_h(\cdot)$
- La difficulté à interpréter les coefficients β_1, \dots, β_N

Points faibles de cette méthode

	GF	
MAe		
CM _e	3 855	
SC _e /10 ⁶	1.415	
(η_1, η_2, σ^2)	(39.69, 0.11, 0.003)	(70.67, 0.85, 0.22)
EE		



100 emplacements pour prédire 367 autres.
 parts: Dubois (2000) a mis à disposition la précipitation de
 Comparaison des méthodes d'interpolation de 22 partici-
 SIC97 data (Spatial Interpolation Contest 1997).

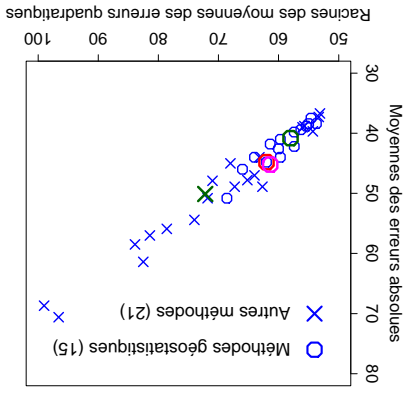


1^{ère} application : précipitation en Suisse

théorique	MC	EE
porté η_1	0.491 (0.629)	0.241 (0.130)
seuil η_2	1.798 (1.212)	1.241 (0.527)
eff. petite σ^2	0.069 (0.118)	0.045 (0.066)

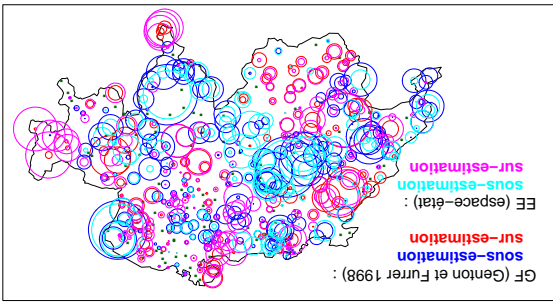
On a simulé $R = 100$ échantillons à partir du modèle
 $Z(x_i) = Y(x_i) + \varepsilon(x_i) + 1/5 + x_i^4 - x_i^2/3 - x_i^3/2$
 où $Y(\cdot)$ possède une covariance sphérique
 $\varepsilon(\cdot)$ est un bruit blanc avec variance σ^2
 Les emplacements $x_i, i = 1, \dots, 100$, sont equi-espacés
 dans $\mathcal{D} = [0, 1]^2$.

Simulation



Comparison avec SIC97

	GF	
MAe		
CM _e	3 855	
SC _e /10 ⁶	1.415	
(η_1, η_2, σ^2)	(39.69, 0.11, 0.003)	(70.67, 0.85, 0.22)
EE		



La prédiction en x_0 est établie via l'estimateur linéaire

$$\hat{W}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i W(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^J w_j(\beta_k; \phi_k, \psi_l) Y(x_j)$$

 où les poids λ_i sont déterminés par les mêmes
 contraintes que pour le krigage.

Prédiction spatiales

