

Symmetrische Räume

Mitschrift der Vorlesung von
Prof. Dr. V. Schroeder

Tobias Berner
Universität Zürich
Herbstsemester 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Der komplex projektive Raum	3
1.1	Krümmungsberechnung	7
2	Lie Gruppen	10
2.1	Metriken auf Lie-Gruppen	16
3	Symmetrische Räume	20
3.1	Jacobi-Felder in symmetrischen Räumen	22
3.2	Beschreibung von symmetrischen Räumen	24
4	Struktur von symmetrischen Räumen	28
4.1	Metrische Struktur	29
4.2	Berechnung der Krümmung (O'Neill)	30
4.3	Beschreibung von Sphäre und hyperbolischem Raum	39
4.4	Dualität von Symmetrischen Räumen	40
4.5	Komplexifizierung eines \mathbb{R} -Vektorraumes (\mathbb{R} -Lie-Algebra)	41
4.6	Genaueres Studium von $P(n, \mathbb{R})$	43
5	Der Rand im Unendlichen eines symmetrischen Raumes von nichtkompaktem Typ	46
6	Gebäude	52
6.1	Coxeter Gruppen	52
6.2	Coxeter Komplex	53
6.3	Metrische simpliziale Komplexe	53
6.4	Abstrakte simpliziale Komplexe	54
6.5	Gebäude	54
A	Aufgaben	59
	Index	67

1 Der komplex projektive Raum

Definition 1.1 komplex projektiver Raum

$$\mathbb{C}P^n = \{V \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid V \text{ eindimensionaler linearer komplexer Unterraum}\}.$$

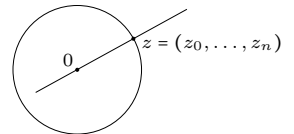


Figure 1.1

Projektion $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, mit

$$z = (z_0, \dots, z_n) \mapsto \text{span}_{\mathbb{C}}(z_0, \dots, z_n) = \{\lambda(z_0, \dots, z_n) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

π ist surjektiv.

$$\pi(z_0, \dots, z_n) = \pi(w_0, \dots, w_n) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \lambda(z_0, \dots, z_n) = (w_0, \dots, w_n).$$

$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim, \text{ wobei } z = (z_0, \dots, z_n) \sim w = (w_0, \dots, w_n) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \lambda z = w.$$

Äquivalenzklassen: $[z_0, \dots, z_n]$.

Topologie ist die Quotiententopologie.

Diffbare Struktur: $\alpha \in \{0, \dots, n\}$

$$U_\alpha := \{[z_0, \dots, z_n] \mid z_\alpha \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^n.$$

$U_\alpha \subset \mathbb{C}P^n$ offen.

$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ ($(z_1, \dots, z_n) \simeq (\text{Re}(z_1), \text{Im}(z_1), \dots)$), mit

$$\varphi_\alpha([z_0, \dots, z_n]) := \left(\frac{z_0}{z_\alpha}, \dots, \frac{\hat{z}_\alpha}{z_\alpha}, \dots, \frac{z_n}{z_\alpha} \right) \in \mathbb{C}^n,$$

wobei der Eintrag mit $\hat{}$ wegfällt. φ_α ist wohldefiniert.

Man überlegt sich: $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist ein Homöomorphismus, die Kartenwechsel sind analytisch (sogar rational) insbesondere diffbar.

$$\mathbb{C}P^n = \bigcup_{\alpha \in \{0, \dots, n\}} U_\alpha.$$

$$S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}, S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \mid \sum_{i=0}^n |z_i|^2 = 1\}.$$

Definition 1.2 Die Hopf-Faserung ist die Abbildung $h : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, mit

$$h(z_0, \dots, z_n) = [z_0, \dots, z_n].$$

Es gilt

$$h(z_0, \dots, z_n) = h(w_0, \dots, w_n) \iff \exists \lambda \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \text{ mit } \lambda(z_0, \dots, z_n) = (w_0, \dots, w_n).$$

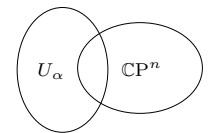


Figure 1.2

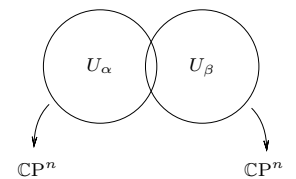


Figure 1.3

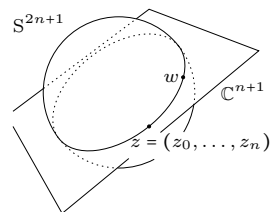


Figure 1.4

Exkurs

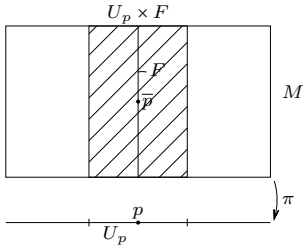


Figure 1.5

Definition 1.3 Seien M, B (Basis), F (Faser) diffebare Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $\pi : M \rightarrow B$ heisst *Faserung* mit Faser F genau dann, wenn für alle $p \in B$ gibt es U_p , so dass

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_p) & \xleftarrow{\cong} & U_p \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow \text{pr}_1 & \\ U_p & & \end{array}$$

Beispiel 1.4

1. $M = \text{Möbiusband}, F = (-1, 1), B = S^1$.
2. Hopf-Faserung $h : M = S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n = B$, Faser ist S^1 .

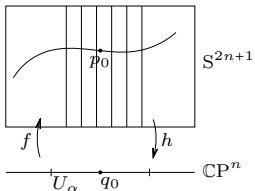
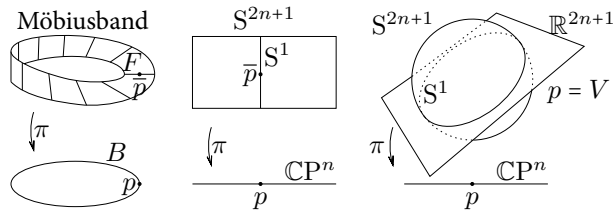


Figure 1.6

Lemma 1.5 $h : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ ist eine Submersion, das heisst

$\forall p \in S^{2n+1}$ ist $Dh : T_p S^{2n+1} \rightarrow T_{h(p)} \mathbb{C}P^n$ surjektiv.

BEWEIS Sei $p_0 \in S^{2n+1}, p_0 = (z_0^0, \dots, z_n^0), q_0 = h(p_0)$.

Sei $\alpha \in \{0, \dots, n\}$, so dass $z_\alpha^0 \neq 0$.

Wir geben eine diffebare Abbildung $f : U_\alpha \rightarrow S^{2n+1}, f = f_{\alpha, p_0}$, so dass $h \circ f = \text{id}_{U_\alpha}$ und $f(q_0) = p_0$ an.

($\implies Dh_{p_0} \circ Df_{q_0} = \text{id}_{T_{h(p)} \mathbb{C}P^n} \implies Dh_{p_0}$ surjektiv.)

$\rho : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^{2n+1}, z \mapsto \frac{z}{\|z\|} \in S^{2n+1}$.

$f([z_0, \dots, z_n]) := \rho(z_\alpha^0 (\frac{z_0}{z_\alpha^0}, \dots, \frac{z_\alpha}{z_\alpha^0}, \dots, \frac{z_n}{z_\alpha^0}))$.

f ist wohldefiniert, $f(q_0) = p_0$, und ist diffebar. Weiter ist $h \circ f = \text{id}$. ■

Definition 1.7 M sei Riemannsche Mannigfaltigkeit, B Mannigfaltigkeit, $\pi : M \rightarrow B$ Submersion, $p \in M$.
 $\mathcal{V}_p := \text{kern}(Dh_p) \subset T_p M$ *Vertikalraum*.
 $\mathcal{H}_p := \mathcal{V}_p^\perp$ (orthogonales Komplement) *Horizontalraum*.

(\mathcal{H}_p "existiert", da M Riemannsch ist).

Definition 1.8 M, B Riemannsche Mannigfaltigkeiten. $\pi : M \rightarrow B$ heisst *Riemannsche Submersion*, wenn π eine Submersion und $D\pi_p|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{\pi(p)} B$ eine lineare Isometrie ist.

Das heisst $\bar{v}, \bar{w} \in \mathcal{H}_p \implies \langle D\pi_p(\bar{v}), D\pi_p(\bar{w}) \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$.

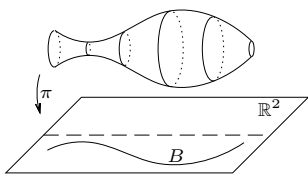


Figure 1.8

Beispiel 1.9 Rotationsflächen.

Satz 1.10 Es gibt genau eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{C}P^n$, so dass die Abbildung $h : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ eine Riemannsche Submersion ist ("Fubini-Study"-Metrik).

BEWEIS

1. Eindeutigkeit:
 $q \in \mathbb{C}P^n$, sei $p \in S^{2n+1}$ mit $h(p) = q$, $v \in T_q \mathbb{C}P^n$.
 Dann existiert ein $\bar{v} \in \mathcal{H}_p$ mit $Dh_p \bar{v} = v$.
 $v, w \in T_q \mathbb{C}P^n \implies \langle v, w \rangle = \langle Dh_p(\bar{v}), Dh_p(\bar{w}) \rangle$.
 Also $\langle v, w \rangle$ durch $\langle Dh_p(\bar{v}), Dh_p(\bar{w}) \rangle$ bestimmt.

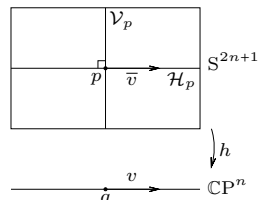


Figure 1.9

2. Existenz:
 $v, w \in T_q \mathbb{C}P^n$,
- $$\langle v, w \rangle := \langle \bar{v}_p, \bar{w}_p \rangle.$$

Zu zeigen: ist wohldefiniert.

Das heisst, zu zeigen: $p, p' \in F_q \implies \langle \bar{v}_p, \bar{w}_p \rangle = \langle \bar{v}_{p'}, \bar{w}_{p'} \rangle$.

Da p, p' in derselben Faser, das heisst $\exists \lambda \in S^1$ mit $\lambda p = p'$.

$$\varphi_\lambda : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}, \quad z \mapsto \lambda z.$$

φ_λ ist Isometrie von S^{2n+1} , genau $\lambda = \cos \alpha + \sin \alpha i$, wobei $\alpha \in [0, 2\pi]$.

$$\varphi_\lambda = \begin{pmatrix} D_\alpha & & & \\ & D_\alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Es gilt $h \circ \varphi_\lambda = h$

$$\implies D\varphi_\lambda(\mathcal{V}_p) = \mathcal{V}_{p'}.$$

$$\implies (\varphi_\lambda \text{ Isometrie}) D\varphi_\lambda(\mathcal{H}_p) = \mathcal{H}_{p'},$$

$$\text{und genauer } D\varphi_\lambda(\bar{v}_p) = \bar{v}_{p'},$$

$$\text{denn } Dh(\bar{v}_{p'}) = v \implies Dh(\bar{v}_p) = Dh(D\varphi_\lambda(\bar{v}_p)) = v \implies \bar{v}_{p'} = D\varphi_\lambda(\bar{v}_p).$$

Man zeigt, dass die Metrik diffbar ist.

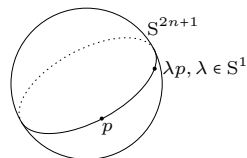


Figure 1.10

Bemerkung 1.12 S^{2n+1} , $[p] = [q]$, $p = (z_0, \dots, z_n)$, $q = ip = (iz_0, \dots, iz_n)$.

$$c(t) = e^{it} p = \cos t \cdot p + \sin t \cdot iq.$$

S^1 operiert durch Isometrien auf S^{2n+1} ,

$$S^1 \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}, \quad (\lambda, (z_0, \dots, z_n)) \mapsto (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n).$$

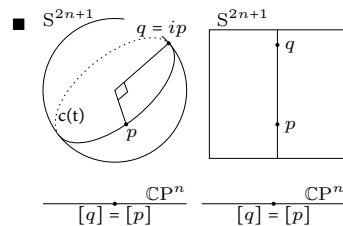


Figure 1.11

Lemma 1.13 Seien $\pi : M \rightarrow B$ eine Riemannsche Submersion, und $X \in \mathfrak{X}(B)$ ein Vektorfeld. Dann existiert genau ein "horizontaler Lift" $\bar{X} \in \mathfrak{X}(M)$, das heisst $\bar{X}(p) \in \mathcal{H}_p$ und $D\pi_p(\bar{X}(p)) = X(\pi(p))$.

Satz 1.14 Seien $\pi : M \rightarrow B$ eine Riemannsche Submersion und $\bar{c} : I \rightarrow M$ eine Geodätische, $t_0 \in I$ und $\dot{\bar{c}}(t_0) \in \mathcal{H}_{\bar{c}(t_0)}$.
 Dann gilt $\dot{c}(t) \in \mathcal{H}_{\bar{c}(t)}$ und $c = \pi \circ \bar{c}$ ist eine Geodätische in B .
 Auf diese Weise kann man jede Geodätische in B finden.

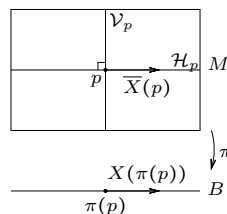


Figure 1.12

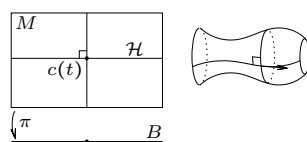


Figure 1.13

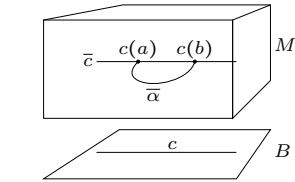


Figure 1.15

Lemma 1.15 $\pi : M \rightarrow B$ Riemannsche Submersion. Jede reguläre Krurve $c : I \rightarrow B$ lässt sich “horizontal liften”. Das heisst $t_0 \in I, p = c(t_0), \bar{p} = \pi(\bar{p})$. Dann gibt es $\bar{c} : I \rightarrow M, \bar{c}(t_0) = \bar{p}, \dot{\bar{c}}(t) \in \mathcal{H}_{\bar{c}(t)}, \pi \circ \bar{c} = c$.

[Beweis Übung]

Lemma 1.16 $\pi : M \rightarrow B$ Riemannsche Submersion. Dann ist der horizontale Lift einer Geodätischen in B eine Geodätische in M .

BEWEIS $c : I \rightarrow B$ Geodätische, $\bar{c} : I \rightarrow M$ horizontaler Lift. Wir zeigen, dass \bar{c} lokal minimal ist.

Sei $[a, b] \subset I$, so dass $c_{|[a,b]}$ minimale Geodätische. Wir zeigen, dass $\bar{c}_{|[a,b]}$ minimal.

Annahme: $\exists \bar{\alpha} : [0, 1] \rightarrow M$, von $\bar{c}(a)$ nach $\bar{c}(b)$ mit $L(\bar{\alpha}) < L(\bar{c}_{|[a,b]})$.

$\alpha = \pi \circ \bar{\alpha}$ Kurve von $c(a)$ nach $c(b)$.

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_0^1 \|\pi \circ \dot{\bar{\alpha}}(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|D\pi(\dot{\bar{\alpha}}(t))\| dt \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \int_0^1 \|\dot{\bar{\alpha}}(t)\| dt \\ &= L(\bar{\alpha}) \\ &< L(\bar{c}_{|[a,b]}) \\ &= \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt \\ &= L(c_{|[a,b]}) \quad \text{Widerspruch.} \end{aligned}$$

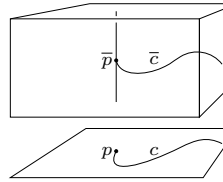


Figure 1.14

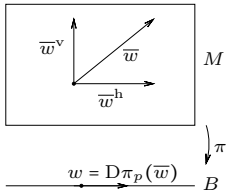


Figure 1.16

Zu (*): Sei $\bar{w} \in T_p M, \bar{w} = \bar{w}^v + \bar{w}^h$, mit $\bar{w}^v \in \mathcal{V}_p$ und $\bar{w}^h \in \mathcal{H}_p$.

$$\|\bar{w}\| \geq \|\bar{w}^h\| = \|D\pi_p(\bar{w})\|.$$

BEWEIS (BEWEIS VON SATZ 1.14)

$\bar{p} = \bar{c}(t_0), \dot{\bar{c}}(t_0) \in \mathcal{H}_{\bar{p}}, v = D\pi_{\bar{p}}(\dot{\bar{c}}(t_0)) \in T_p B$.

$c_v : I \rightarrow B$ Geodätische in B mit $\dot{c}_v(0) = v, \bar{c}_v : I \rightarrow M$ horizontaler Lift, Geodätische nach Lemma 1.16.

$$\dot{\bar{c}}_v(t_0) = \dot{\bar{c}}(t_0) \implies \bar{c}_v = \bar{c} \text{ (Eindeutigkeit der Geodätischen).}$$

$\implies \bar{c}$ ist horizontal, $\pi \circ \bar{c} = \pi \circ \bar{c}_v = c_v$ Geodätische. ■

Satz 1.19 Die Geodätischen des $\mathbb{C}P^n$ sind alle einfach geschlossen mit der Periode π . Genau bis zur Länge $\pi/2$ sind sie Kürzeste.

BEWEIS $[p] \in \mathbb{C}P^n, F_p$ ist Grosskreis mit $s \mapsto \cos s \cdot p + \sin s \cdot ip$.

$c(t)$ ist von der Form $c(t) = h \circ \bar{c}(t)$, wobei $\bar{c}(t) = \cos t \cdot p + \sin t \cdot q$, wobei $q \perp p, q \perp ip$ (dann ist $\dot{c}(0) = q \in \mathcal{H}_p$).

Es gilt $\bar{c}(t + \pi) = -\bar{c}(t)$, also $h(\bar{c}(t + \pi)) = h(\bar{c}(t))$, also hat $h \circ \bar{c}$ die Periode π .

Wir zeigen noch, dass es keine Schnittpunkte gibt:

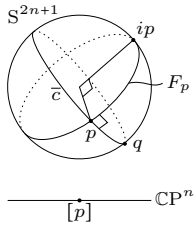
$\bar{c}(t) = \cos tp + \sin tq, q \perp p, q \perp ip$. Seien $0 \leq t < t_2 < \pi$, und $h(\bar{c}(t_1)) = h(\bar{c}(t_2))$.

Dann $\exists \lambda \in S^1, \lambda \bar{c}(t_1) = \bar{c}(t_2), \lambda = x + iy$.

$$(x + iy)(\cos t_1 p + \sin t_1 q) = \cos t_2 p + \sin t_2 q.$$

Das heisst

$$x \cos t_1 p + y \cos t_1 ip + x \sin t_1 q + y \sin t_1 iq = \cos t_2 p + \sin t_2 q.$$



Jetzt sind p, ip, q, iq alle senkrecht zueinander.

$$\implies y \cos t_1 = 0 \text{ und } y \cos t_2 = 0.$$

$$\implies y = 0 \text{ (da } \cos t_2 \geq 0 \text{)}.$$

$$\implies x = \pm 1.$$

Da $x \cos t_1 = \cos t_2$ und $\cos t_1 \geq 0, \cos t_2 > 0 \implies x = 1.$

$$\implies \cos t_1 = \cos t_2, \sin t_1 = \sin t_2 \implies t_1 = t_2.$$

Analog (Übung) $c_{|[0, \pi/2]}$ ist Kürzeste. ■

1.1. Krümmungsberechnung

Definition 1.21 Sei $f : M \rightarrow N$ diffbar, $X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(N)$. X und Y heißen f -*verwandt* : $\iff \forall p \in M$

$$Df_p(X_p) = Y_{f(p)}.$$

(Das heisst $Df(X) = Y$).

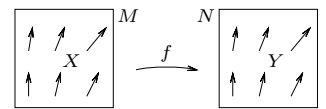


Figure 1.18

Beispiel 1.22 $M \xrightarrow{\pi} B$ Riemannsche Submersion, $X \in \mathfrak{X}(B), \bar{X} \in \mathfrak{X}(M)$ horizontaler Lift $\implies \bar{X}$ und X sind π -verwandt.

Lemma 1.23 X_1, X_2 seien f -verwandt zu Y_1, Y_2

$$\implies [X_1, X_2] \text{ ist } f\text{-verwandt zu } [Y_1, Y_2].$$

Lemma 1.24 $\pi : M \rightarrow B$ Riemannsche Submersion, $X, Y \in \mathfrak{X}(B), V \in \mathfrak{X}(M), V^h = 0$, das heisst V vertikal. \bar{X}, \bar{Y} horizontaler Lift. Dann gilt

1. $[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]} + [\bar{X}, \bar{Y}]^v$. Das heisst $[\bar{X}, \bar{Y}]^h = \overline{[X, Y]}$.
2. $[X, V]^h = 0$.

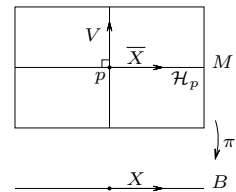


Figure 1.19

BEWEIS

1. $[\bar{X}, \bar{Y}]$ ist π -verwandt zu $[X, Y]$ (Lemma 1.23).
 $\implies [\bar{X}, \bar{Y}]^h = \overline{[X, Y]}$.
2. V ist π -verwandt zu 0 .
 \implies [Lemma 1.23] $[V, \bar{X}]$ ist π -verwandt zu 0 .
 $\implies [V, \bar{X}]^h = 0$. ■

Satz 1.26 (Submersionsformel, O'Neill 1966)

$\pi : M \rightarrow B$ Riemannsche Submersion, $X, Y \in \mathfrak{X}(B), \bar{X}, \bar{Y}$ horizontaler Lift.

1. $\nabla_{\bar{X}}^M \bar{Y} = \overline{\nabla_X^B Y} + \frac{1}{2} [\bar{X}, \bar{Y}]^v$.
2. $\langle R^B(X, Y)Y, X \rangle = \langle R^M(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Y}, \bar{X} \rangle + \frac{3}{4} \|[\bar{X}, \bar{Y}]^v\|^2$.

BEWEIS

1. $\nabla^M = \bar{\nabla}, \nabla^B = \nabla$.
 Koszul-Formel: $2\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, A \rangle = \bar{X}\langle A, \bar{Y} \rangle + \bar{Y}\langle A, \bar{X} \rangle - A\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle + \langle [\bar{X}, \bar{Y}], A \rangle - \langle [\bar{X}, A], \bar{Y} \rangle - \langle [\bar{Y}, A], \bar{X} \rangle$. Wir zeigen 1. in dem wir zeigen:

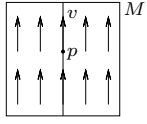


Figure 1.20

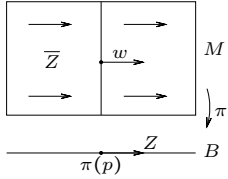


Figure 1.21

(a) $\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, v \rangle = \langle \frac{1}{2} [\bar{X}, \bar{Y}], v \rangle, \forall v \in \mathcal{V}_p$

(b) $\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, w \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \bar{Y}, w \rangle, \forall w \in \mathcal{H}_p.$

(a) Setze $v \in \mathcal{V}_p$ lokal zu einem vertikalen Vektorfeld V fort, so dass $V(p) = v$.

$\implies \langle \bar{X}, V \rangle = 0 = \langle \bar{Y}, V \rangle$

$\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle$ konstant längs Fasern $\implies V \langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle = 0.$

Nach Lemma 1.24 gilt $[\bar{X}, V]^h = 0 \implies \langle [\bar{X}, V], \bar{Y} \rangle = 0$ und genauso

$\langle [\bar{Y}, V], \bar{X} \rangle = 0.$

$\implies 2 \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, V \rangle = \langle [\bar{X}, \bar{Y}], V \rangle.$

(b) $w \in \mathcal{H}_p$, dann können wir w zu einem horizontalen Vektorfeld Z fortsetzen, dass dieses horizontale Vektorfeld \bar{Z} Lift eines $Z \in \mathfrak{X}(B)$ ist.

$2 \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \bar{X} \langle \bar{Z}, \bar{Y} \rangle \cdots + \langle [\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z} \rangle \cdots = X \langle Z, Y \rangle \cdots = 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle_{\pi(p)}.$

$(\langle [\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z} \rangle = \langle [\bar{X}, \bar{Y}]^h, \bar{Z} \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle.)$ ■

2. $\langle R^M(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Y}, \bar{X} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Y}, \bar{X} \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{X} \rangle - \langle \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{Y}, \bar{X} \rangle.$

$\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Y}, \bar{X} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_X \bar{Y}, \bar{X} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} [\bar{Y}, \bar{Y}]^v, \bar{X} \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \bar{Y}, \bar{X} \rangle + \frac{1}{2} \langle [\bar{X}, \bar{\nabla}_Y \bar{Y}]^v, \bar{X} \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y \bar{Y}, \bar{X} \rangle_{\pi(p)}.$

$\langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{X} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_X \bar{Y}, \bar{X} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \bar{X} \rangle,$

und $\langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_X \bar{Y}, \bar{X} \rangle = \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \bar{Y}, \bar{X} \rangle + \frac{1}{2} \langle \dots \rangle = \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \bar{Y}, \bar{X} \rangle,$ sowie

$\frac{1}{2} \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \bar{X} \rangle = \bar{Y} \langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \bar{X} \rangle - \langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} \rangle = \frac{1}{2} \| [\bar{X}, \bar{Y}]^v \|^2.$

Das heisst $\langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{X} \rangle = \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \bar{Y}, \bar{X} \rangle + \frac{1}{4} \| [\bar{X}, \bar{Y}]^v \|^2.$

Weiter ist $\langle \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{Y}, \bar{X} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{Y}, \bar{X} \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]^v} \bar{Y}, \bar{X} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{Y}, \bar{X} \rangle - \frac{1}{2} \| [X, Y]^v \|^2,$ da

$\langle \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]^v} \bar{Y}, \bar{X} \rangle = \frac{1}{2} \langle \dots \rangle = -\frac{1}{2} \langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, [\bar{X}, \bar{Y}] \rangle = -\frac{1}{2} \| [X, Y]^v \|^2$

Somit folgt die Formel.

Korollar 1.28 $\pi : M \rightarrow B$ Riemannsche Submersion, $K^M \geq \delta, \implies K^B \geq \delta.$

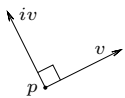


Figure 1.22

Definition 1.29 Ein Tensor J vom Typ $(1, 1)$ mit $J \circ J = -\text{id}$ heisst **fast komplexe Struktur**.

Beispiel 1.30 $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}, T_p \mathbb{C}^n = \{(p, v) \mid v \in \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}\}.$

$J((p, v)) := (p, iv).$

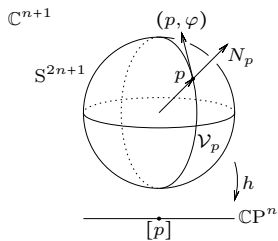


Figure 1.23

Definition 1.31 $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ heisst **holomorph**, wenn f (reell) diffbar und

$Df_p(Jv) = J_{f(p)}(Df_p(v)).$

Definition 1.32 M heisst **komplexe Mannigfaltigkeit**, wenn die Kartenwechsel holomorph sind.

Beispiel 1.33 $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1}$.
 $N_p = (p, p)$, $T_p S^{2n+1} = \{(p, q) \mid q \perp p\}$.
 $\mathcal{V}_p S^{2n+1} = \text{span}(J_p N_p) = \text{span}((p, ip))$.
 $\mathcal{H}_p S^{2n+1} = \mathcal{V}_p^\perp = \{(p, w) \mid w \perp p, w \perp ip\}$.
 \mathcal{H}_p ist invariant unter J_p .

$DH_p : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{[p]} \mathbb{C}P^n$ Isomorphismus.
 $v \in T_{[p]} \mathbb{C}P^n$, $J_{[p]} v := Dh_p(J_p \bar{v})$.
 Somit hat $\mathbb{C}P^n$ fast komplexe Struktur.
 $\langle J(v), J(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.

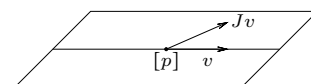
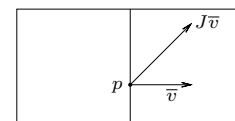


Figure 1.24

Satz 1.34 $v, w \in T_{[p]} \mathbb{C}P^n$ so gilt:

$$\langle R(v, w)w, v \rangle = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 + 3\langle v, Jw \rangle^2.$$

Insbesondere, wenn v, w Orthonormalbasis von σ

$$K(\sigma) = 1 + 3\langle v, Jw \rangle^2.$$

Insbesondere

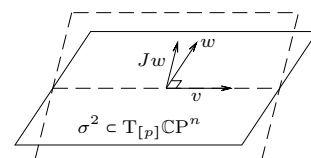
$$1 \leq K(\sigma) \leq 4.$$


Figure 1.25

BEWEIS O'Neill $\langle R^{\mathbb{C}P^n}(v, w)w, v \rangle = \langle R^{S^{2n+1}}(\bar{v}, \bar{w})\bar{w}, \bar{v} \rangle + \frac{3}{4} \|[\bar{X}, \bar{Y}]^v\|^2$.
 $R^{S^{2n+1}}(x, y)z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x$.
 $\langle R(\bar{v}, \bar{w})\bar{w}, \bar{v} \rangle = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$.

$$\bar{\nabla} = \nabla^{S^{2n+1}}, \tilde{\nabla} = \nabla^{\mathbb{R}^{2n+2}}.$$

$$[\bar{X}, \bar{Y}]^v = \langle [\bar{X}, \bar{Y}], JN \rangle JN = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, JN \rangle JN.$$

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, JN \rangle = \bar{X} \langle \bar{Y}, JN \rangle - \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} JN \rangle = -\langle \bar{Y}, \tilde{\nabla}_{\bar{X}} JN \rangle.$$

Behauptung: $\tilde{\nabla}_{\bar{X}} JN = J\bar{X}$.

Beweis: $c(t)$ Kurve in S^{2n+1} mit $\dot{c}(0) = \bar{X}(p)$.

$$\tilde{\nabla}_{\bar{X}} JN(p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (JN \circ c(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (c(t), ic(t)) = (p, ic(0)) = J\dot{c}(0) = J\bar{X}(p).$$

Daher $\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, JN \rangle = -\langle \bar{Y}, J\bar{X} \rangle$.

$$[\bar{X}, \bar{Y}]^v = (-\langle \bar{Y}, J\bar{X} \rangle + \langle \bar{X}, J\bar{Y} \rangle) JN = 2\langle \bar{X}, J\bar{Y} \rangle JN$$

$$\implies \|[\bar{X}, \bar{Y}]^v\|^2 = 4\langle \bar{X}, J\bar{Y} \rangle^2.$$

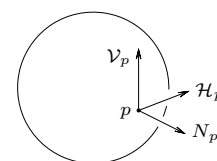


Figure 1.26

■

2 Lie Gruppen

Definition 2.1 G heisst *Lie Gruppe*, wenn G Gruppe, diffebare Mannigfaltigkeit und die Operationen $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$ und $G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ diffebar sind.

Beispiel 2.2

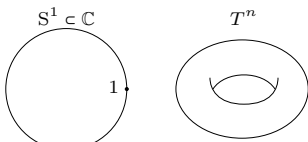


Figure 2.27

1. $(\mathbb{R}^n, +), (\mathbb{C}^n, +), ((0, \infty), \cdot)$.
2. $S^1 \subset \mathbb{C}$ bezüglich Multiplikation.
3. $T^n = (\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n, +)$ n -dimensionaler Torus. T^n ist isomorph zu $S^1 \times \dots \times S^1$.
Isomorphismus: $[t_1, \dots, t_n] \mapsto (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})$.
4. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \text{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \text{Matrizen}(n \times n, \mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\}$.
 $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ offene Teilmenge von \mathbb{K}^{n^2} , somit Mannigfaltigkeit. (Zum Beispiel $\text{GL}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).
 $(A, B) \mapsto AB = (\sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} b_{\nu j})_{i,j}$.
 $A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A} (a'_{ij})$, wobei $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\dots)$.
5. G Lie Gruppe, $H \subset G$, abgeschlossene Untergruppe \implies (nicht trivial) H ist Lie Gruppe. Somit
 - (a) $\text{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$.
 - (b) $O(n) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1} \text{ orthogonale Matrizen.}\}$
 - (c) $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$.
 - (d) $U(n) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \bar{A}^T = A^{-1}\}$ unitäre Gruppe.
 - (e) $SU(n)$.
 - (f) $O(p, q) = \{A \in \text{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid ABA^T = B\}$.
Wobei $B_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{für } i \in \{0, p-1\} \\ -\delta_{ij} & \text{für } i \in \{p, \dots, p+q-1\} \end{cases}$
 $A \in O(p, q) \iff B(Ax, Ay) = B(x, y)$, wobei $B(x, y) = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i$.

G Lie Gruppe, $g \in G, L_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh, R_g : G \rightarrow G, h \mapsto hg$ (Links-, bzw Rechtsmultiplikationen).

$e \in G$ ist das Neutrale Element.

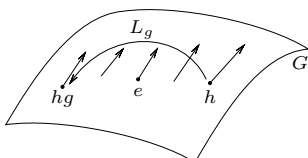


Figure 2.28

Definition 2.3 G Lie Gruppe, $X \in \mathfrak{X}(G)$ heisst *linksinvariant*, wenn $\forall g, h \in G$ gilt $X_{gh} = DL_g(X_h)$.

Bemerkung 2.4 Die linksinvarianten Vektorfelder bilden einen Vektorraum.

Lemma 2.5 Die linksinvarianten Vektorfelder auf G sind isomorph zum Tangentialraum $T_e G$. Der Isomorphismus ist gegeben durch $X \mapsto X_e$.

BEWEIS X, Y linksinvariant $\implies X + Y, \lambda X$ sind linksinvariant.

$X \mapsto X_e$ ist injektiv: $X_e = 0 \implies X_g = DL_g(X_e) = 0$.

surjektiv: $v \in T_e G$. Definiere $X \in \mathfrak{X}(G)$, $X_g := DL_g(v)$ (zu zeigen: X ist diffbar).

Zu zeigen X ist linksinvariant.

$$DL_g(X_h) = DL_g(DL_h(v)) = D(L_g \circ L_h)(v) = DL_{gh}(v) = X_{gh}.$$

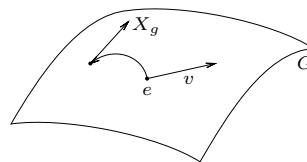


Figure 2.29

Satz 2.7 Die linksinvarianten Vektorfelder sind abgeschlossen gegenüber der Lie-Klammern.

Das heisst X, Y linksinvariant $\implies [X, Y]$ ist linksinvariant.

Korollar 2.8 X ist linksinvariant $\iff \forall f \in C^\infty(G, \mathbb{R}), \forall g \in G$ gilt $X(f \circ L_g) = (Xf) \circ L_g$.

BEWEIS (a) $X(f \circ L_g)(h) = X_h(f \circ L_g) = X_h(f \circ L_g) = DL_g(X_h)(f)$

(b) $Xf \circ L_g(h) = X(f)(gh) = X_{gh}(f)$

(a)=(b) $\iff DL_g(X_h) = X_{gh} \iff$ linksinvariant. ■

BEWEIS (BEWEIS VON SATZ 2.7)

X, Y linksinvariant.

$$\begin{aligned} [X, Y](f \circ L_g) &= X(Y(f \circ L_g)) - Y(X(f \circ L_g)) \\ &= X(Yf \circ L_g) \dots \\ &= (XYf) \circ L_g - (XYf) \circ L_g \\ &= ([X, Y]f) \circ L_g. \end{aligned}$$

$\implies [X, Y]$ linksinvariant. ■

Bezeichnung: G Lie Gruppe, dann werden die linksinvarianten Vektorfelder mit \mathfrak{g} bezeichnet.

Definition 2.11 Eine *Lie-Algebra* ist ein reeller (bzw komplexer) Vektorraum \mathfrak{g} zusätzlich mit einer Lie-Klammer

$$[\ , \] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g},$$

mit

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

und

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Definition 2.12 $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ heisst *Lie-Algebra Homomorphismus*, falls φ linear und $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$.

Definition 2.13 \mathfrak{g} heisst *abelsch* $\iff [X, Y] = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

Beispiel 2.14 $GL(n, \mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ entsprechende Lie-Algebra. $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ offene Teilmenge. $E = (\delta_{ij})_{ij}$ neutrales Element.

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \cong T_E GL(n, \mathbb{K})$.

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \cong M(n \times n, \mathbb{K})$.

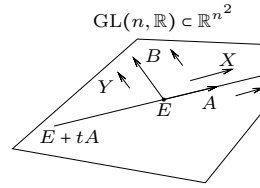


Figure 2.30

$X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ seien linksinvariante Vektorfelder, $X_E = A, Y_E = B \implies [X, Y]_E = AB - BA$.

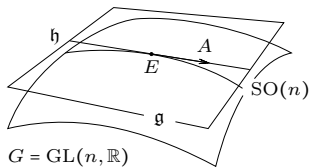
$\pi_{ij} : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (A) \mapsto A_{ij}$.

Zu zeigen $\pi_{ij}([X, Y]_E) = \pi_{ij}(AB - BA)$.

$$\begin{aligned} X_E Y f &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y f(E + tA) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_{E+tA} f \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (DL_{E+tA}(B)(f)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (B(f \circ L_{E+tA})) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (f \circ L_{E+tA}(E + sB)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \pi_{ij} \\ \implies \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \pi_{ij}(E + tA + sB + tsAB) \right) &= \pi_{ij}(AB) \\ \implies [X, Y]_E(\pi_{ij}) &= \pi_{ij}(AB - BA). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Andererseits } [X, Y]_E(\pi_{ij}) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \pi_{ij}(E + t[X, Y]_E) = \pi_{ij}([X, Y]_E). \\ \implies [X, Y]_E &= AB - BA. \end{aligned}$$



$G = GL(n, \mathbb{R})$
Figure 2.31

$$SO(n) \subset GL(n, \mathbb{K})$$

$$H \subset G$$

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$$

$\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(n)$ Lie-Algebra von $SO(n)$.

$A \in \mathfrak{so}(n) \cong T_E SO(n) \iff {}^T A = -A$ (das heisst A schiefssymmetrisch).

Sei $h(t)$ Kurve in $SO(n)$ diffbar, $h(0) = E$

$\implies h'(0)$ ist schiefssymmetrisch.

Da $h(t) \in SO(n)$ gilt $\forall v, w$:

$$\langle h(t)v, h(t)w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Leite ab:

$$0 = \frac{d}{dt} \langle h(t)v, h(t)w \rangle = \langle h'(t)v, h(t)w \rangle + \langle h(t)v, h'(t)w \rangle$$

Also

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \dots = \langle h'(0)v, w \rangle + \langle v, h'(0)w \rangle.$$

Also $h'(0)$ schiefssymmetrisch.

Umgekehrt: A schiefssymmetrisch (das heisst ${}^T A = -A$).

Dann existiert $h : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(n)$, $h(0) = E$, $h'(0) = A$.

$$h(t) := e^{tA} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(tA)^\nu}{\nu!} = E + tA + \frac{1}{2}t^2 A^2 + \dots$$

$$\implies h(t) {}^T h(t) = e^{tA} (e^{tA}) {}^T = e^{tA} e^{t {}^T A} = e^{tA} e^{-tA} = e^{tA-tA} = e^0 = E$$

$$\implies h(t) \in \text{O}(n), h(0) = E \in \text{SO}(n), h'(t) = A e^{tA}, h'(0) = A.$$

Einschub

$X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = M(n \times n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$X = (X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $X_{ij} \in \mathbb{K}$.

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i, j=1}^n (\overline{X_{ij}} Y_{ij}) = \text{spur}(X^* Y),$$

wobei $X^* = \overline{{}^T X}$.

$\|X\| = \langle X, X \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i, j=1}^n |X_{ij}|^2 \right)^{1/2}$. Es gilt $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$, $\|XY\| \leq \|X\| \|Y\|$.

$e^X = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} X^\nu = E + X + \frac{1}{2} X^2 + \dots$ ist konvergent.

Eigenschaften:

1. $e^0 = E$.
2. $(e^X)^* = e^{X^*}$.
3. e^X ist invertierbar und $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.
4. $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X} e^{\beta X}$.
5. $XY = YX \implies e^{X+Y} = e^X e^Y$.
6. C invertierbar $\implies C e^X C^{-1} = e^{CXC^{-1}}$.
7. $\|e^X\| \leq e^{\|X\|}$.
8. $\det(e^X) = e^{\text{spur}(X)}$.

Sei V ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum. Wir bezeichnen mit $\text{End}(V)$ die Menge der Endomorphismen und mit $\text{Aut}(V)$ die Menge der Automorphismen.

Wenn eine Basis von V gegeben ist, kann man $\text{End}(V)$ mit $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ identifizieren, und $\text{Aut}(V)$ mit $\text{GL}(n, \mathbb{K})$.

$$\exp : \text{End}(V) \rightarrow \text{Aut}(V),$$

$$\varphi \mapsto e^\varphi = \text{id} + \varphi + \frac{1}{2}(\varphi \circ \varphi) + \dots$$

Bemerkung 2.15 $\text{Aut}(V)$ ist eine Lie Gruppe (isomorph zu $\text{GL}(n, \mathbb{K})$), und $T_{\text{id}} \text{Aut}(V) \simeq \text{End}(V)$.

Wir wollen nun für jede Lie Gruppe G die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ definieren.

Definition 2.16 Eine *Ein-Parameter Gruppe* in G ist ein diffbarer Homomorphismus $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G$, das heisst

1. α diffbar,
2. $\alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s)$.

Insbesondere also $\alpha(0) = e$ und $\alpha(-t) = \alpha(t)^{-1}$.

Beispiel 2.17 Wenn $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, dann ist $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $t \mapsto e^{tX}$ eine Ein-Parameter Gruppe. (Da $e^{(t+s)X} = e^{tX}e^{sX}$).

Satz 2.18 Die Ein-Parameter Gruppen in G sind genau die maximalen Integralkurven von linksinvarianten Vektorfeldern, mit $\alpha(0) = e$.

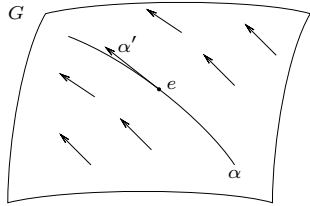


Figure 2.32

BEWEIS

“ \Rightarrow ” $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G$ sei Ein-Parameter Gruppe, $\alpha(0) = e$.

Sei X das linksinvariante Vektorfeld mit $X_e = \dot{\alpha}(0)$.

$$\implies \dot{\alpha}(t) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \alpha(t+s) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (\alpha(t) + \alpha(s)) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (L_{\alpha(t)}\alpha(s)) =$$

$$DL_{\alpha(t)}\dot{\alpha}(0) = X_{\alpha(t)}.$$

Das heisst, α Integralkurve.

“ \Leftarrow ” Sei X linksinvariantes Vektorfeld, und $\alpha : (a, b) \rightarrow G$ maximale Integralkurve, mit $\alpha(0) = e$, und $\dot{\alpha}(0) = X_e$, $a < 0 < b$.

Sei $s, t \in (a, b)$ und sei t so, dass $a < s+t < b$. Betrachte $\gamma(t) = \alpha(s+t)$ und $\beta(t) = \alpha(s)\alpha(t)$.

Zu zeigen: $\gamma = \beta$.

Wir zeigen, dass γ und β Integralkurven von X sind.

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\alpha}(s+t) = X_{\gamma(t)}.$$

$$\dot{\beta}(t) = DL_{\alpha(s)}\dot{\alpha}(t) = DL_{\alpha(s)}(X_{\alpha(t)}) = X_{\alpha(s)\alpha(t)} = X_{\beta(t)}.$$

$$\dot{\beta}(t) = DL_{\alpha(s)}\dot{\alpha}(t) = DL_{\alpha(s)}(X_{\alpha(t)}) = X_{\alpha(s)\alpha(t)} = X_{\beta(t)}.$$

Kleine Überlegung: $a = -\infty, b = \infty$. ■

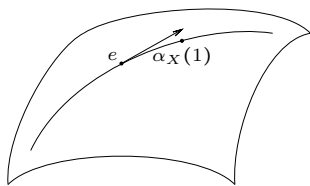


Figure 2.33

Definition 2.20 $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$

$$\exp(X) := \alpha_X(1),$$

wobei α_X die Integralkurve von X mit $\alpha_X(0) = e$.

$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, (D \exp)_0 : T_0 \mathfrak{g} \rightarrow T_e G \simeq \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned} (D \exp)_0 &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(tX) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \alpha_{tX}(1) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \alpha_X(t) \\ &= \dot{\alpha}_X(0) \\ &= X. \end{aligned}$$

Das heisst, $(D \exp)_0 = \text{id}$.

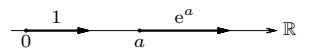


Figure 2.34

Satz 2.21 G, H Lie Gruppen mit mit Lie Algebren $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, und $\varphi : G \rightarrow H$ diffbarer Homomorphismus. Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{D\varphi_e} & \mathfrak{h} \end{array}$$

BEWEIS $X \in \mathfrak{g}$, $\implies \alpha_X : t \mapsto \exp(tX)$ ist Ein-Parameter Gruppe in $G \implies \varphi \circ \alpha_X$ ist Ein-Parameter Gruppe in H mit $(\varphi \circ \alpha_X)'(0) = D\varphi_e(\alpha_X'(0)) = D\varphi_e(X)$.
 $\implies \varphi \circ \alpha_X(t) = \alpha_{D\varphi_e(X)} : t \mapsto \exp(tD\varphi_e(X))$. ■

Adjungierte Darstellung

Konjugation:

$g \in G$,

$$\begin{aligned} C_g : G &\rightarrow G, \\ h &\mapsto C_g(h) = ghg^{-1}. \end{aligned}$$

$$C_g = L_g \circ R_{g^{-1}}, C_g(e) = e.$$

$$\text{Ad}_g := (DC_g)_e : T_e G \rightarrow T_e G.$$

$$\text{Da } C_g \circ C_h = C_{gh} \implies \text{Ad}_{gh} = \text{Ad}_g \circ \text{Ad}_h.$$

$$\text{Insebesondere } (\text{Ad}_g)^{-1} = \text{Ad}_{g^{-1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}), \\ g &\mapsto \text{Ad}_g. \end{aligned}$$

adjungierte Darstellung (diffbare Abbildung).

$$\text{ad} := (D\text{Ad})_e : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}).$$

$$\text{ad}(X) =: \text{ad}_X.$$

Satz 2.23

$$\text{ad}_X(Y) = [X, Y].$$

BEWEIS (für Matrizen Gruppen)

$$\begin{aligned}
 \text{ad}_X(Y) &= \left(\frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp tX) \right) (Y) \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \text{DC}_{\exp(tX)} \right) (Y) \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} e^{tX} e^{sY} e^{-tX} \\
 &= \frac{d}{dt} e^{tX} Y e^{-tX} \\
 &= XY - YX \\
 &= [X, Y]. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Korollar 2.25 (mit Satz 2.21)

Es kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\
 \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}} & \text{End}(\mathfrak{g})
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ad}_{\exp(X)}(Y) &= \exp(\text{ad}_X)(Y) \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \text{ad}_X^\nu(Y) \\
 &= Y + [X, Y] + \frac{1}{2} [X, [X, Y]] + \dots
 \end{aligned}$$

Korollar 2.26 $X, Y \in \mathfrak{g}$, dann

$$\begin{aligned}
 \exp(X) \exp(Y) \exp(-X) &= \exp(e^{\text{ad}_X}(Y)) \\
 &= \exp(Y + [X, Y] + \dots).
 \end{aligned}$$

BEWEIS $\exp(X) \exp(Y) \exp(-X) = \alpha(1)$, wobei $\alpha(t) = C_g \circ \beta(t)$, wobei $g = \exp(X)$, und $\beta(t) = \exp(tY)$.

$\beta(t)$ ist Ein-Parametergruppe, $\implies \alpha(t)$ ist Ein-Parametergruppe, somit $\alpha(t) = \exp(tZ)$, wobei $Z = \dot{\alpha}(0)$.

$$Z = \dot{\alpha}(0) = (\text{DC}_g)_e \dot{\beta}(0) = \text{Ad}_{\exp(X)}(Y). \quad \blacksquare$$

Bemerkung 2.28 Es gibt eine allgemeine Produktformel Baker-Campbell-Hausdorff-Formel. $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\exp(X) \exp(Y) = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2} [X, Y] + \frac{1}{12} [X, [X, Y]] - \frac{1}{12} [Y, [X, Y]] + \dots\right)$$

Alle Terme sind verschachtelte Lie Klammern.

2.1. Metriken auf Lie-Gruppen

Definition 2.29 Eine Riemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf G heisst **links-, (rechts-, bi-) invariant**, wenn $\forall g \in G: L_g$ (beziehungsweise R_g, L_g und R_g) isometrisch sind. Das heisst $v, w \in T_h G \implies \langle DL_g v, DL_g w \rangle_{gh} = \langle v, w \rangle_h$.

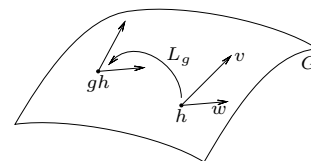


Figure 2.35

Lemma 2.30 Die Linksinvarianten Metriken stehen in natürlicher Weise in 1:1 Beziehung zu den Skalarprodukten auf $T_e G (\simeq \mathfrak{g})$. Die bi-invarianten entsprechen dabei den Skalarprodukten die Ad_g invariant sind $\forall g$.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist } \text{Ad}_g \text{ invariant} \iff \langle \text{Ad}_g v, \text{Ad}_g w \rangle_e = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathfrak{g}.$$

BEWEIS $\{\text{linksinvariante } \langle \cdot, \cdot \rangle\} \rightarrow \{\text{SKP auf } T_e G\}$ wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_e$.

1. injektiv

denn: $v, w \in T_g G$ (da linksinvariant)

$$\langle v, w \rangle_g = \langle DL_{g^{-1}} v, DL_{g^{-1}} w \rangle_e. \tag{*}$$

Das heisst $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ ist durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ bestimmt.

2. surjektiv

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ gegeben. Definiere $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ durch (*).

[Übung $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ ist linksinvariante Riemannsche Metrik].

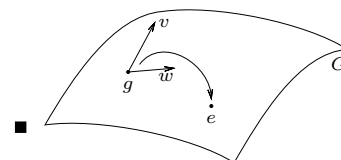


Figure 2.36

Bemerkung 2.32 $X, Y \in \mathfrak{g}$ linksinvariante Vektorfelder, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linksinvariante Metrik $\implies \langle X, Y \rangle$ ist konstant.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei linksinvariante Metrik, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist bi-invariant

$$\iff \forall g \in G, R_g \text{ ist isometrisch}$$

$$\iff \forall h \in G, \forall g \in G, \forall v, w \in T_h G \text{ gilt (**):}$$

$$\langle D(R_g)v, D(R_g)w \rangle_{hg} = \langle v, w \rangle_h.$$

$$\begin{aligned} \langle D(R_g)v, D(R_g)w \rangle_{hg} &= \langle D(L_{(hg)^{-1}} DR_g v, \dots)_e \\ &= \langle DL_{g^{-1}} DR_g DL_{h^{-1}} v, \dots \rangle \\ &= \langle DC_g DL_{h^{-1}} v, DC_g DL_{h^{-1}} w \rangle \\ &= \langle \text{Ad}_g DL_{h^{-1}} v, \text{Ad}_g DL_{h^{-1}} w \rangle. \end{aligned}$$

In (**) linke=rechte Seite genau dann Ad_g isometrisch.

Übung: $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Lie Gruppe mit linksinvarianter Metrik $\implies G$ vollständig.

Satz 2.33 Ist G eine kompakte Lie Gruppe, $\implies \exists$ bi-invariante Metrik.

BEWEIS Sei $n = \dim G, v_1, \dots, v_n$ Basis von $T_e G$. G ist orientiert durch die Setzung, dass $DR_g v_1, \dots, DR_g v_n$ positiv orientierte Basis von $T_g G$ ist.

Wir definieren ein $\omega \in \Omega^n(G)$ durch die Setzung, dass $\omega_g(DR_g v_1, \dots, DR_g v_n) = 1$. ω ist diffbar, und nach Konstruktion rechtsinvariant.

Das heisst (*): $R_g^* w = w \quad \forall g \in G$.

Weiter $\int_G w > 0$.

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ ein beliebiges Skalarprodukt in $T_e G$.

$$\langle \langle v, w \rangle \rangle_e := \int_G \langle \text{Ad}_g v, \text{Ad}_g w \rangle_e \omega_g$$

ist ein Skalarprodukt.

$\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_e$ ist Ad_h invariant, für alle $h \in G$, denn

$$\begin{aligned} \langle \langle \text{Ad}_h v, \text{Ad}_h w \rangle \rangle_e &= \int_G \langle \text{Ad}_g \text{Ad}_h v, \text{Ad}_g \text{Ad}_h w \rangle_e \omega_g \\ &= \int_G \langle \text{Ad}_{gh} v, \text{Ad}_{gh} w \rangle_e \omega_g \\ &= \int_G f(gh) \omega_g \\ &= \int_G f \circ R_h(g) \omega_g \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_G f \circ R_h(g) R_h^* \omega_g \\ &= \int_G f \omega_g \\ &= \langle \langle v, w \rangle \rangle_e \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Satz 2.35 G Lie Gruppe mit bi-invarianter Metrik. $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, dann gilt:

1. $\langle X, Y \rangle$ konstant.
2. $\langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle = 0$,
das heisst ad_X ist schiefsymmetrisch: $\langle \text{ad}_X(Y), Z \rangle = -\langle Y, \text{ad}_X(Z) \rangle$.
3. $\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y]$,
 ∇ ist der Levi-Civita Zusammenhang.

BEWEIS

1. klar nach Definition.
2. Da alle Einträge linksinvariant müssen wir alles nur in e zeigen. Sei $\alpha(t)$ die Einparametergruppe zu X , das heisst $\alpha(t) = \exp(tX)$.
 \implies (da Metrik bi-invariant) $\langle \text{Ad}_{\alpha(t)} Y_e, \text{Ad}_{\alpha(t)} Z_e \rangle = \langle Y_e, Z_e \rangle$ konstant in t
 $\implies 0 = \frac{d}{dt} \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \text{ad}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \text{ad}_X Z \rangle$.
3. Koszul-Formel.

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \underbrace{\langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle}_{=0} + \langle Z, [X, Y] \rangle.$$

$$\implies \nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y]. \quad \blacksquare$$

Korollar 2.37 Die Geodätischen durch e sind genau die Integralkurven von linksinvarianten Vektorfeldern.

Die Lie-Gruppen \exp Abbildung stimmt mit der Riemannschen Exponentialabbildung überein. $\exp_e : T_e G \rightarrow G$

BEWEIS $X \in \mathfrak{g}$, $c(t)$ sei Integralkurve von X .

$$\frac{D}{dt} \dot{c}(t) = \nabla_{\dot{c}(t)} X = \frac{1}{2} [X, X]_{c(t)} = 0.$$

Korollar 2.39 G mit bi-invarianter Metrik, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ linksinvariant. Dann gilt

1. $R(X, Y)Z = -\frac{1}{4} [[X, Y], Z]$,
2. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\frac{1}{4} \langle [X, Y], [Z, W] \rangle$,
3. $\langle R(X, Y)Y, X \rangle = \frac{1}{4} \|[X, Y]\|^2 \geq 0$.

Folgerung: Krümmung ist ≥ 0 .

BEWEIS

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= \frac{1}{4} [X, [Y, Z]] - \frac{1}{4} [Y, [X, Z]] - \frac{1}{2} [[X, Y], Z] \\ &= \frac{1}{4} [[X, Y], Z] - \frac{1}{2} [[X, Y], Z] \\ &= -\frac{1}{4} [[X, Y], Z] \end{aligned}$$

und da ad_Z schief-symmetrisch

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \frac{1}{4} \langle [Z, [X, Y]], W \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \langle [X, Y], [Z, W] \rangle \quad \blacksquare \end{aligned}$$

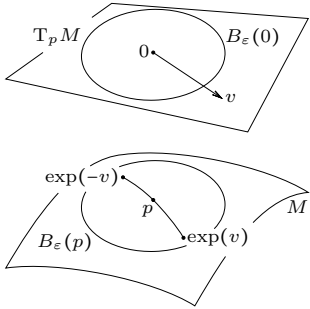


Figure 3.37

3 Symmetrische Räume

M Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$, $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\exp_p : B_\varepsilon(0) \rightarrow B_\varepsilon(p)$$

Diffeomorphismus. (\exp_p ist Riemannsche Exponentialabbildung).

Definition 3.1 $\sigma_p^\varepsilon : B_\varepsilon(p) \rightarrow B_\varepsilon(p)$

$$\sigma_p^\varepsilon(q) = \exp_p(-(\exp_{p|_{B_\varepsilon(0)}})^{-1}(q))$$

heißt die *geodätische Spiegelung* in p .

(Das heißt $\sigma_p^\varepsilon(\exp_p(v)) = \exp_p(-v)$.)

Bemerkung 3.2 σ_p^ε ist Diffeomorphismus, $\sigma_p^\varepsilon(p) = p$, und $(D\sigma_p^\varepsilon)_p = -\text{id}|_{T_p M}$.

Definition 3.3 M heißt *lokal symmetrisch*, wenn es für alle $p \in M$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\sigma_p^\varepsilon : B_\varepsilon(p) \rightarrow B_\varepsilon(p)$ Isometrie ist.

Definition 3.4 M heißt *symmetrisch*, wenn M zusammenhängend und wenn es für alle $p \in M$ eine Isometrie $\sigma_p : M \rightarrow M$, so dass $\sigma_p(p) = p$ und $(D\sigma_p)_p = -\text{id}|_{T_p M}$. (Das heißt σ_p^ε setzt sich zu einer Isometrie σ_p auf ganz M fort.)

Beispiel 3.5

1. \mathbb{R}^n , $\sigma_p(x) = 2p - x$.
2. S^n , $N = (0, \dots, 0, 1)$,

$$\sigma_N(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_n, x_{n+1}).$$

3. Alle Räume M_κ^n sind symmetrisch (insbesondere der hyperbolische Raum).
 $M_\kappa^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_\kappa = 1\}$, mit $\langle x, y \rangle_\kappa = \kappa \sum_{i=1}^n x_i y_i + x_{n+1} y_{n+1}$.
 Abstand d_κ erklärt durch $\text{cs}_\kappa(d_\kappa(x, y)) = \langle x, y \rangle_\kappa$.

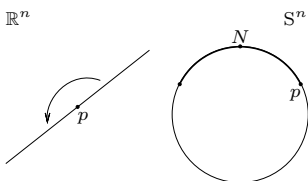


Figure 3.38

Für $o = (0, \dots, 0, 1)$,

$$\sigma_o(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_n, x_{n+1}).$$

Nach Drehung kann ich annehmen, dass $p = (\operatorname{sn}_\kappa(t), 0, \dots, 0, \operatorname{cs}_\kappa(t)) = \begin{pmatrix} \operatorname{sn}_\kappa(t) \\ \operatorname{cs}_\kappa(t) \end{pmatrix}$.

Es existiert Isometrie $\rho : M_\kappa^n \rightarrow M_\kappa^n$ mit $\rho(0) = p$ und

$$\rho = \begin{pmatrix} \operatorname{cs}_\kappa(t) & \operatorname{sn}_\kappa(t) \\ -\kappa \operatorname{sn}_\kappa(t) & \operatorname{cs}_\kappa(t) \end{pmatrix}.$$

ρ lässt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\kappa$ invariant und somit Isometrie.

Setze

$$\sigma_p = \rho \sigma_o \rho^{-1}.$$

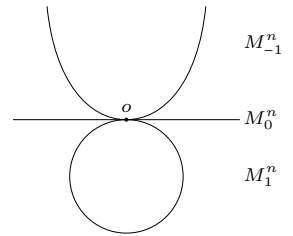


Figure 3.39

4. $\mathbb{C}P^n$ ist symmetrisch.

5. G mit bi-invarianter Metrik ist symmetrisch. $\sigma_e(g) = g^{-1}$.
 σ_e ist Isometrie, da $d(g_1, g_2) = d(e, g_1^{-1}g_2) = d(g_2^{-1}, g_1^{-1})$ (da $L_{g_1^{-1}}$, sowie $R_{g_2^{-1}}$ isometrisch).

Zu zeigen $(D\sigma_e)_e = -\operatorname{id}|_{\mathfrak{g}}$.

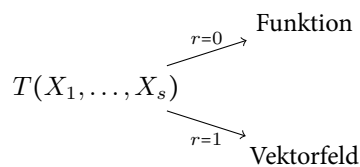
$X \in \mathfrak{g}$, $\sigma_e(\exp(tX)) = \exp(tX)^{-1} = \exp(-tX)$. $\implies (D\sigma_e)_e(X) = -X$.

$k \in G$, $\sigma_k(g) = kg^{-1}k = (L_k \circ \sigma_e \circ L_{k^{-1}})(g)$. $(D\sigma_k)_k = DL_k \circ D\sigma_e \circ DL_{k^{-1}} = -D(L_k \circ L_{k^{-1}}) = -\operatorname{id}|_{T_k G}$.

Wir werden zeigen:

M lokal symmetrisch \iff Krümmung parallel.

T sei Tensor (r, s)



∇T Tensor vom Typ $(r, s+1)$.

$\nabla T(X_0, \dots, X_s) = \nabla_{X_0} T(X_1, \dots, X_s) - \sum_{i=1}^s T(\dots, \nabla_{X_0} X_i, \dots)$.

$\nabla T(\dot{c}, X_1, \dots, X_s) \stackrel{*}{=} \frac{D}{dt} T(X_1, \dots, X_s) - \sum T(\dots, \frac{D}{dt} X_i, \dots)$.

(*) zeigt: ist $\nabla T = 0$ dann gilt:

sind X_1, \dots, X_s parallel $\implies T(X_1, \dots, X_s)$ parallel.

Beispiel 3.6 g Riemannsche Metrik, $g(X, Y)$, g ist $(0, 2)$ Tensor $\nabla_g = 0$, denn:

$\nabla g(X, Y, Z) = X_g(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$.

Definition 3.7 Man sagt: T parallel $\iff \nabla T \equiv 0$.

Das heisst, wir wollen zeigen: M lokal symmetrisch $\iff \nabla R \equiv 0$.

Lemma 3.8 M lokal symmetrisch $\implies \nabla R = 0$.

BEWEIS $p \in M, v_1, \dots, v_4 \in T_p M$. Zu zeigen $R(v_1, \dots, v_4) = 0$.

$$\nabla R(v_1, \dots, v_4) = \nabla R(-v_1, \dots, -v_4) = \nabla R((D\sigma_p^\varepsilon)_p v_1, \dots, (D\sigma_p^\varepsilon)_p v_4) \stackrel{*}{=} -\nabla R(v_1, \dots, v_4).$$

Zu (*): $\varphi : M \rightarrow M$ Isometrie. X, Y Vektorfelder, dann gilt $D\varphi(\nabla_X Y) = \nabla_{(\varphi X)}(D\varphi Y)$,

wobei $(D\varphi(X))_p = D\varphi_{\varphi^{-1}(p)} X_{\varphi^{-1}(p)}$.

“Übung”: Isometrie erhält die Metrik, somit auch den Levi-Civita Zusammenhang. R ist auch solchen Termen gemacht. ■

3.1. Jacobi-Felder in symmetrischen Räumen

Definition 3.10 $c : (a, b) \rightarrow M$ Geodätische, $p = c(0), v = \dot{c}(0), \|v\| = 1$. $Y \in \mathfrak{X}_c$ ist **Jacobi-Feld** $\iff Y'' + R(Y, \dot{c})\dot{c} = 0$.

$R_v : T_p M \rightarrow T_p M, R_v(x) = R(x, v)v$. R_v ist linear und symmetrisch. $\langle R_v(x), y \rangle = \langle R(x, v)v, y \rangle = \langle R_v(y), x \rangle$.

Lineare Algebra: \exists Orthonormal Basis e_1, \dots, e_n von $T_p M$ so dass $R_v(e_i) = \lambda_i e_i, \lambda_i$ Eigenwerte. $R_v(v) = 0, e_n = v$.

Seien E_1, \dots, E_{n-1}, E_n parallele Vektorfelder längs c mit $E_i(0) = e_i$, also $E_n(t) = \dot{c}(t)$.

Lemma 3.11 $\nabla R = 0, c(t) = \exp_p(tv)$ Geodätische, e_i, E_i wie oben.

- $Y(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)E_i(t)$ ein Jacobi-Feld $\iff f_i$ erfüllen die Differentialgleichung

$$f_i'' + \lambda_i f_i = 0.$$

Das heisst die f_i sind Linearkombinationen von $\cos \lambda_i t$ und $\sin \lambda_i t$.

- Die längs c konjugierten Punkte von $p = c(0)$ sind die Punkte $c(\frac{k\pi}{\sqrt{\lambda_i}}), k \in \mathbb{Z}, \lambda_i > 0$.
- Ist Y ein Jacobi Feld längs c mit $Y(0) = 0 \implies \|Y(t)\| = \|Y(-t)\|$.

BEWEIS

- $Y(t) = \sum f_i(t)E_i(t) \implies Y''(t) = \sum f_i''(t)E_i(t)$.
 $R(E_i(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = \lambda_i E_i(t) \implies R(Y(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t) = \sum \lambda_i f_i(t)E_i(t)$.
 Das heisst Jacobi Gleichung ist

$$\sum_{i=1}^n (f_i''(t) + \lambda_i f_i(t))E_i(t) = 0.$$

- klar.
- $Y(0) = 0 \implies Y(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i \sin \lambda_i(t) E_i(t)$.
 $\implies \|Y(t)\| = \|Y(-t)\|$. ■

Satz 3.13 Es sind äquivalent:

- M lokal symmetrisch,
- $\nabla R \equiv 0$,
- Ist $Y \in \mathfrak{X}_c$ Jacobi Feld längs $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $Y(0) = 0 \implies \|Y(t)\| = \|Y(-t)\|$.

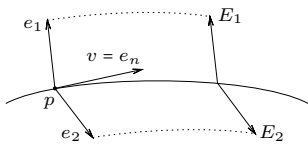


Figure 3.40

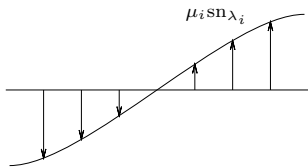


Figure 3.41

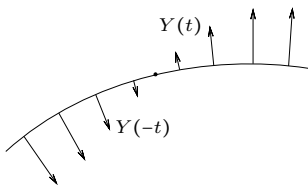


Figure 3.42

BEWEIS 2) folgt mit Lemma 3.8 aus 1) und 3) folgt mit Lemma 3.11 aus 2).
Zu zeigen ist also noch 3) \Rightarrow 1).

Sei $p \in M, \varepsilon > 0$ so klein, dass $\exp_p : B_\varepsilon(0) \rightarrow B_\varepsilon(p)$ Diffeomorphismus.
Zu zeigen $\sigma := \sigma_p^\varepsilon : \exp_p(tv) \mapsto \exp_p(-tv)$ ist Isometrisch.

$q = \exp_p(v), w \in T_qM$.

Zu zeigen: $\|(D\sigma)_q w\| = \|w\|$.

$\exists \bar{w} \in T_v T_p M$ mit $(D \exp_p)_v \bar{w} = w$.

$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [-1, 1] \rightarrow M, \alpha(s, t) = \exp_p(t(v + s\bar{w}))$. $Y(t) = \frac{\partial}{\partial s|_{s=0}} \exp_p(t(v + s\bar{w}))$

Jacobifeld längs $c(t) = \exp_p(tv)$.

$Y(0) = 0, Y(1) = (D \exp_p)_v(\bar{w}) = w$. $\sigma(\alpha(s, t)) = \alpha(s, -t) \implies (D\sigma)_q(w) =$

$(D\sigma)_q(Y(1)) = \frac{d}{ds|_{s=0}} \sigma \circ \alpha(s, 1) = \frac{d}{ds|_{s=0}} \sigma \circ \alpha(s, -1) = Y(-1)$.

$\implies \|D\sigma w\| = \|Y(-1)\| = \|Y(1)\| = \|w\|$.

M sei symmetrisch und zusammenhängend.

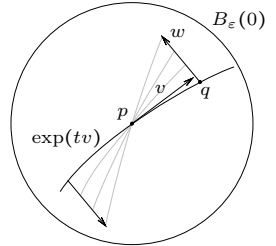
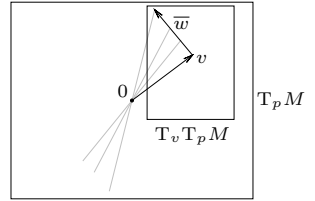


Figure 3.43

Definition 3.15 M ist *homogen*, wenn es $\forall x, y \in M$ Isometrie γ gibt mit $\gamma x = y$.



Figure 3.44

Satz 3.16 Sei M symmetrisch und zusammenhängend $\implies M$ ist homogen und vollständig.

Sei M zusammenhängend und symmetrisch. $\text{Iso}(M)$ Isometriegruppe.

Bemerkung 3.17 $\text{Iso}(M)$ ist eine Lie-Gruppe

[ohne Beweis]

Beispiel 3.18

1. $M = \mathbb{R}^n$,

$$\text{Iso}(\mathbb{R}^n) = \{(A, a) \mid A \in O(n), a \in \mathbb{R}^n\},$$

mit $(A, a)p = Ap + a$.

2. $M = S^n, \text{Iso}(S^n) = O(n + 1)$.

Wir müssen bestimmte Isometrien untersuchen.

Definition 3.19 Transvektionen: $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ sei Geodätische. Dann definieren wir

$$\tau_c : \mathbb{R} \rightarrow \text{Iso}(M),$$

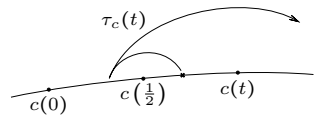
$$\tau_c(t) := \sigma_{c(t)} \circ \sigma_{c(t/2)}.$$


Figure 3.45

Lemma 3.20

1. $\tau_c(t)(c(s)) = c(s + t)$.

2. $(D\tau_c(t))_{c(s)} = P_{c(s), c(s+t)}$ Parallelverschiebung längs c .

3. τ_c ist Ein-Parametergruppe in $\text{Iso}(M), \tau_c(0) = e, \tau_c(s + t) = \tau_c(s) \circ \tau_c(t)$.

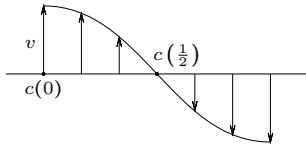


Figure 3.48

BEWEIS

1. Reflektion auf \mathbb{R} . Reflektion in Punkte p ist die Abbildung $t \mapsto 2p - t$.
Somit ist $\sigma_{c(t)} \circ \sigma_{c(t/2)} = \sigma_{c(t)} c(t - s) = c(2t - (t - s)) = c(t + s)$.
2. $s = 0$. $v \in T_{c(0)}M$, sei $E_i(t)$ parallele Basis wie im Beweis von Lemma 3.11. $Y(t) = \sum f_i(t) E_i$ Jacobi Feld längs c mit $Y(0) = v, Y(t/2) = 0$.
Aufgrund der Symmetrie gilt $Y(t) = -Y(0)$.
 \implies Aufgrund der Symmetrie gilt $Y(t) = -\sum f_i(0) E_i(t)$.
 $\implies (D\sigma_{c(t/2)})_0 v = -\sum f_i(0) E_i(t)$.
 $\implies (D\tau_c(t))_0 v = \sum f_i(0) E_i(t) = P_{c(0), c(t)}(v)$.
3. Übung. ■

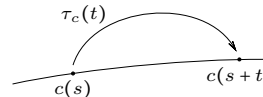


Figure 3.46

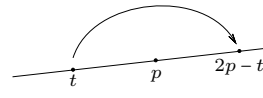


Figure 3.47

3.2. Beschreibung von symmetrischen Räumen

M zusammenhängend, symmetrisch, $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. $G = \text{Iso}_0(M)$ Zusammenhangskomponente von e in $\text{Iso}(M)$. G operiert transitiv auf M (man kann x durch eine geeignete Transvektion in y überführen).

1. Gruppenoperation

$$G \times M \rightarrow M$$

$$(g, p) \mapsto g(p).$$

2. Geodätische Symmetrie

$$\sigma : M \times M \rightarrow M$$

$$(p, q) \mapsto \sigma_p(q).$$

- (a) σ_p Isometrie, $\sigma_p(p) = p$.
- (b) $\sigma_p \circ \sigma_p = \text{id}, \sigma_p = \sigma_p^{-1}$.
- (c) $(D\sigma_p)_p = -\text{id}_{T_p M}$.
- (d) $\sigma_{g(p)} = g\sigma_p g^{-1}$.

3. Es gibt eine diffbare Abbildung

$$\Theta : M \times G \rightarrow G$$

$$(p, g) \mapsto \Theta_p(g) = \sigma_p g \sigma_p^{-1} = \sigma_p g \sigma_p.$$

- (a) $\Theta_p : G \rightarrow G$ Gruppenautomorphismus.
- (b) $\Theta_p \circ \Theta_p = \text{id}$.
- (c) $\Theta_{g(p)} = g\Theta_p g^{-1}$.
 $\vartheta_p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \vartheta_p := (D\Theta_p)_e$.

Θ_p, ϑ_p heisst **Cartan Involution**.

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zusammenhängend, symmetrisch, $G = \text{Iso}_0(M)$.

$$G \times M \rightarrow M$$

$$(g, p) \mapsto g \cdot p = g(p)$$

$$\pi_p : G \rightarrow M$$

$$g \mapsto g(p)$$

π_p ist surjektiv.

$$\sigma : M \times M \rightarrow M$$

$$(p, q) \mapsto \sigma_p(q)$$

$$\sigma_p(p) = p, D\sigma_p|_p = -\text{id}|_{T_p M}$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_p \circ \sigma_p = \text{id}$$

$$\sigma_{g(p)} = g \circ \sigma_p \circ g^{-1}$$

$\Theta : M \times G$ ra G Cartan Involution. $(p, g) \mapsto \Theta_p(g) = \sigma_p g \sigma_p^{-1}$

$$\Theta_p \circ \Theta_p = \text{id}, \Theta_{g(p)} = g \Theta_p g^{-1}$$

$$\vartheta_p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \vartheta_p = (D\Theta_p)_e$$

$$\vartheta_p \circ \vartheta_p = \text{id}, \vartheta_p \text{ ist Lie-Algebra Automorphismus.}$$

$p \in M, K := G_p = \{g \in G \mid g(p) = p\}$ Fixpunktgruppe von p .
 $K = \pi_p^{-1}(p)$ ist Untergruppe von G, K ist kompakt.

Beispiel 3.22 $M = \mathbb{R}^n, p = 0, G = \{(A, a) \mid A \in \text{SO}(n), a \in \mathbb{R}^n\}$
 $K = \{(A, 0) \mid A \in \text{SO}(n)\}.$
 $M \simeq G / K, gp \simeq gK.$

Definition 3.23

$$P = \{g \in G \mid g \text{ ist Transvektion längs Geodätischer durch } p\}.$$

Bemerkung 3.24 $P \subset G$ ist Untermannigfaltigkeit, aber keine Untergruppe, und $\pi_p(P) = M.$

$$g \in P \implies g^{-1} \in P.$$

Beispiel 3.25 Betrachte

$$P = P(n, \mathbb{R})$$

$$= \{p \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid p^T = p, \text{ positiv definit, } \det p = 1\} \subset \text{SL}(n, \mathbb{R}).$$

$A \in \text{Sym}$, symmetrisch, $\text{spur } A = 0 \implies e^A \in P(n, \mathbb{R}).$

$P(n, \mathbb{R})$ ist keine Untergruppe. Es ist Untermannigfaltigkeit von $\text{SL}(n, \mathbb{R}).$

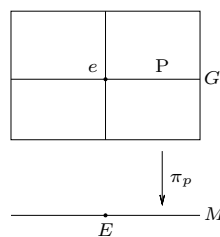


Figure 3.49

$$p \in P(n, \mathbb{R}) \implies p^{-1} \in P(n, \mathbb{R}), (p^{-1})^\top = (p^\top)^{-1} = p^{-1}.$$

Auf $T_p P$ definieren wir folgendes Skalarprodukt:

$$\langle v, w \rangle_p := \text{spur}(p^{-1} v p^{-1} w).$$

Warum?



Figure 3.50

$$\text{Für } E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in P$$

$$T_e P = \{A \mid A^\top = A, \text{ spur } A = 0\}.$$

$$c(t) = e^{tA} \in P \text{ ist Kurve mit } c(0) = E, \dot{c}(0) = A.$$

v, w Matrizen, $v = (v_{ij}), w = (w_{ij})$.

$\text{spur}(vw) = \sum_{i,j} v_{ij} w_{ji} = \sum_{i,j} v_{ij} w_{ij}$, also übliches euklidisches Skalarprodukt.

$$G = \text{SL}(n, \mathbb{R})$$

$$G \times P \rightarrow P$$

$$(g, p) \mapsto g \cdot p = g p g^\top \in P.$$

und $\langle g p g^\top x, x \rangle = \langle p g^\top x, g^\top x \rangle > 0$.

Wir zeigen: G operiert durch Isometrie.

$$g \cdot p = g p g^\top, g : P \rightarrow P.$$

$$(Dg)_p(v) = \frac{d}{dt} g(p + tv) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (g(p + tv) g^\top) \Big|_{t=0} = g v g^\top.$$

$$v, w \in T_p P$$

$$\begin{aligned} \langle (Dg)_p v, (Dg)_p w \rangle_{g \cdot p} &= \langle g v g^\top, g w g^\top \rangle_{g p g^\top} \\ &= \text{spur}((g p g^\top)^{-1} g v g^\top (g p g^\top)^{-1} g w g^\top) \\ &= \text{spur}((g^\top)^{-1} p^{-1} v p^{-1} w g^\top) \\ &= \text{spur}(p^{-1} v p^{-1} w) \\ &= \langle v, w \rangle_p. \end{aligned}$$

Operation ist transitiv, $p \in P$ gegeben, dann $p = g \cdot E = g g^\top$ für ein geeignetes $g \in \text{SL}(n, \mathbb{R})$.

$$\text{Ist } p \text{ diagonal, } p = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies p = g g^\top \text{ für } g = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

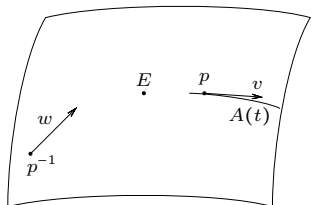


Figure 3.51

Zu zeigen: P ist symmetrischer Raum, das heißt für $p \in P$,

$$\sigma_p(q) := p q^{-1} p.$$

Das heißt: $\sigma_E(p) = p^{-1}$

$$\sigma := \sigma_E. \sigma(p) = p^{-1}.$$

Zu zeigen: σ ist Isometrie.

$$(D\sigma)_p v = -p^{-1}vp^{-1}.$$

Sei $(D\sigma)_p v = w$

$$A(t) = (p + tv). \text{ Zu zeigen } (A^{-1})'(0) = -p^{-1}vp^{-1}$$

$$B(t) = (p^{-1} + tw)$$

$$\implies B(0) = p^{-1} = (A^{-1}(0)), B'(0) = w = (A^{-1})'(0)$$

$$E = A(t)A^{-1}(t)$$

$$\implies 0 = (AA^{-1})'(0) = A'(0)A^{-1}(0) + A(0)(A^{-1})'(0) = A'(0)B(0) + A(0)B'(0) =$$

$$(AB)'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (p + tv)(p^{-1} + tw) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \dots$$

$$v, w \in T_p P, \langle (D\sigma)_p v, (D\sigma)_p w \rangle_{p^{-1}} = \langle p^{-1}vp^{-1}, p^{-1}wp^{-1} \rangle_{p^{-1}} = \text{spur}(vp^{-1}wp^{-1}) = \text{spur}(p^{-1}vp^{-1}w) = \langle v, w \rangle_p.$$

Allgemein: $\sigma_p(q) = p \cdot (\sigma(q)) = p \cdot (q^{-1}) = pq^{-1}p^\top = pq^{-1}p.$

$$\pi_E : \text{SL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow P(n, \mathbb{R}), g \mapsto gg^\top$$

$$K = \{g \mid gg^\top = E\} = \text{SO}(n).$$

$$G = \text{SL}(n, \mathbb{R}), K = \text{SO}(n),$$

$$\sigma : P \times P \rightarrow P, (p, q) \mapsto pq^{-1}p$$

$$\Theta : P \times G \rightarrow G, (p, g) \mapsto \sigma_p g \sigma_p$$

$$\Theta_p : G \rightarrow G, \Theta_p(g) = p(g^\top)^{-1}p^{-1}$$

$$\vartheta_p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, X \mapsto -pX^\top p^{-1}, \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}),$$

$$\vartheta_p = (D\Theta_p)_e$$

$$\vartheta_p(X) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Theta_p(e^{tX}) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p e^{-tX^\top} p^{-1} = -pX^\top p^{-1}.$$

\mathfrak{k} Eigenraum von ϑ_0 zum Eigenwert 1.

$\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n) = \{\text{Schiefsymmetrisch mit Spur } 0\}.$

\mathfrak{p} Eigenraum zum Eigenwert -1.

$$P(n, \mathbb{R}) = \{e^A \mid A \text{ symmetrisch, spur } A = 0\}.$$

$$\text{SL}(n, \mathbb{R}) \times P(n, \mathbb{R}) \rightarrow P(n, \mathbb{R}), g(p) = gpg^\top.$$

$$\dim P(n, \mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

$$\text{Also } \dim P(2, \mathbb{R}) = 2, \dim P(3, \mathbb{R}) = 5.$$

$P(2, \mathbb{R}) = \mathbb{H}^2$ hyperbolische Ebene.

$$\begin{aligned} \text{SL}(n, \mathbb{R}) \times P(2, \mathbb{R}) &\rightarrow P(2, \mathbb{R}) \\ (g, p) &\mapsto g \cdot p = gpg^\top. \end{aligned}$$

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

$$\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} (z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

$$\Phi : P(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}^2, a > 0, d > 0, ad - b^2 = 1: \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right) \in \mathbb{H}^2.$$

Diese Abbildung $E \mapsto i$ ist $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -equivariant, das heisst $\Phi(g \cdot p) = g \cdot \Phi(p)$. [Übung].

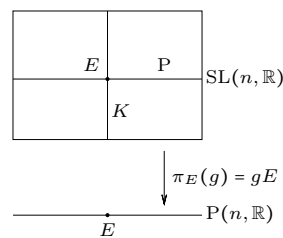


Figure 3.52

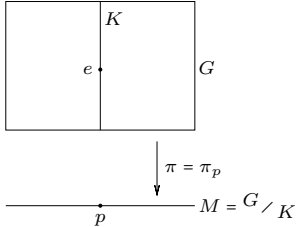


Figure 4.53

4 Struktur von symmetrischen Räumen

G Lie-Gruppe, die transitiv operiert. [Graphik] $K = \{g \mid gp = p\} = G_p$. $M = G/K$.

$$\begin{aligned} G/K &\rightarrow M \\ gK &\mapsto g \cdot p \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert, da $(gk_1)p = (gk_2)p)g \cdot p$.

$\mathfrak{k} = T_e K \subset T_e G = \mathfrak{g}$. \mathfrak{k} ist eine Lie-Unteralgebra. Das heisst, wenn $H, L \in \mathfrak{k} \implies [H, L] \in \mathfrak{k}$. Man schreibt auch $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$. $\Theta = \Theta_p : G \rightarrow G$, $g \mapsto \sigma_p g \sigma_p$ Automorphismus der Gruppe G . Ist eine Involution, das heisst: $\Theta^2 = \Theta \circ \Theta = \text{id}$.

$\vartheta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $\vartheta := (D\Theta)_e$, $\vartheta \circ \vartheta = \text{id}$.

ϑ ist Lie-Algebra Automorphismus, $\vartheta([X, Y]) = [\vartheta(X), \vartheta(Y)]$.

Allgemein: V sei ein endlich dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum, und sei $\vartheta : V \rightarrow V$ Involution. Dann $V = E_1 \oplus E_{-1}$, Eigenwerte ± 1 mit $E_1 \cap E_{-1} = \{0\}$.

$v \in V \implies v + \vartheta v \in E_1$, denn $\vartheta(v + \vartheta v) = v + \vartheta v$.

$v - \vartheta v \in E_{-1}$.

$$v = \frac{1}{2}(v + \vartheta v) + \frac{1}{2}(v - \vartheta v).$$

$\implies E_1$ und E_{-1} spannen v auf, und $E_1 \cap E_{-1} = \{0\}$.

Das heisst $\mathfrak{g} = E_1 \oplus E_{-1}$.

1. $\mathfrak{k} \subset E_1$.

$\mathfrak{k} \in K$, $\Theta(\mathfrak{k}) = \sigma \mathfrak{k} \sigma \in K \subset \text{Iso}(M)$, $\sigma = \sigma_p$.

$D(\Theta(\mathfrak{k}))_p = D(\sigma)_p D(\mathfrak{k})_p \cdot D(\sigma)_p = D(\mathfrak{k})_p$

$\implies \Theta(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$.

$\Theta|_K : K \rightarrow K$ ist $\text{id} \implies \vartheta|_{\mathfrak{k}} = \text{id}$.

$P \subset G$, P Transvektionen längs Geodätischer durch p , π_t Transvektion längs c (Ein-Parameter Gruppe).

$\pi_t = \exp(tX)$, $X \in \mathfrak{g}$.

$P \subset G$ Untermannigfaltigkeit mit $\dim P = \dim M$.

$\mathfrak{p} := T_e P$ Unterraum von \mathfrak{g} .

π_t Transvektion längs c .

$$\implies \Theta_p \circ \pi_t = \sigma_p \pi_t \sigma_p(c(s)) = \sigma_p \pi_t(c(-s)) = \sigma_p(c(-s+t)) = c(s-t) = \pi_{-t}(c(s)).$$

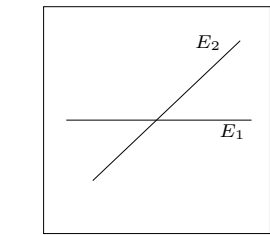


Figure 4.54

Dann gilt $\Theta_p \circ \pi_t = \pi_{-t}$
 $\implies \vartheta(X) = -X$.

$\Theta_p(\exp(tX)) = \exp(-tX)$,
 $\vartheta(X) = -X$.

2. $\mathfrak{p} \subset E_{-1}$, weil $\dim \mathfrak{p} + \dim \mathfrak{k} = \dim \mathfrak{g} \implies \mathfrak{p} = E_{-1}, \mathfrak{k} = E_{+1}$.

Bemerkung 4.1 $SL(n, \mathbb{R}) \times P(n, \mathbb{R}) \rightarrow P(n, \mathbb{R})$ Operation durch Isometrien. $\varphi : SL(n, \mathbb{R}) \rightarrow Iso(P(n, \mathbb{R}))$. φ ist surjektiv, φ hat endlichen Kern.

Zum Beispiel $\ker(\varphi) = \{g \mid \varphi(g) = id\} = \{g \mid gpg^T = p \ \forall p \in P(n, \mathbb{R})\} = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \{\pm \delta_{ij}\}, \det A = 1\}$.

$n = 2 \implies \ker(\varphi) = \pm id, Iso(P(2, \mathbb{R})) = SL_2(\mathbb{R}) / \pm id = PSL(2, \mathbb{R})$.

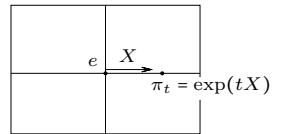


Figure 4.55

$\vartheta(X) = -X$, für $X \in \mathfrak{p}$, $\vartheta(V) = V$ für $V \in \mathfrak{k}$.

Cartan:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] &\subset \mathfrak{k} \\ [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] &\subset \mathfrak{k} \\ [\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] &\subset \mathfrak{p} \end{aligned}$$

$\vartheta([X, Y]) = [\vartheta(X), \vartheta(Y)] = [X, Y], [X, Y] \in E_1 = \mathfrak{k}$.

\mathfrak{p} ist Ad_K invariant, das heisst $Ad_{\mathfrak{k}}$ invariant für $k \in K$.

$Ad_k : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, Ad_k = D(C_k)_e$, wobei $C_k(g) = kgk^{-1}$.

Denn $V \in \mathfrak{k}, \implies X \in \mathfrak{p}$

$ad_V(X) = [V, X] \in \mathfrak{p}$

$\implies Ad_{\exp(V)}(X) = e^{ad_V}(X) \in \mathfrak{p}$.

4.1. Metrische Struktur

$\pi : G \rightarrow M, \pi(g) = g(p). (D\pi)_e : \mathfrak{g} \rightarrow T_p M, \mathfrak{k} = \ker(D\pi_e)$.

$(D\pi)_{e|_{\mathfrak{p}}} : \mathfrak{p} \rightarrow T_p M$ Isometrie.

Wähle nun ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathfrak{p} , so dass $D\pi : \mathfrak{p} \rightarrow M$ isometrisch. Dann ist

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{p}}$ ein Ad_k invariantes Skalarprodukt auf \mathfrak{p} .

Denn: Wir haben $k \circ \pi = \pi \circ C_k$ für $k \in K$.

$k \circ \pi(g) = k \cdot g \cdot p = k \cdot g \cdot (k^{-1} \cdot p) = kgk^{-1}(p) = \pi \cdot C_k(p)$.

Also $D(k \circ \pi)_e = (Dk)_p (D\pi)_e = (D\pi)_e Ad_k$.

$\langle Ad_k \bar{v}, Ad_k \bar{w} \rangle = \langle D\pi Ad_k \bar{v}, D\pi Ad_k \bar{w} \rangle = \langle (Dk)_p D\pi(\bar{v}), (Dk)_p D\pi(\bar{w}) \rangle = \langle D\pi(\bar{v}), D\pi(\bar{w}) \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{p}}$.

Wähle weiter ein beliebiges Ad_K invariantes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{k}}$ auf \mathfrak{k} . (Dies geht, weil K kompakt). Wir hatten gezeigt, auf einer kompakten Lie-Gruppe K gibt es ein biinvariantes Skalarprodukt, (dies entspricht genau den Ad_K invarianten Skalarprodukten auf \mathfrak{k}). Setze $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{k}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{p}}$ zu einem Skalarprodukt auf \mathfrak{g} fort, mit $\mathfrak{k} \perp \mathfrak{p}$.

Man betrachte die entsprechende linksinvariante Riemannsche Metrik auf G .

$\langle v, w \rangle_g := \langle DL_{g^{-1}}v, DL_{g^{-1}}w \rangle_e$.

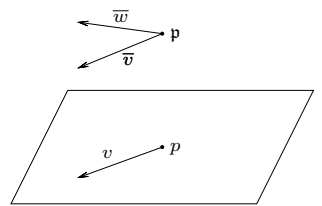


Figure 4.56

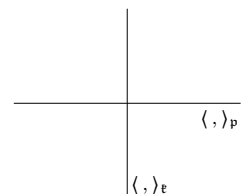


Figure 4.57

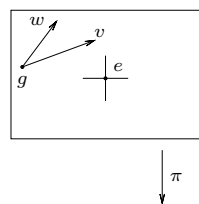


Figure 4.58

Wir erhalten somit eine Riemannsche Metrik auf G , die linksinvariant ist. Das heisst L_g sind Isometrien $\forall g \in G$, und weil $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_e$ Ad_K invariant ist die Metrik rechtsinvariant bezüglich K . Das heisst, R_k ist Isometrie für $k \in K$.

Auf \mathfrak{g} haben wir Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_e$. L_g und $R_k, k \in K$ sind isometrisch. Es gilt auch $\pi \circ L_g = g \circ \pi$. Denn $\pi \circ L_g(h) = \pi(gh) = (gh)(p) = g(h(p)) = g(\pi(h))$.

Lemma 4.2 π ist dann eine Riemannsche Submersion.

BEWEIS $g \in G$.

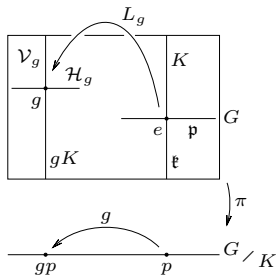


Figure 4.59

$$1. \mathcal{H}_g = DL_g(\mathfrak{p}).$$

$$L_g(e) = g, L_g(K) = gK = \pi^{-1}(\pi(g)).$$

$$\implies \mathcal{V}_g = DL_g(\mathcal{V}_e) = DL_g(\mathfrak{k}).$$

$$\text{Da } L_g \text{ isometrisch ist } \mathcal{H}_g = \mathcal{V}_g^\perp = DL_g(\mathfrak{k}^\perp) = DL_g(\mathfrak{p}).$$

$$2. (D\pi)_{g|\mathcal{H}_g} : \mathcal{H}_g \rightarrow T_{\pi(g)}M.$$

$$\text{Da } \pi \circ L_g = g \circ \pi \implies \pi = g \circ \pi \circ L_{g^{-1}}$$

$$\implies (D\pi)_{|\mathcal{H}_g} = Dg \circ D\pi \circ DL_{g^{-1}}|_{\mathcal{H}_g} \text{ Isometrie } \mathcal{H}_g \rightarrow T_pM. \quad \blacksquare$$

4.2. Berechnung der Krümmung (O'Neill)

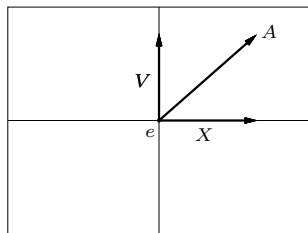


Figure 4.60

Seien $X, Y, Z \in \mathfrak{p}, V \in \mathfrak{k}, A, B \in \mathfrak{g}$ linksinvariante Vektorfelder.

$$A = A_{\mathfrak{p}} + A_{\mathfrak{k}}.$$

Wir identifizieren $\mathfrak{p} \stackrel{(D\pi)_k}{\simeq} T_pM$.

Satz 4.4 $X, Y, Z, \in \mathfrak{p}$.

$$R^M(X, Y)Z = -[[X, Y], Z].$$

Was haben wir.

1. Alle Terme der Form $A\langle B, C \rangle$ sind null (da $\langle B, C \rangle$ konstant).

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist Ad_K invariant.

$$\implies 0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle \text{Ad}_{\exp(tV)}A, \text{Ad}_{\exp(tV)}B \rangle = \langle \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(tV)}A, B \rangle + \langle A, \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(tV)}B \rangle = \langle \text{ad}_V A, B \rangle + \langle A, \text{ad}_V B \rangle$$

$$\implies \text{ad}_V \text{ schiefssymmetrisch.}$$

3. O'Neill Formel: $\langle R^M(X, Y)Y, X \rangle = \langle R^G(X, Y)Y, X \rangle + \frac{3}{4}\| [X, Y]_{\mathfrak{k}} \|^2$.

$$\nabla = \nabla^G.$$

$$2\langle \nabla_X Y, A \rangle = X\langle A, Y \rangle - Y\langle A, X \rangle - A\langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], A \rangle - \langle [X, A], Y \rangle - \langle [Y, A], X \rangle. \text{ Die ersten drei Terme auf der rechten Seite sind nach Punkt 1. null.}$$

Die letzten beiden Terme sind zusammen auch null, denn

$$\bullet A \in \mathfrak{p} \implies [X, Y] \in \mathfrak{k} \implies \langle [X, A], Y \rangle = \langle [Y, A], X \rangle = 0.$$

$$\bullet A \in \mathfrak{k} \implies -\langle [X, A], Y \rangle - \langle [Y, A], X \rangle = 0 \text{ nach dem zweiten Punkt.}$$

$$\implies \nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

4. $2\langle \nabla_V Y, X \rangle = \langle [V, Y], X \rangle - \langle [V, X], Y \rangle - \langle [Y, X], V \rangle = 2\langle [V, Y], X \rangle - \langle [Y, X], V \rangle.$

(I) $\langle \nabla_X \nabla_Y Y, X \rangle = 0.$

(II) $\langle \nabla_Y \nabla_X Y, X \rangle = Y \langle \nabla_X Y, X \rangle - \langle \nabla_X Y, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{4} \langle [X, Y], [X, Y] \rangle.$

(III) $\langle \nabla_{[X, Y]} Y, X \rangle = \langle [[X, Y], Y], X \rangle + \frac{1}{2} \langle [X, Y], [X, Y] \rangle.$

(I)+(II)+(III) + O'Neill Formel:

$$\begin{aligned} \langle R^M(X, Y)Y, X \rangle &= -\langle [[X, Y], Y], X \rangle + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \| [X, Y] \|^2 \\ &= -\langle [[X, Y], Y], X \rangle \end{aligned}$$

R Krümmungstensor. $R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$

Symmetrien:

1. $R(X, Y, \dots) = -R(Y, X, \dots),$
2. $R(\dots, Z, W) = -R(\dots, W, Z),$
3. Bianchi Identität: $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0.$
4. Block Vertauschung $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y).$ (Folgt aus 1.-3.).

Beobachtung:

Der Ausdruck $\langle [[X, Y], Z], W \rangle$ erfüllt diese Symmetrien.

1. klar.
2. Folgt aus der 2. Bemerkung von oben: $V = [X, Y] \in \mathfrak{k}$, dann also $\langle [[X, Y], Z], W \rangle = -\langle Z, \text{ad}_V W \rangle = -\langle Z, [[X, Y], W] \rangle.$
3. Jacobi Idnetität.

Wir hatten in der "Riemannschen Geometrie" eine Formel für $R(X, Y, Z, W)$ bestehend aus Termen $R(A, B, B, A)$. Somit ist $\langle [[X, Y], Z], W \rangle$ eine Formeln von Termen der Form $\langle [[A, B], B], A \rangle.$

Damit folgt Satz 4.4.

Alle Berechnungen werden in \mathfrak{g} geführt.

Man braucht:

- \mathfrak{g} Lie-Algebra,
- $\vartheta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g},$
- $\mathfrak{p}, \mathfrak{k}$ Eigenräume von $\vartheta,$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt auf \mathfrak{g} mit

$$\langle \text{ad}_H X, Y \rangle = -\langle X, \text{ad}_H Y \rangle,$$

für $H \in \mathfrak{k}.$

Allgemein noch etwas Lie-Algebra Theorie

Sei \mathfrak{g} Lie-Algebra: \mathfrak{g} ist \mathbb{R} Vektorraum mit einer Klammer $[,]$ für die $[X, Y] = -[Y, X]$ und die Jacobi-Identität gilt.

Beispiel 4.5 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), [A, B] = AB - BA.$

$\text{ad}_X(Y) := [X, Y]$, $\text{ad}_X \in \text{End}(\mathfrak{g})$.
 Jacobi-Identität: $\text{ad}_Z[X, Y] = [\text{ad}_Z X, Y] + [X, \text{ad}_Z Y]$.

$\text{ad}_{[X, Y]} = [\text{ad}_X, \text{ad}_Y] := \text{ad}_X \circ \text{ad}_Y - \text{ad}_Y \circ \text{ad}_X$.

Definition 4.6 Die Abbildung $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$B(X, Y) := \text{spur}(\text{ad}_X \text{ad}_Y)$$

heisst *Killing-Form*.

Erinnerung:

Sei \mathfrak{g} Vektorraum. Dann ist $\text{End}(\mathfrak{g}) = \{\varphi : V \rightarrow V \mid \varphi \text{ linear}\}$ ist Vektorraum (in der Tat eine Algebra). $\text{spur} : \text{End}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear.

1. $\text{spur}(\varphi + \psi) = \text{spur}(\varphi) + \text{spur}(\psi)$,
2. $\text{spur}(\varphi\psi) = \text{spur}(\psi\varphi)$,
 allgemein $\text{spur}(\alpha\beta\gamma) = \text{spur}(\beta\gamma\alpha)$, also invariant bezüglich zyklischer Vertauschung.
 Das heisst $\text{spur}(\alpha\beta\alpha^{-1}) = \text{spur}(\beta)$, $\forall \beta \in \text{End}(\mathfrak{g})$, $\forall \alpha \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$.

Lemma 4.7

1. B ist eine symmetrische Bilinearform.
2. B ist invariant unter allen Automorphismen. Das heisst $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ Lie-Algebra Automorphismus $\sigma([X, Y]) = [\sigma X, \sigma Y]$, somit $B(\sigma(X), \sigma(Y)) = B(X, Y)$.
3. $\forall X, Y, Z$ gilt $B(\text{ad}_Z X, Y) = -B(X, \text{ad}_Z Y)$.

BEWEIS

1. B ist bilinear, da $X \mapsto \text{ad}_X$ linear und spur linear.
 B ist symmetrisch, da $\text{spur}(\varphi\psi) = \text{spur}(\psi\varphi)$.
2. $\sigma([X, Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)]$
 $\implies \text{ad}_{\sigma(X)} \circ \sigma = \sigma \circ \text{ad}_X$.
 $\implies \text{ad}_{\sigma(X)} = \sigma \circ \text{ad}_X \circ \sigma^{-1}$.
 Somit $B(\sigma X, \sigma Y) = \text{spur}(\text{ad}_{\sigma X} \text{ad}_{\sigma Y}) = \text{spur}(\sigma \text{ad}_X \sigma^{-1} \sigma \text{ad}_Y \sigma^{-1}) = B(X, Y)$.
3. $-B(\text{ad}_Z X, Y) = B([X, Z], Y) \stackrel{*}{=} \text{spur}(\text{ad}_X \text{ad}_Z \text{ad}_Y - \text{ad}_Z \text{ad}_X \text{ad}_Y) = \text{spur}(\text{ad}_Z \text{ad}_Y \text{ad}_X - \text{ad}_Y \text{ad}_Z \text{ad}_X) = B([Z, Y], X) = B(\text{ad}_Z Y, X)$.
 Zu *: $\text{ad}_{[X, Z]} = \text{ad}_X \text{ad}_Z - \text{ad}_Z \text{ad}_X$. ■

Wir haben meistens mit Matrizen zu tun. Also Untergruppen von $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. \mathfrak{g} Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, $X = (X_{ij})$. $(X^\top)_{ij} = X_{ij}$, $(\bar{X})_{ij} = \overline{(X_{ij})}$.

Sei nun $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$.

$$(X, Y) \mapsto \text{spur}(X^\top Y) = \sum_{i,j} X_{ij} Y_{ij}.$$

übliches euklidisches Skalarprodukt auf $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (X, Y) &\mapsto \text{spur}(\overline{X}^\top Y) = \sum_{i,j} \overline{X}_{ij} Y_{ij} \end{aligned}$$

hermitsches Skalarprodukt, \mathbb{R} -linear.

Lemma 4.9 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, \mathbb{R} -Unteralgebra. Es gelte $X \in \mathfrak{g} \implies \overline{X}^\top \in \mathfrak{g}$. Dann ist $Q : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$Q(X, Y) = \text{Re}(\text{spur}(XY))$$

nicht-degenerierte Bilinearform mit $Q(\text{ad}_Z(X), Y) = -Q(X, \text{ad}_Z(Y))$.

BEWEIS

1. Q bilinear ist klar.
2. Symmetrisch, da $\text{spur}(XY) = \text{spur}(YX)$.
3. Nichtdegeneriert, da $X \in \mathfrak{g}, \overline{X}^\top \in \mathfrak{g}$, dann $Q(X, \overline{X}^\top) = \text{Re}(\text{spur}(X\overline{X}^\top)) \neq 0$ für $X \neq 0$.
4. $Q(\text{ad}_Z X, Y) = \text{Re}(\text{spur}((ZX - XZ)Y)) = \text{Re}(\text{spur}(ZXY - XZY)) = \text{Re}(\text{spur}(XYZ - XZY)) = \text{Re}(\text{spur}(X(YZ - ZY))) = -Q(X, \text{ad}_Z Y)$. ■

Beispiel 4.11 "Klassische Gruppen"

Lineare Isometriegruppen von $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}^n$ (Quaternionen) bezüglich einer kanonischen Bilinearform auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}^n$.

1. $O(n)$ Gruppe der linearen Isometrien von $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, mit $\langle v, w \rangle = \sum v_i w_i$.

$$\begin{aligned} O(n) &= \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^\top = A^{-1}\} \\ \mathfrak{o}(n) &= \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A^\top = -A\}. \end{aligned}$$

2. $U(n)$ \mathbb{C} -lineare Abbildungen von $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, mit $\langle v, w \rangle = \sum \bar{v}_i w_i$.

$$\begin{aligned} U(n) &= \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) \mid \overline{A}^\top = A^{-1}\} \\ \mathfrak{u}(n) &= \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \overline{A}^\top = -A\} \\ \mathfrak{su}(n) &= \{A \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{spur} A = 0\}. \end{aligned}$$

3. Symplektische Gruppe:

$$\text{Sp}(n) = \{A \in U(2n) \mid A^\top J = JA^{-1}\}$$

wobei $J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

$$\mathfrak{sp}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}), x \in \mathfrak{u}(n), y^\top = y \right\}$$

Bemerkung 4.12 Es gilt auf:

1. $U(n)$:

$$B(X, Y) = 2n \operatorname{spur}(XY) - 2(\operatorname{spur}X)(\operatorname{spur}Y),$$

2. $\mathfrak{su}(n)$:

$$B(X, Y) = 2n \operatorname{spur}(XY) = 2nQ(X, Y),$$

3. $O(n)$:

$$B(X, Y) = (n - 2)\operatorname{spur}(XY),$$

4. $\mathfrak{sp}(n)$:

$$B(X, Y) = 2(n + 1)\operatorname{spur}(XY).$$

BEWEIS Für 3. mit $n = 3$. $\mathfrak{so}(3) = \{A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$.

Basis:

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 0 & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[E_{12}, E_{13}] = -E_{23},$$

$$[E_{12}, E_{23}] = E_{13},$$

$$[E_{23}, E_{13}] = E_{12}.$$

Dann gilt für die Killing-Form

$$\begin{aligned} B(E_{12}, E_{12}) &= \operatorname{spur}(\operatorname{ad}_{E_{12}} \operatorname{ad}_{E_{12}}) \\ &= -2. \end{aligned}$$

■

Allgemein $B(E_{ij}, E_{ij}) = -2$.

Das heisst, zu zeigen: $B(E_{ij}, E_{ij}) = -2 \stackrel{!}{=} \operatorname{spur}(E_{ij} E_{ij})$.

$$B(E_{12}, E_{23}) = \operatorname{spur}(\operatorname{ad}_{E_{12}} \operatorname{ad}_{E_{23}}) = 0.$$

Entsprechend für die anderen.

Wir kommen zurück zum Beispiel $P(n, \mathbb{R}) = \operatorname{SL}(n, \mathbb{R}) / \mathfrak{so}(n)$.

Beispiel 4.14 Wir betrachten $P(n, \mathbb{R})$ für $n = 3$, das heisst $P(3, \mathbb{R}) = \operatorname{SL}(3, \mathbb{R}) / \mathfrak{so}(3)$, $\dim P = 5$, denn $\dim(\operatorname{SL}(3, \mathbb{R})) = 8$, $\dim(\mathfrak{so}(3)) = 3$.

$$\mathfrak{g} = \{A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \mid \operatorname{spur}A = 0\}.$$

Auf \mathfrak{g} nehmen wir das Skalarprodukt

$$Q : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Q(A, B) = \operatorname{spur}(AB).$$

Man kann schreiben

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p},$$

wobei $\mathfrak{k} = \{V \mid V^T = -V\}$ und $\mathfrak{p} = \{X \mid X^T = X\}$.

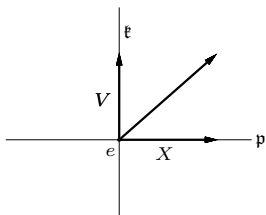


Figure 4.61

Die Cartan Involution ist

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ A &\mapsto -A^\top. \end{aligned}$$

$Q|_{\mathfrak{k}}$ ist negativ definit, und $Q|_{\mathfrak{p}}$ ist positiv definit. Weiter $Q(V, X) = 0$ für alle $V \in \mathfrak{k}$, und für alle $X \in \mathfrak{p}$.

$\mathfrak{k} = \text{span}(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3)$ wobei

$$\mathfrak{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{p} = \text{span}(a_1, a_2, p_1, p_2, p_3)$, wobei

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 := a_1 + a_2.$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{p}} = \text{spur}(p^{-1} X p^{-1} Y).$$

Das heisst, für $p = E$:

$$\langle X, Y \rangle_E = \text{spur}(XY) = Q(X, Y).$$

$$\|a_1\| = \|a_2\| = \|p_1\| = \|p_2\| = \|p_3\| = \sqrt{2}.$$

(Denn $\|a_1\|^2 = \langle a_1, a_1 \rangle = Q(a_1, a_1) = \text{spur}(a_1^2) = 2$, und analog, die anderen).

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \text{spur}(a_1 a_2) = -1. \text{ (Das heisst, der Winkel zwischen } a_1 \text{ und } a_2 \text{ ist } 120^\circ\text{).}$$

$$\text{SL}(n, \mathbb{R}) \times P(n, \mathbb{R}) \rightarrow P(n, \mathbb{R}) \text{ mit } g \cdot p = g p g^\top. \text{ sl}(2, \mathbb{R}) = \{A \mid \text{spur} A = 0\}.$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ Skalarprodukt auf } \text{SL}(2, \mathbb{R}), \langle X, Y \rangle := \text{spur}(XY).$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ ist schief bezüglich ad, das heisst } \langle \text{ad}_Z X, Y \rangle = -\langle X, \text{ad}_Z Y \rangle, \text{ denn } \langle \text{ad}_Z X, Y \rangle = \text{spur}([Z, X]Y) = \text{spur}(ZXY - XZY), \text{ und } \langle X, \text{ad}_Z Y \rangle = \text{spur}(XZY - XYZ).$$

$$\mathfrak{k} = \text{so}(2) = \{A \mid A^\top = -A\} = \text{span}(K) \text{ wobei } K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \mathfrak{p} = \{A \mid A^\top =$$

$$A, \text{ spur} A = 0\} = \text{span}(A, P), \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ und } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$K, A, P \in \mathfrak{g}, \langle K, K \rangle = -2, \|A\|^2 = \|P\|^2 = 2 (\langle A, A \rangle = \text{spur}(A^2) = \text{spur}(E) = 2).$$

K, A, P orthogonal zueinander.

$$\Phi(\exp(tA) \cdot E) = \Phi\left(e^{\begin{pmatrix} t & \\ & -t \end{pmatrix}}\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} E\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} e^{2t} & \\ & e^{-2t} \end{pmatrix}\right) = (0, e^{2t}).$$

$$\exp(tP) = e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & t^3 \\ t^3 & 0 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Somit } \exp(tP) \cdot E = \begin{pmatrix} \cosh(2t) & \sinh(2t) \\ \sinh(2t) & \cosh(2t) \end{pmatrix}.$$

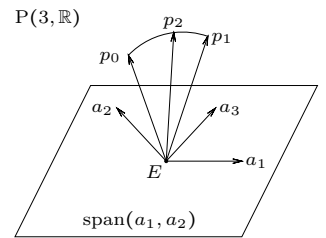


Figure 4.62

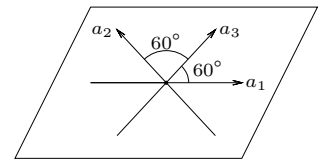


Figure 4.63

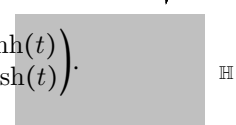
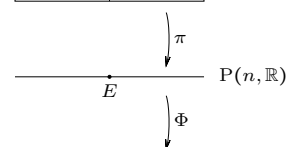
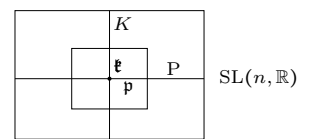
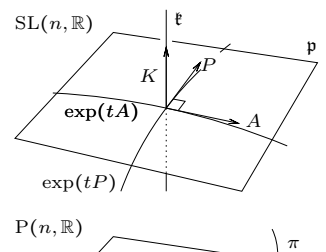


Figure 4.64



Struktur von symmetrischen Räumen

$\Phi(\exp(tP) \cdot E) = \left(\frac{\sinh(2t)}{\cosh(2t)}, \frac{1}{\cosh(2t)} \right)$. Dies beschreibt Kreisboen, da $\frac{\sinh^2(2t)}{\cosh^2(2t)} + \frac{1}{\cosh^2(2t)} = 1$.

$\exp(tK)$ Drehung. $e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} = \dots = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Krümmung: $\langle R(X, Y)Y, X \rangle = -\langle [[X, Y], Y], X \rangle = -\langle [X, Y], [X, Y] \rangle = -\text{spur}(\text{ad}_Y^2(X), X)$.

$$[A, P] = 2K, [A, K] = 2P$$

Das heisst $\text{ad}_A^2(P) = [A, [A, P]] = 4P$, das heisst P Eigenvektor von ad_A^2 mit Eigenwert 4.

$$\langle R(P, A)P, A \rangle = -\text{spur}(4PP) = -8.$$

Das heisst $K(P, A) = -\frac{8}{\langle P, P \rangle \langle A, A \rangle - \langle A, P \rangle^2} = -2$.

Bemerkung 4.15 Nimmt man als Metrik $\langle X, Y \rangle = 2\text{spur}(X, Y)$, kommt $K(A, P) = -1$ raus.

$P(3, \mathbb{R}) = \text{SL}(3, \mathbb{R}) / \text{SO}(3)$. $\mathfrak{k} = \text{span}(K_1, K_2, K_3)$, $\mathfrak{p} = \text{span}(A_1, A_2, P_1, P_2, P_3)$,

$\mathfrak{a} = \text{span}(A_1, A_2)$, wobei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, A_3 := A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$N_1^+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_1^- := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_2^+ := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_2^- := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, N_3^+ :=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_3^- := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das heisst

$$K_i = N_i^+ - N_i^-,$$

$$P_i = N_i^+ + N_i^-,$$

$$N_i^+ = \frac{1}{2}(P_i + K_i),$$

$$N_i^- = \frac{1}{2}(P_i - K_i).$$

$P_1, P_2, P_3, K_1, K_2, K_3$ stehen orthogonal aufeinander, und alle orthogonal auf \mathfrak{a} .

$N_1^+, N_1^-, \dots, N_3^+, N_3^-$ stehen orthogonal aufeinander, und orthogonal auf \mathfrak{a} .

$\langle A_1, A_2 \rangle = \text{spur}(A_1 A_2) = -1$, $\langle A_1, A_1 \rangle = 2$, $\langle A_2, A_2 \rangle = 2$. Das heisst, A_1, A_2 schliessen einen Winkel von 120 Grad ein.

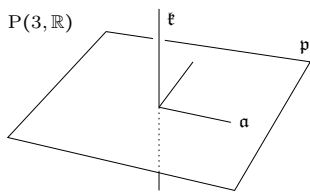


Figure 4.66

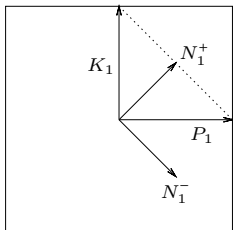


Figure 4.67

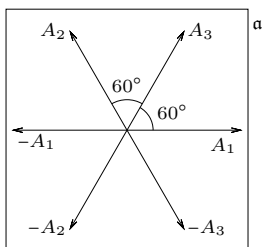


Figure 4.68

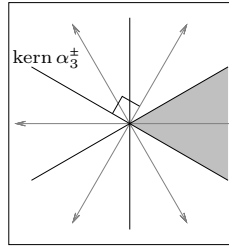


Figure 4.69

Die drei Kerne $\text{kern}(\alpha_i^+) = \text{kern}(\alpha_i^-)$ heissen *singuläre Hyperebenen* in \mathfrak{a} (in unserem Fall Geraden).
die singulären Hyperebenen zerlegen \mathfrak{a} in die *Weylkammern*.

$\Lambda = \{\alpha_1^+, \alpha_2^+, \alpha_3^+, \alpha_1^-, \alpha_2^-, \alpha_3^-\}$ seien die Wurzeln. Zu jedem $\alpha \in \Lambda$ gibt es einen *Wurzelraum* $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$, \mathfrak{g}_α Unterraum, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{R}N_\alpha$, $N_\alpha = N_i^\pm$, wenn $\alpha = \alpha_i^\pm$.

Es gilt: \mathfrak{g}_α ist Eigenraum von ad_A zum Eigenwert $\alpha(A)$. $A \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha \implies \text{ad}_A(X) = [A, X] = \alpha(A) \cdot X$.

Dahinter steht folgendes:

\mathfrak{a} ist abelsch, das heisst die $\text{ad}_A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ linear aber kommutieren: $\text{ad}_A \circ \text{ad}_{A'} = \text{ad}_{A'} \circ \text{ad}_A$.

Das heisst, man kann alle Abbildungen ad_A simultan diagonalisieren.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Und dies ist einer Zerlegung von \mathfrak{g} in die Eigenräume ad_A für alle $A \in \mathfrak{a}$ simultan.

Bespielsweise $A = A_2$.

$$\text{ad}_{A_2}(N_1^-) = [A_2, N_1^-] = \alpha_1^-(A_2)N_1^- = \langle -A_1, A_2 \rangle N_1^- = N_1^-.$$

Andererseits können wir rechnen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_1^-.$$

Lemma 4.16 $\alpha, \beta \in \Lambda$, dann gilt

1. $\alpha + \beta$ auch Wurzel, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
2. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{a}$.
3. Ist $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha + \beta$ keine Wurzel, $\implies [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$.

Beispiel 4.17 $\alpha = \alpha_1^+, \beta = \alpha_2^+, \alpha + \beta = \alpha_3^+$.

$$\implies [N_1^+, N_2^+] \subset \mathbb{R}N_3^+.$$

BEWEIS $X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_\beta$, das heisst $[A, X] = \alpha(A)X, [A, Y] = \beta(A)Y$.

$$\begin{aligned} \text{ad}_A([X, Y]) &= [A, [X, Y]] \\ &= [[A, X], Y] + [X, [A, Y]] \\ &= [\alpha(A)X, Y] + [X, \beta(A)Y] \\ &= (\alpha(A) + \beta(A))[X, Y]. \end{aligned}$$

■

Wir können ausrechnen $\langle R(P_i, A)A, P_i \rangle = -\text{spur}(\text{ad}_A^2(P_i)P_i)$. Man berechnet $K(A_i, P_i) = -2, K(A_i, P_j) = -\frac{1}{2}$ für $j \neq i. K(A_i, A_j) = 0$.

Bemerkung 4.19 Es ist immer möglich w durch eine Isometrie auf \mathfrak{a} abzubilden.

- $S^{2n} \leftrightarrow \mathbb{H}^{2n}$
- $\mathbb{C}P^n \leftrightarrow \mathbb{C}H^n$
- $K \geq 0 \quad K \leq 0.$

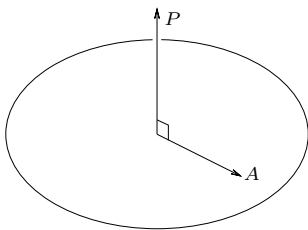


Figure 4.70

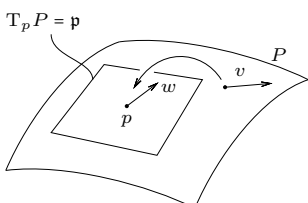


Figure 4.71

4.3. Beschreibung von Sphäre und hyperbolischem Raum

$$S^n = \text{SO}(n+1) / \text{SO}(n) = \text{O}(n+1) / \text{O}(n), S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

$$\text{SO}(n+1) \times S^n \rightarrow S^n, (g, x) \mapsto gx.$$

$$K = \text{SO}(n) \subset \text{SO}(n+1), \text{SO}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \text{SO}(n+1) \mid A \in \text{SO}(n) \right\}.$$

$$\sigma_p : S^n \rightarrow S^n, (t_0, \dots, t_n) \mapsto (t_0, -t_1, \dots, -t_n).$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1) = \{A \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R}) \mid A^T = -A\} \text{ Schiefsymmetrische Matrizen.}$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A^T = -A \right\}.$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x^T \\ x & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathfrak{so}(n+1).$$

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \text{spur}(X \cdot Y) \text{ positiv definit auf ganz } \mathfrak{g}.$$

$$\text{Ist also } X = \begin{pmatrix} 0 & -x^T \\ x & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \implies \langle X, X \rangle = \frac{1}{2} \sum x_i^2.$$

$$\text{Geodätische durch } p = (1, 0, \dots, 0)^T.$$

$$\text{Basis von } \mathfrak{p} \text{ ist } p_i = \begin{pmatrix} 0 & -e_i^T \\ e_i & 0 \end{pmatrix}. \text{ Geodätische in richtung } P_1 \text{ ist } \exp(tP_1) \cdot (1, 0, \dots, 0)^T$$

$$\text{und } \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Für \mathbb{H}^n hatten wir Lorenz-Produkt:

$$\langle x, y \rangle_L = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

$$\text{Und } \mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, y \rangle = 1\}.$$

$$\text{SO}(1, n) = \{A \mid \langle Ax, Ax \rangle_L = \langle x, x \rangle_L, \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$

$$K = \text{SO}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \text{SO}(1, n) \right\}.$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A^T = -A \right\}, \mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x^T \\ x & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

$$\mathfrak{so}(1, n) = \mathfrak{k} + \mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x^T \\ x & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{so}(n), x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \text{spur}(XY)$. Dieses Skalarprodukt ist negativ definit auf \mathfrak{k} , und positiv definit auf \mathfrak{p} .

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$$G = \{B \in \text{GL}(\mathbb{R}, n+1), B \cdot (1, x)^T = (1, z)^T, B \text{ erhält euklidisches Skalarprodukt auf } \mathbb{R}^n\}.$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix} \mid A \in \text{SO}(n), a \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & A \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^n, A^T = -A \right\}.$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid B^T = -B \right\}.$$

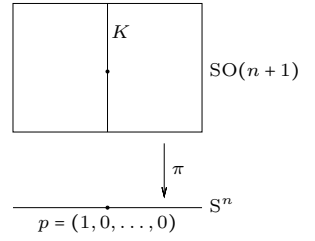


Figure 4.72

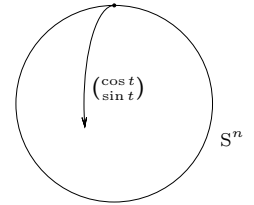


Figure 4.73

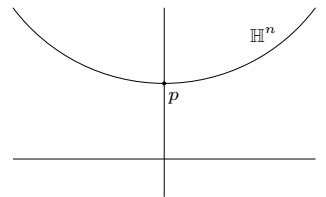


Figure 4.74

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & E \end{pmatrix}.$$

Das heisst die Geodäische durch $(1, 0, \dots, 0)^\top$ mit Anfangsvektor a ist von der Form

$$\exp(t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}) \cdot (1, 0, \dots, 0)^\top = (1, ta)^\top.$$

4.4. Dualität von Symmetrischen Räumen

Seien $M = G/K, M^* = G^*/K^*$ symmetrische Räume. $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}, \vartheta, Q$, wobei $Q(X, Y)$ Bilinearform, invariant unter ϑ und $\text{ad}_{\mathfrak{k}}$, nicht entartet, positiv definit auf \mathfrak{p} . Entsprechende Daten haben wir für den anderen symmetrischen Raum. $\mathfrak{g}^*, \dots, Q^*$.

Definition 4.20 Man sagt die Räume sind *dual* zueinander, wenn es Abbildungen

1. $\delta_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}^*$, Lie-Algebra Isomorphismus mit

$$Q^*(\delta_{\mathfrak{k}}V, \delta_{\mathfrak{k}}W) = -Q(V, W).$$

2. $\delta_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}^*$ Isometrie (der euklidischen Vektorräume $(\mathfrak{p}, Q|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}), (\mathfrak{p}^*, Q^*)$) mit

$$[\delta_{\mathfrak{p}}X, \delta_{\mathfrak{p}}Y] = -\delta_{\mathfrak{k}}[X, Y].$$

Beispiel 4.21 S^n dual zu \mathbb{H}^n .

$$\delta_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}^*, \delta_{\mathfrak{k}} = \text{id}$$

$$\delta_{\mathfrak{p}} : \begin{pmatrix} 0 & -x^\top \\ x & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x^\top \\ x & 0 \end{pmatrix},$$

1. Ist erfüllt.

$$2. X = \begin{pmatrix} & -x^\top \\ x & \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} & -y^\top \\ y & \end{pmatrix}.$$

$$[X^*, Y^*] = \left[\begin{pmatrix} & x^\top \\ x & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & y^\top \\ y & \end{pmatrix} \right] = \dots$$

Beobachtung: Es gilt $K^*(X^*, Y^*) = -K(X, Y)$, denn

$$\begin{aligned} K^*(X^*, Y^*) &= Q^*([X^*, Y^*], X^*) \\ &= -Q([X, Y], Y, X) \\ &= -K(X, Y). \end{aligned}$$

Satz 4.22 Zu jedem einfach zusammenhängenden symmetrischen Raum gibt es einen dualen einfach zusammenhängenden symmetrischen Raum.

Gegeben $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}, \vartheta, Q$. Gesucht Dualraum.

4.5. Komplexifizierung eines \mathbb{R} -Vektorraumes (\mathbb{R} -Lie-Algebra)

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Dann kann man einen \mathbb{C} -Vektorraum $V_{\mathbb{C}}$ erklären, so dass $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.

Formal: $V_{\mathbb{C}} = V \times V$ Menge mit üblicher Addition

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w').$$

Für $a \in \mathbb{R}$ hat man

$$a(v, w) = (av, aw).$$

Wir definieren

$$i(v, w) := (-w, v).$$

Das heisst:

$$(a + ib)(v, w) = (av, aw) + (-bw, bv).$$

Praktisch: $V_{\mathbb{C}} = \{v + iw \mid v, w \in V\}$, wobei man ganz natürlich multipliziert. Sei $(a + ib) \in \mathbb{C}$, dann

$$\begin{aligned} (a + ib)(v + iw) &= av + ibv + iaw - bw \\ &= (av - bw) + i(aw + bv). \end{aligned}$$

Ist jetzt V zusätzlich eine Lie-Algebra, dann ist $V_{\mathbb{C}}$ in natürlicher Weise auch eine \mathbb{C} -Lie-Algebra.

$$[v + iw, x + iy] = [v, x] - [w, y] + i[w, x] + i[v, y]$$

Sei $\sigma : V \rightarrow V$ ein (Lie-Algebra)-Endomorphismus. Dann gibt es Erweiterung $\sigma_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$,

$$\sigma_{\mathbb{C}}(v + iw) := \sigma(v) + i\sigma(w).$$

Ist $Q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, dann $Q_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$Q_{\mathbb{C}}(v + iw, x + iy) = Q(v, x) - Q(w, y) + i(Q(v, y) + Q(w, x)).$$

Weiter hat man Konjugation $\bar{} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$,

$$v + iw \mapsto v - iw,$$

ist \mathbb{R} linear, aber nicht \mathbb{C} -linear.

V kann man auf natürliche Weise in $V_{\mathbb{C}}$ einbetten $V \hookrightarrow V_{\mathbb{C}}$

$$v \mapsto v.$$

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \supset \mathfrak{g} \supset \mathfrak{k}, \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}. \vartheta : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^* &:= \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p} \text{ als } \mathbb{R}\text{-Unterraum} \\ &= \{K + iP \mid K \in \mathfrak{k}, P \in \mathfrak{p}\}. \end{aligned}$$

Das ist ein \mathbb{R} -Untervektorraum. \mathfrak{g}^* ist auch eine \mathbb{R} -Unteralgebra, das heisst abgeschlossen unter Lie Klammern.

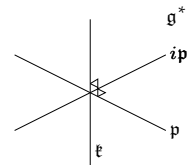


Figure 4.75

Denn

$$[K_1 + iP_1, K_2 + iP_2] = [K_1, K_2] - [P_1, P_2] + i([K_1, P_2] + [P_1, K_2]) \in \mathfrak{k} + i\mathfrak{p}.$$

Weiter lässt $\vartheta_{\mathbb{C}}$ lässt $k + ip$ invariant.

$$\vartheta_{\mathbb{C}}(K + iP) = \vartheta(K) + i\vartheta(P) = K - iP.$$

Man setzt $\vartheta^* := \vartheta_{\mathbb{C}|_{\mathfrak{g}^*}} \cdot \mathfrak{k}^* := \mathfrak{k}, \vartheta|_{\mathfrak{k}^*} = \text{id}, \vartheta|_{\mathfrak{p}^*} = -\text{id}.$

$$Q : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}, Q_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}. Q_{\mathbb{C}|_{\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*}},$$

$$Q_{\mathbb{C}}(K_1 + iP_1, K_2 + iP_2) = Q(K_1, K_2) - Q(P_1, P_2) + i(Q(P_1, K_2) + Q(K_1, P_2)).$$

$$Q^* := -Q_{\mathbb{C}|_{\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*}}.$$

Somit gilt (*):

$$Q^*(iP, iP) = Q(P, P).$$

Insbesondere $Q^*_{|\mathfrak{p}^* \times \mathfrak{p}^*}$ positiv definit.

$$\mathfrak{p} \perp \mathfrak{k}: Q(X, V) = Q(\vartheta(X), \vartheta(V)) = Q(-X, V) = -Q(X, V). \\ \implies Q(X, V) = 0.$$

$$\delta_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}^*, \delta_{\mathfrak{k}} := \text{id}.$$

$$\delta_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}^*, X \mapsto iX.$$

$$X, Y \in \mathfrak{k}, Q^*(X, Y) = -Q(X, Y).$$

Und $\delta_{\mathfrak{p}}$ ist Isometrisch wegen (*) $Q^*(iP_1, iP_2) = Q(P_1, P_2).$

$$[X^*, Y^*] = [iX, iY] = -[X, Y] = -[X, Y]^*.$$

Wir betrachten erneut $P(n, \mathbb{R}) = \text{SL}(n, \mathbb{R}) / \text{SO}(n) \cdot \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \mid \text{spur} A = 0\},$
 $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n) = \{A \mid A^T = -A\}$ und $\mathfrak{p} = \{A \mid A^T = A\}. Q = \text{spur}(AB), \theta(A) = -A^T.$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{A + iB \mid \text{spur} A = \text{spur} B = 0\}.$$

$$\mathfrak{k}^* = \mathfrak{k} = \{A \mid A^T = -A\}$$

$$\mathfrak{p}^* = \{iB \mid B^T B = B\}$$

$$P^*(n, \mathbb{R}) = \{e^{iB} \mid B \text{ symmetrisch, reell, spur} B = 0\} = \{C \mid \det C > 1, C^T = C, \bar{C} = C^{-1}\}.$$

Beispiel 4.23 $P(2, \mathbb{R})$ ist isometrisch zu \mathbb{H}^2 und $P^*(2, > R)$ ist isometrisch zu $S^2.$

$$P^*(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid \det = 1, \begin{pmatrix} d & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & it \\ it & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, \|a\|^2 + t^2 = 1 \right\}$$

$$\mathfrak{g}^* = \{A + iB \mid A \in \mathfrak{so}(2), B \text{ symm, spur} B = 0\}.$$

Geodätische durch $E, \exp(tH) \cdot E, H \in i\mathfrak{p},$

$$\text{z.B. } H = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \implies \exp(tH) \cdot E = \exp(tH) \exp(tH)^T = \begin{pmatrix} \cos 2t & i \sin 2t \\ i \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

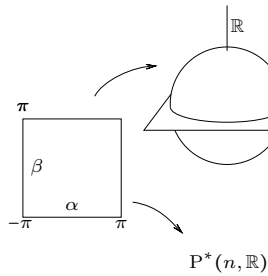
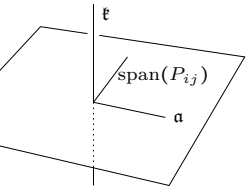


Figure 4.76



4.6. Genaueres Studium von $P(n, \mathbb{R})$

$\mathfrak{a} = \{A \mid A \text{ diagonal}\} \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0 \implies \mathfrak{a}$ Unteralgebra. Wir definieren $e_{ij} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, die Matrix die überall nullen hat, bis auf die Stelle i, j .

Weiter sei für $i \neq j$: $K_{ij} := e_{ij} - e_{ji}$, $P_{ij} := e_{ij} + e_{ji}$, und $A_{ij} := e_{ii} - e_{jj}$.

Basis von \mathfrak{k} sind die K_{ij} , $i < j$, Basis von $\text{span}(P_{ij})$ sind die P_{ij} , $i < j$ und Basis von \mathfrak{a} sind die $A_{12}, A_{23}, \dots, A_{n-1,n}$.

$$N_{ij}^+ = e_{ij} = \frac{1}{2}(P_{ij} + K_{ij}), \quad i < j$$

$$N_{ij}^- = e_{ji}$$

$\alpha_{ij} : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha_{ij}(H) = \langle H, A_{ij} \rangle$, $\langle X, Y \rangle = \text{spur}(XY)$. $\ker(\alpha_{ij})$ singuläre Hyperebenen in \mathfrak{a} .

Die Hyperebenen teilen \mathfrak{a} in die Weylkammern.

$$\mathfrak{a}^+ := \{H \in \mathfrak{a} \mid \alpha_{12}(H) > 0, \alpha_{23}(H) > 0\}.$$

$$H \in \mathfrak{a}, X \in \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$$

$$[H, X] = \alpha_{ij}(H)X = \langle H, A_{ij} \rangle X.$$

$$\mathfrak{n}^+ := \text{span}(N_{ij}^+), \quad i < j.$$

\mathfrak{n}^+ sind also obere Dreiecksmatrizen, mit null auf der Diagonalen.

Weiter ist \mathfrak{n}^+ eine Nilpotente Lie-Algebra.

$$G = \text{SL}(n, \mathbb{R}) = \exp(\mathfrak{g}).$$

$$K = \text{SO}(n) = \exp(\mathfrak{k}).$$

$$P(n, \mathbb{R}) = \exp(\mathfrak{p}) \quad A = \exp(\mathfrak{a}) = \{\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_i > 0, \prod \lambda_i = 1\}$$

$$N = \exp(\mathfrak{n}^+) = \{\text{obere dreiecks Matrizen multiplikativ}\}.$$

$$\exp(tP_{ij}) = \begin{pmatrix} \text{cht} & \text{sht} \\ \text{sht} & \text{cht} \end{pmatrix}, \quad i < j$$

$$\exp(tK_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

$\exp(tK_{ij})$ ist Drehung in der Ebene $\text{span}(A_{ij}, K_{ij})$, senkrecht dazu bleibt alles fest. Insbesondere bleibt $\ker(\alpha_{ij})$ fest.

$$\exp(tK_{ij}) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \exp(tK_{ij}) \cdot (E + A_{ij}) &= \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} (E + A_{ij}) \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c^2 - s^2 & -cs + sc \\ -cs + sc & -(c^2 - s^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\exp(tK_{ij}(E+P_{ij})) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} (E+P_{ij}) \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \dots$ Man rechnet aus, dass $\exp(tK_{ij})$ ist Drehung um Winkel $2t$ in $\text{span}(P_{ij}, A_{ij})$.

Beispiel 4.24 $n = 2$, $P(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{H}^2$. $A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. \mathfrak{a} ist ein-dimensional. $\ker(\alpha_{12}) = \ker(\alpha_{21}) = \{0\}$. Das heisst, man hat zwei Weylkammern. $\mathfrak{a}^+ = (0, \infty) \cdot A_{12}$.

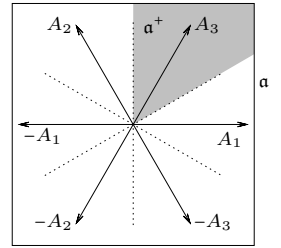


Figure 4.78

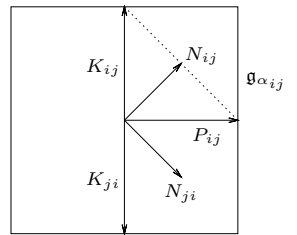


Figure 4.79

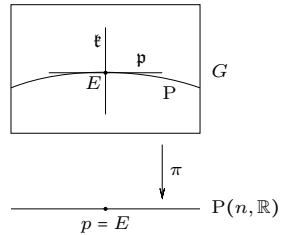


Figure 4.80

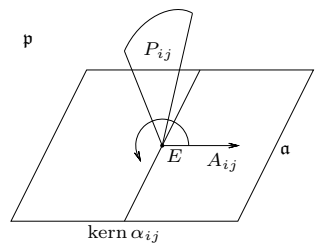
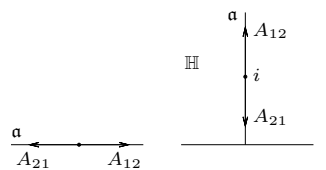


Figure 4.81



43 Figure 4.82

Lemma 4.25 $v \in T_E P(n, \mathbb{R}), v \neq 0. \implies \exists k \in K = SO(n)$, so dass $Dk_E(v) \in \mathfrak{a}^+$.

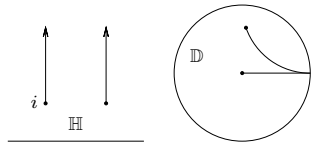


Figure 4.84

[...fehlt ... (Iwasawa Zerlegung)]

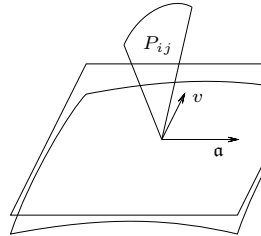


Figure 4.83

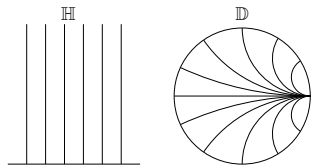


Figure 4.85

Für $n = 2$:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}^+ = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}, t > 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$c(t) = \exp(tH) \cdot E, H \in \mathfrak{a}^+, n \in N, nc(t).$$

Zu zeigen $d(nc(t), c(t)) \rightarrow 0$.

Sei $H \in \mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{p} \simeq T_e P$.

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ mit } \sum \lambda_i = 0, \text{ und } \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n.$$

$$c(t) = \exp(tH) \cdot E, n \in N = \exp(\mathfrak{n}^+).$$

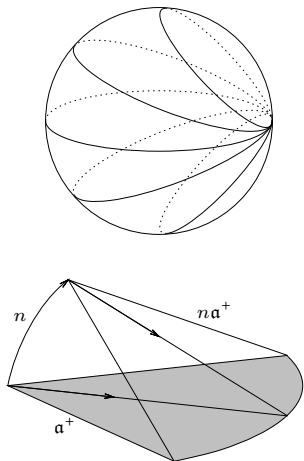


Figure 4.86

Lemma 4.26 Liegt H im Innern von \mathfrak{a}^+ , (das heisst $\alpha_{ij}(H) > 0$ für $i < j$), $\implies d(nc(t), c(t)) \rightarrow 0$ exponentiell.

BEWEIS $n \in \exp(\mathfrak{n}^+), n = \exp(Y)$, mit $Y = \sum_{\alpha} Y_{\alpha}$, wo α eine Wurzel ist mit $\alpha(H) > 0$.

$$\mathfrak{n}^+ = \text{span}(e_{ij}), i < j.$$

$$\text{Ist } i < j \quad A_{ij} = A_{ii+1} + \dots + A_{j-1j}$$

$$\implies \alpha_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} \alpha_{kk+1}.$$

$$\alpha_{ij}(H) = \langle A_{ij}, H \rangle = \sum \langle A_{ii+1}, H \rangle = \sum \alpha_{ii+1}(H).$$

$$\implies \alpha_{ij}(H) > 0.$$

$$d(nc(t), c(t)) = d(\exp(Y) \exp(tH) \cdot E, \exp(tH) \cdot E) = d(\exp(-tH) \exp(Y) \exp(tH) \cdot E, E).$$

Es reicht zu zeigen, dass $\exp(-tH) \exp(Y) \exp(tH) \rightarrow E$ exponentiell.

Wir hatten gezeigt: $(\exp(X) \exp(Y) \exp(-X) = \exp(e^{\text{ad}_X}(Y)) = \exp d(Y + [X, Y] + \frac{1}{2}[X, [X, Y]] + \dots)$.

Das heisst $\exp(-tH) \exp(Y) \exp(tH) = \exp(e^{-t\text{ad}_H}(Y))$.

$$e^{-t\text{ad}_H}(\sum_{\alpha} Y_{\alpha}) = \sum_{\alpha} e^{-t\text{ad}_H}(Y_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \underbrace{e^{-t\alpha(H)}}_{\rightarrow 0} Y_{\alpha} e^{-t\alpha(H)} \rightarrow 0 \text{ exponentiell, da}$$

$$\alpha(H) > 0.$$

$P(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{a} = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \sum \lambda_i = 0\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$. Wurzeln $\alpha_{ij} : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$, und **Figure 4.87**

$\alpha_{ij}(X) = \langle X, A_{ij} \rangle$. $\Lambda = \{\alpha_{ij}\}$ Wurzeln.

$\mathfrak{a}^+ = \{\text{diag}(\cdot) \mid \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n\}$.

$$P(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}^2, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \simeq \left(\frac{b}{d}, \frac{1}{d}\right).$$

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\lambda \end{pmatrix} \right\}, \mathfrak{a}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda > 0 \right\} \text{ und } \mathfrak{a}^- = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda < 0 \right\}, \mathfrak{n}^+ = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{n}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}, N^+ = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c(s) = \exp(sH) \cdot E = \begin{pmatrix} e^{2s} & \\ & e^{-2s} \end{pmatrix} \simeq (0, e^{2s}), \text{ wobei } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$n_t^+ = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$n_t^+ c(s) = n_t^+ \begin{pmatrix} e^{2s} & \\ & e^{-2s} \end{pmatrix} n_t^{+\top} \simeq (t, e^{2s}).$$

$$n_t^- c(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2s} & \\ & e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2s} & te^{2s} \\ te^{2s} & t^2 e^{2s} + e^{-2s} \end{pmatrix} \simeq \left(\frac{te^{2s}}{t^2 e^{2s} + e^{-2s}}, \frac{1}{t^2 e^{2s} + e^{-2s}} \right).$$

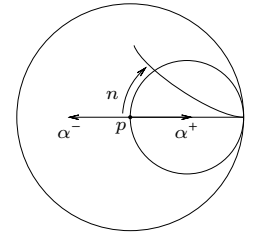


Figure 4.87

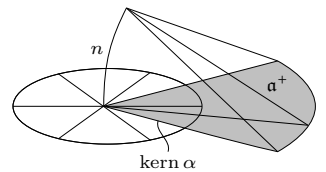


Figure 4.88

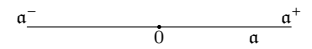


Figure 4.89

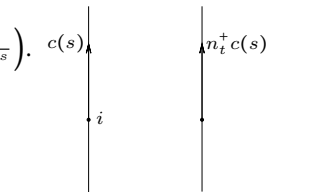


Figure 4.90

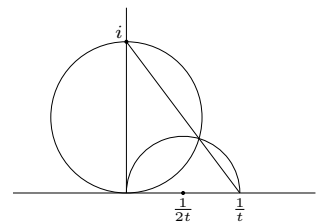


Figure 4.91

5 Der Rand im Unendlichen eines symmetrischen Raumes von nichtkompaktem Typ

Definition 5.1 X symmetrischer Raum. Dann heisst X *irreduzibel*, wenn man X nicht also Produkt $X = X_1 \times X_2$, mit X_i symmetrisch und nicht trivial, schreiben kann.

Ist X irreduzibel und $\dim X \neq 1$, dann trifft einer der folgenden Fälle zu

- a) X ist kompakt und $K \geq 0$,
- b) X ist nicht kompakt, X ist einfach zusammenhängend, und $K \leq 0$.

Die vom Typ a) heissen *kompakte Symmetrische Räume* und b) heissen "*symmetrische Räume von nichtkompaktem Typ*".

Ein Beispiel für b) ist $P = P(n, \mathbb{R})$.

Wir wollen untersuchen, wie der Rand $\partial_\infty P$ aussieht. *Gebäude Struktur*, "sphärisches Gebäude" (J. Tits, ~1970).

Ein *Gebäude* (building) besteht aus *Kammern* (chambers) und *Appartments*. Im Beispiel $P(3, \mathbb{R})$ [siehe Graphik] Weyl-Kammer (im ∞) Intervall der Länge $\pi/3$.

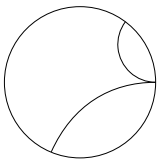


Figure 5.92

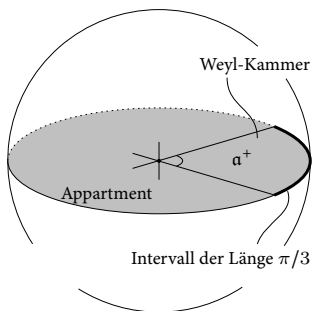


Figure 5.93

Definition 5.2 Ein *Flach* in $P = P(n, \mathbb{R})$ ist eine vollständige Untermannigfaltigkeit, die total geodätisch ist, und Isometrisch zu einem euklidischen Raum \mathbb{R}^d ist, und maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Bemerkung 5.3 Eine Untermannigfaltigkeit ist total geodätisch, wenn ...

Lemma 5.4 $A = \exp(\mathfrak{a}) \subset G$. Dann ist $F_0 := A \cdot E$ ein Flach.

$T_E F_0 \simeq \mathfrak{a}$, $H \in \mathfrak{a}$.

Dann ist die Geodätische in Richtung H ist $t \mapsto \exp(tH) \cdot E \in F_0$.

Da F_0 invariant ist unter A , ist F_0 überall total geodätisch.

Wir zeigen: F_0 isometrisch zu \mathbb{R}^{n-1} . Dazu betrachte $\varphi : \mathfrak{a} \rightarrow F_0$, mit $X \mapsto \exp(X) \cdot E$. \mathfrak{a} mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is isometrisch zu \mathbb{R}^{n-1} .

$d(\exp(X) \cdot E, \exp(Y) \cdot E) = d(\exp(-Y) \exp(X) \cdot E, E) = d(\exp(\underline{X - Y}) \cdot E, E)$. Das

heisst, $d(\exp(Z)E, E) =$ Länge dieser Geodätischen, das heisst $\|Z\| = \text{spur}(ZZ)^{1/2} = \|X - Y\|$.

Zu zeigen: F_0 maximal:

Annahme $F_0 \subset F$, F total geodätisch, isometrisch zu \mathbb{R}^d . Sei $H \in T_E F$. Sei $A \in \mathfrak{a}$ belie-

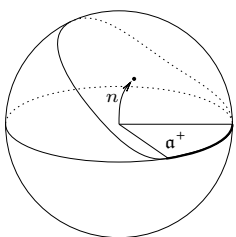
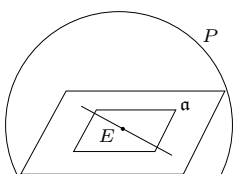


Figure 5.94



big.

$$\implies K(H, A) = 0$$

$$\implies 0 = \langle R(H, A)A, H \rangle = -\langle [[H, A], A], H \rangle = -\langle \text{ad}_A^2(H), H \rangle. H = A' + P, A' \in \mathfrak{a},$$

$$P \in \mathfrak{a}^\perp = \text{span}_{\alpha \in \Lambda} (P_\alpha), P = \sum_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha.$$

Wähle A so, dass $\alpha(A) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Lambda$.

$$\implies 0 = \langle \text{ad}_A^2(A' + \sum_{\alpha} P_\alpha), A' + \sum_{\alpha} P_\alpha \rangle = \langle \sum_{\alpha} \alpha^2(A) P_\alpha, A' + \sum_{\alpha} P_\alpha \rangle = \sum_{\alpha} \alpha^2(A) \|P_\alpha\|^2$$

$$\implies P_\alpha = 0 \text{ für alle } \alpha \in \Lambda$$

$$\implies H \in \mathfrak{a}.$$

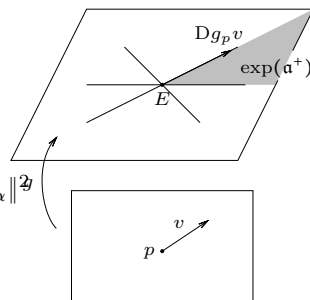


Figure 5.98

Definition 5.6 Ein *punktiertes Flach* ist (F, p) , wobei F ein Flach und $p \in F$ ist.

Bemerkung 5.7 Das standard punktierte Flach ist $(A \cdot E, E)$.

Lemma 5.8 Sei (F, p) ein beliebiges Flach

1. Dann existiert eine Isometrie $g \in G$ mit $gF = F_0$ und $gp = E$.
2. Wenn $v \in T_p F$, dann kann man g so wählen, dass $(Dg)_p v \in \overline{\mathfrak{a}^+}$.
3. Sind $g_1, g_2 \in G$, so dass 1. und 2. gelten, dann gilt $(Dg_1)_p v = (Dg_2)_p v$.
4. Ist zusätzlich $(Dg_1)_p v \in \mathfrak{a}^+$ (das heisst im Inneren von \mathfrak{a}^+), g_1, g_2 wie in 3., dann ist $(Dg_1)_p|_{T_p F} = (Dg_2)_p|_{T_p F}$.

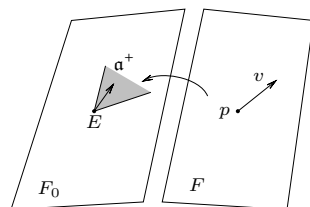


Figure 5.99

Beispiel 5.9 $P(2, \mathbb{R})$ [siehe Graphik].

BEWEIS

- (i) $\exists g$ so dass $g(p) = E$. Das heisst, ohne Einschränkung $p = E, v \in \mathfrak{p}$.
- (ii) Wir hatten gezeigt, dass es ein $k \in K = \text{SO}(n)$ gibt, so dass $Dk(v) = \text{Ad}_k(v) \in \mathfrak{a}^+$.

Das heisst, wir haben die Situation, wie in der Graphik. Also $v \in T_E(F \cap F_0)$.

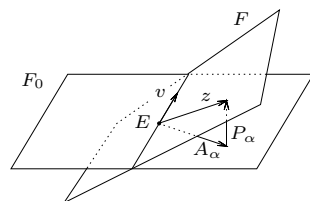


Figure 5.100

Wir wollen zeigen, dass $F \subset F_0$.

Sonst gibt es ein $Z \in T_E F, Z \perp T_E(F \cap F_0), Z \in \mathfrak{p}$. Wir wollen ein $k \in K$, so dass gilt

$$\text{Ad}_k|_{T_E(F \cap F_0)} = \text{id} \text{ und } \text{Ad}_k(Z) \in \mathfrak{a} = T_E F_0.$$

$$\implies \dim(kF \cap F_0) > \dim(F \cap F_0).$$

$$\implies \text{induktiv } kF \subset F_0.$$

Aus der Zerlegung $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in \Lambda^+} P_\alpha$ folgt, dass wir Z zerlegen können in $Z = A + \sum \lambda_\alpha P_\alpha. X \in T_E(F_0 \cap F), Z \perp X$.

Das heisst

$$\begin{aligned} 0 &= \langle R(Z, X)X, Z \rangle \\ &= -\langle [[Z, X], X], Z \rangle \\ &= -\langle \text{ad}_X^2(Z), Z \rangle \\ &= -\sum_{\alpha \in \Lambda^+} \alpha^2(X) \lambda_\alpha^2 \langle P_\alpha, P_\alpha \rangle. \end{aligned}$$

Das heisst, wenn $\lambda_\alpha \neq 0 \implies \alpha(X) = 0$.

Das heisst, $A_\alpha \perp T_E(F \cap F_0)$.

Betrachte nun die Drehungen in dem zweidimensionalen Raum $\text{span}(A_\alpha, P_\alpha)$.

Diese lassen $\ker(\alpha)$ fest, und somit auch $T_E(F \cap F_0)$ fest.

Der Rand im Unendlichen eines symmetrischen Raumes von nichtkompaktem Typ

Das heisst, wir können $k \in K$ wählen, so dass $\text{Ad}_k(T_p(F \cap F_0)) = \text{id}$ und $\text{Ad}_k(Z)$ keine P_α Komponente hat.

Indem wir das für alle α mit $\lambda_\alpha \neq 0$ machen, erhalten wir ein $k \in K$ mit $\text{Ad}_k(Z) \in \mathfrak{a}$.
Damit folgen 1. und 2.

Die Punkte 3. und 4. folgen aus:

1. Sei $H \in \mathfrak{a}^+$ (im Inneren) dann ist $H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$.
 $k \in K: \text{Ad}_k(H) \in \mathfrak{a}^+$
 $\implies \text{Ad}_{k|_{\mathfrak{a}}} = \text{id}$.
2. $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}, \text{Ad}_k(H) \in \overline{\mathfrak{a}^+}$
 $\implies \text{Ad}_k(H) = H$.

Denn:

2. $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}, H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.
 $\text{Ad}_k(H) = kHk^{-1}$. Das heisst, die Eigenwerte sind die gleichen.
 $\mathfrak{a}^+ \ni \text{Ad}_k(H) = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n), \mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$.
 $\implies \text{Ad}_h(H) = H$.

1. $H \in \mathfrak{a}^+, \implies \text{Ad}_k(H) \in \mathfrak{a}^+$. Dann folgt $\text{Ad}_k(H') = H'$ für alle $H' \in \mathfrak{a}$ in einer genügend kleinen Umgebung.
 $\implies \text{Ad}_{k|_{\mathfrak{a}}} = \text{id}$. ■

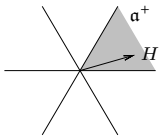


Figure 5.101

Korollar 5.11

1. Alle Flachs haben gleiche Dimension. Diese Dimension ist heisst **Rang** des Symmetrischen Raumes. .
Das heisst $\text{rang } P(n, \mathbb{R}) = (n - 1)$.
2. $v \in T^1P$. Dann existiert ein Flach (F, p) so dass $v \in T_p^1F$.
Denn zu $v \in T_p^1P$ gibt es g , so dass $g(p) = E, (Dg)_p(v) \in \overline{\mathfrak{a}^+}$.

Definition 5.12 $v \in T^1P$ heisst **regulär**, wenn v tangential zu genau einem Flach. v heisst **singulär** sonst.

Bemerkung 5.13 v ist regulär $\iff Dg(v)$ regulär.

Das heisst, um Regulärität festzustellen können wir $v \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ annehmen.

Lemma 5.14 Ist $v \in \overline{\mathfrak{a}^+}, \|v\| = 1$.

v regulär $\iff \alpha(v) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Lambda \iff v \in \mathfrak{a}^+$ (im Innern).

BEWEIS

“ \Leftarrow ” Folgt aus Lemma 5.8 4.

$v \in \mathfrak{a}^+, v$ tangential zu F_0 .

Annahme v tangential zu Flach F .

\implies aus Beweis von Lemma 5.8, $Z = A + P, P \neq 0$

$\implies P = \sum \lambda_\alpha P_\alpha, \lambda_\alpha \neq 0$ für ein α .

$\implies \alpha(v) = 0$, das heisst v singulär.

“ \Rightarrow ” Annahme $\alpha(v) = 0$ für eine Wurzel $\alpha \in \Lambda$. Dann können wir das Flach F_0 in der Ebene $\text{span}(A_\alpha, P_\alpha)$ drehen zu einem anderen Flach F mit $v \in T_E F, F \neq F_0$. ■

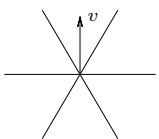


Figure 5.102

Definition 5.16 $v, w \in T^1P$. v und w heissen *asymptotisch*, wenn die Funktion

$$\begin{aligned} [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ t &\mapsto d(c_v(t), c_w(t)) \end{aligned}$$

beschränkt ist.

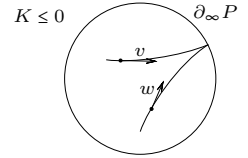


Figure 5.103

Bemerkung 5.17 v asymptotisch zu $w \iff Dg(v)$ asymptotisch zu $Dg(w)$.

Erinnerung: $v \in T^1P$, und $p \in P$. \implies es gibt genau ein $w \in T_p^1P$, so dass w asymptotisch zu v ist.

Satz 5.18 v und w seien asymptotisch, $\implies (v$ regulär $\iff w$ regulär).

BEWEIS Wegen Isometrieinvarianz können wir annehmen, dass $v \in \overline{\mathfrak{a}^+}$.

Sei p der Fusspunkt von w . Es gibt Isometrie $g \in G$ mit $g(p) = E$.

Wir können $g = kan$ mit $k \in K = \text{SO}(n)$, $a \in A$, $n \in N = \exp(\mathfrak{n}^+)$ obere Dreiecksmatrix, schreiben (Iwasawa-Zerlegung).

Behauptung: $w = D(n^{-1}a^{-1})_E(v)$.

Aus der Behauptung folgt dann der Satz.

Beweis der Behauptung: Zu zeigen ist, dass $d(c_v(t), n^{-1}a^{-1}c_v(t))$ ist beschränkt.

$$c(t) := c_v(t) = \exp(tv) \cdot E.$$

Somit

$$\begin{aligned} d(n^{-1}a^{-1}c(t), c(t)) &\leq d(n^{-1}a^{-1}c(t), n^{-1}c(t)) + d(n^{-1}c(t), c(t)) \\ &= d(c(t), ac(t)) + d(c(t), nc(t)). \end{aligned}$$

Der zweite Term ist beschränkt [gezeigt in Kapitel 4] und der erste Term ist konstant, denn:

$a = \exp(A)$, mit $A \in \mathfrak{a}$. $c(t) = \exp(tv) \cdot E$, $v \in \mathfrak{a}$. Das heisst

$$\begin{aligned} d(a \cdot c(t), c(t)) &= d(\exp(A) \exp(tv) \cdot E, \exp(tv) \cdot E) \\ &= d(\exp(-tv) \exp(A) \exp(tv) \cdot E, E) \\ &= d(\exp(A) \cdot E, E), \end{aligned}$$

da v und a kommutieren. ■

$T_p^1F \simeq$ Sphäre der Dimension $(n - 2) = \text{rang}P - 1$. Sei $\overline{\mathfrak{a}^+} \subset T_pF$ eine abgeschlossene Weyl Kammer. Dann nennen wir $\{c_v(\infty) \mid v \in \overline{\mathfrak{a}^+}, \|v\| = 1\}$ heisst Weyl Kammer in ∞ .

Beispiel 5.20 $P(4, \mathbb{R})$; A_3 , 24 Weyl Kammern. Es hat Symmetrien die von einem Tetraeder herkommen.

Lemma 5.21 Haben zwei Weyl Kammern in ∞ einen gemeinsamen inneren Punkt, so stimmen sie überein.

Bemerkung 5.22 Also im Fall $P = P(3, \mathbb{R}) \implies$ Weyl Kammern in ∞ ist Intervall.

Betrachte den Normalisator $N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K \mid kHk^{-1} \in \mathfrak{a}, \forall H \in \mathfrak{a}\}$, und den Zentralisator $Z_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K \mid kHk^{-1} = H, \forall H \in \mathfrak{a}\}$.

$Z_K(\mathfrak{a})$ ist Normalteiler von $N_K(\mathfrak{a})$.

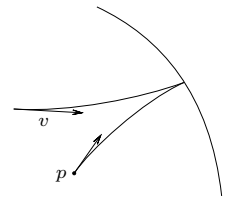


Figure 5.104

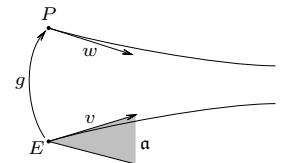


Figure 5.105

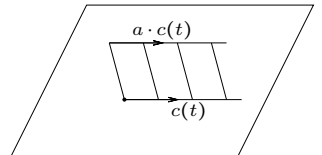


Figure 5.106

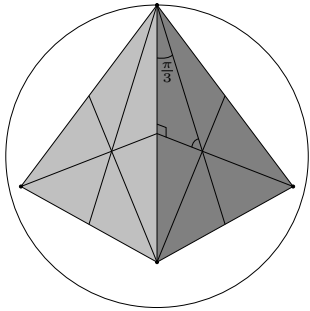


Figure 5.107

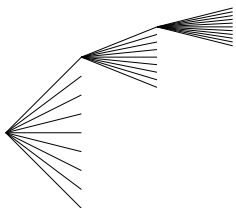


Figure 5.108

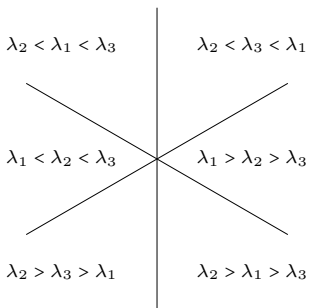


Figure 5.109

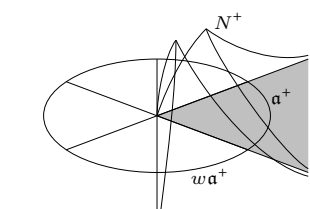


Figure 5.110

Definition 5.23

$$W := N_K(\mathfrak{a}) / Z_K(\mathfrak{a})$$

heisst die *Weylgruppe*.

Bemerkung 5.24 W ist endlich.

In unserem Beispiel $\mathfrak{a} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Lemma 5.25 $Z_K(\mathfrak{a}) = \{k \in \text{SO}(n) \mid kH = Hk \ \forall H \in \mathfrak{a}\} = (\pm e_1, \dots, \pm e_n)$.

$N_K(\mathfrak{a}) = \{(\pm e_{\pi(1)}, \dots, \pm e_{\pi(n)}) \mid \pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ Permutation}\}$.

Bemerkung 5.26 Zu jeder Permutation π gehört die Permutationsmatrix $P_\pi = (e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)})$.

$P_\pi \in O(n)$. $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma \circ \tau}$. $P_\pi^{-1} = P_\pi^\top = P_{\pi^{-1}}$.

$P_\pi^\top \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P_\pi = (\lambda_{\pi(1)}, \dots, \lambda_{\pi(n)})$.

$(\pm e_{\pi(1)}, \dots, \pm e_{\pi(n)})^\top \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) (\pm e_{\pi(1)}, \dots, \pm e_{\pi(n)}) = \text{diag}(\lambda_{\pi(1)}, \dots, \lambda_{\pi(n)})$.

In unserem Beispiel haben wir also $W = N_K(\mathfrak{a}) / Z_K(\mathfrak{a}) \simeq$ Permutationsgruppe in n Elementen.

$W \simeq \{\pi\}$, $w_\pi(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(\lambda_{\pi(1)}, \dots, \lambda_{\pi(n)})$.

$\{\pi\}$ wird erzeugt durch die $(n-1)$ Vertauschungen: $(12), (23), (34), \dots, (n-1n)$.

Für $w \in W$ definieren wir $N_w := wN^+w^{-1}$.

Lemma 5.27 Bruhat-Zerlegung

$B := AN^+ = \{\text{obere Dreiecksmatrizen mit positiven diagonal Einträgen}\}$.

$G = \cup_{w \in W} BwB$.

Das heisst $g \in G$, dann existiert $w \in W$, sei $\tilde{w} \in N_K(\mathfrak{a})$ ein Repräsentant von w und es existieren $b_1, b_2 \in B$, so dass $g = b_1 \tilde{w} b_2$.

BEWEIS Der Beweis beruht auf der einer Zerlegung von Matrizen die man oft LU oder LPU Zerlegung nennt (Gauss-Jordan Zerlegung). Man versucht eine Matrix zu zerlegen in $g = n_- \cdot n^+$, ist im allgemeinen nicht möglich.

$$N^+ = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad N^- = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$g \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, dann existiert $n_+ \in N^+$, $n_- \in N^-$, $d \in D$, p Permutationsmatrix, so dass $g = n_- p d n_+$.

Denn $g = (g_{ij})$,

Sei ν_1 minimal so, dass der Eintrag $g_{\nu_1 1} \neq 0$. Durch Multiplikation mit einem Element $n_1^- \in N^-$ erreicht man, dass die erste Spalte von $n_1^- g$ die Form $(0, \dots, 0, *, 0, \dots, 0)^\top$ hat. Genauso findet man $n_1^+ \in N^+$, so dass

$$n_1^- g n_1^+ = \begin{pmatrix} 0 & * & & \\ * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Mache dasselbe mit der Zweiten Spalte: $n_2^- n_1^- g n_1^+ n_2^+$.

Nach endlich vielen Schritten $n^- g n^+ = m$. m hat in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einen Eintrag.

Das heisst $m = (\lambda_1 e_{\pi(1)}, \dots, \lambda_n e_{\pi(n)}) = (e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}) \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Also $n^- g n^+ = p d$, $g = (n^-)^{-1} p d (n^+)^{-1}$.

$$g \in \text{SL}(n, \mathbb{R}), \sigma = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

$\sigma g = n_- p d n_+, g = \underbrace{\sigma n_- \sigma(\sigma p)}_{b_1 \in N^+} d n_+ = b_1(\sigma p) d n_+$, weiter $\det(d) = \pm 1$. also $g = b_1 p' a n_+$

wobei a diagonal, $\lambda_i > 0$.

Und somit $g = b_1 \tilde{w} b_2$, also $g \in B \tilde{w} B$. ■

Korrektur: $M := Z_K(\mathfrak{a}), M' := N_K(\mathfrak{a}), W = M' / M$. Dann $B := M A N^+ = \begin{pmatrix} \lambda_+ & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$\prod \lambda_i = 1$.

Geometrische Bedeutung der Gruppe B .

Sei c_0 die Standard Weylkammer in ∞ . G operiert auch auf den Weylkammern in ∞ .

Dann ist $B = \{g \in G \mid g c_0 = c_0\}$.

Menge der Weylkammern in $\infty \simeq G / B$.

Satz 5.29 Seien $c_1, c_2 \subset \partial_\infty P$ Weylkammern in ∞ . Dann gibt es ein Flach F , so dass $c_1, c_2 \subset \partial_\infty F$.

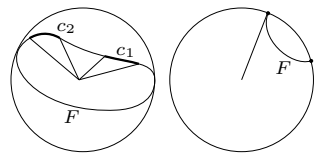


Figure 5.111

BEWEIS Ohne Einschränkung (nach Anwenden einer Isometrie) können wir annehmen, dass c_1 unsere Standard Weylkammer ist. Nun ist $g c_1 = c_2$ für ein $g \in G$. $g = b_1 \tilde{w} b_2 = b_1 \underbrace{\tilde{w} b_2 \tilde{w}^{-1}}_{=: b_w} \tilde{w}$.

$b_1 \in B$, B ist die Standgruppe von c_1 . $b_w \in \tilde{w} B \tilde{w}^{-1}$ Standgruppe von $\tilde{w} c_1$.

Das Flach $b_1 F_0$ verbindet c_1 und $g c_1$.

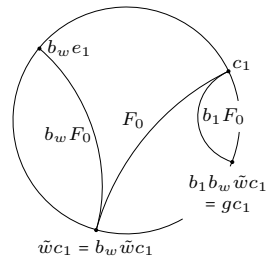


Figure 5.112

6 Gebäude

6.1 Coxeter Gruppen

Definition 6.1 Eine Coxeter Gruppe ist ein Paar (W, S) , bestehend aus einer Gruppe W die von endlich vielen Elementen $S \subset W$ erzeugt werden, so dass gilt

1. Alle $s \in S$ sind Involutionen, das heisst $s^2 = ss = 1$.
2. Alle anderen Relationen sind von der Form $(st)^m = 1$, wobei $s, t \in S$.

Beispiel 6.2 Für $m = 2$ also $(st)^2 = 1$: $stst = 1$, also $st = ts$.
Für $m = 3$ also $(st)^3 = 1$: also $stst = tst$.

Beispiel 6.3

1. $D_6 = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^3 = 1 \rangle \subset O(2)$ Diedergruppe mit 6 Elementen, $S = \{s, t\}$.
Diese kann man allgemein allgemein $D_{2m} = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^m = 1 \rangle$ in \mathbb{R} realisieren [Graphik].
2. $\langle s, t, u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (su)^3 = (ut)^3 = (ts)^3 = 1 \rangle \subset \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$.
3. Spiegelung an Regulärem 5-Eck in \mathbb{H}^2 [Graphik].
 $\langle s_1, \dots, s_5 \mid s_1^2 = \dots = s_5^2 = (s_1s_2)^2 = \dots = (s_5s_1)^2 = 1 \rangle$.

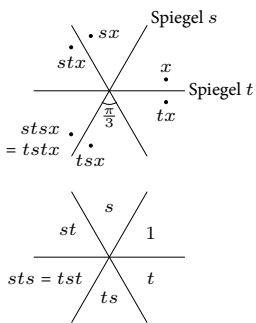


Figure 6.113

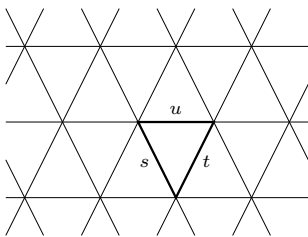


Figure 6.114

Einige Bemerkungen zur Kombinatorik. Coexter Gruppe (W, s) . $w \in W$. w kann man als Wort in den erzeugenden $w = st \dots$ schreiben. $\ell(w)$ = Länge eines kürzesten Wortes, welches w darstellt. $\ell(1) = 0$, $\ell : W \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ "Abstand zum neutralen Element". $w \in W$, $s \in S$, $ws \in W$, $ws \in W$. Dann $\ell(ws) = \ell(w) \pm 1$. Insbesondere $\ell(ws) \neq \ell(w)$.

Bemerkung 6.4 $D_6 = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^3 = 1 \rangle$

Übung: D_6 besteht genau aus den Elementen die durch $1, s, t, ts, st, sts = tst$. Denn sei $w \in D_6$, dann $w =$ Wort in s, t , wobei kein Element zweimal hintereinander stehen kann. Somit hätte man ein Wort aus mehr als drei Buchstaben, zum Beispiel $w = tsts \dots$, so ist dieses nicht reduziert.

Ist (W, S) eine endliche Coxeter Gruppe, dann kann man (W, S) realisieren durch eine Untergruppe von $O(n)$. Die Erzeugenden $\pi : W \rightarrow O(n)$ injektiv, $\pi(s)$ sind Spiegelungen.

Bemerkung 6.5 Ist (W, S) endlich, dann existiert genau ein $w \in W$ mit $\ell(w)$ maximal.

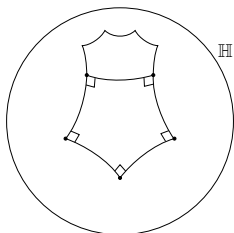
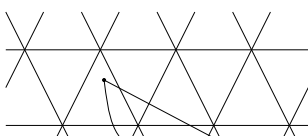


Figure 6.115



6.2. Coxeter Komplex

Definition 6.6 Ein *poset* (partially ordered set) ist eine Menge M mit einer Relation " \leq ", die erfüllt: $a \leq b, b \leq c \implies a \leq c$.

Beispiel 6.7 A endliche Menge, $M = \mathcal{P}(A)$.

$$U \leq V :\iff U \supseteq V.$$

Zum Beispiel $A := \{x, y, z\}$.

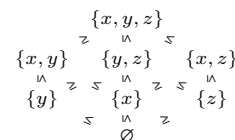


Figure 6.117

Definition 6.8 Sei (W, S) Coxeter Gruppe, $J \subseteq S$. $W_J = \langle J \rangle$ Untergruppe, die von J erzeugt wird. Dann heisst (W_J, J) *spezielle Untergruppe*.

Beispiel 6.9 $D_6 = \{s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^3 = 1\}$.

- $J = \{s\} \quad W_{\{s\}} = \{s, 1\}$
- $J = \{t\} \quad W_{\{t\}} = \{t, 1\}$
- $J = \emptyset \quad W_{\emptyset} = \{1\}$.

Definition 6.10 Die *Standard Restklassen* sind die Restklassen wW_J wobei W_J spezielle Untergruppe.

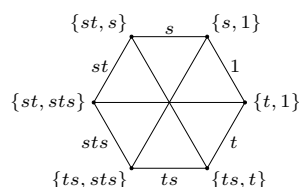


Figure 6.118

Definition 6.11 $\Sigma(W, S)$ Menge der Standard Restklassen als poset, wobei $A, B \in \Sigma(W, S)$ mit

$$A \leq B :\iff B \subset A.$$

Beispiel 6.12 $W_s = \{s, 1\}, W_t = \{t, 1\}, W_{\emptyset} = \{1\}$.

Restklassen bezüglich:

- $W_{\emptyset}: \{1\}, \{s\}, \{t\}, \{st\}, \{ts\}, \{sts = tst\}$.
- $W_s: \{1, s\}, \{ts, t\}, \{sts, st\}$.
- $W_t: \{1, t\}, \{st, s\}, \{tst, ts\}$.

6.3. Metrische simpliziale Komplexe

M_{κ}^n Standardraum der Krümmung $\kappa, \kappa = -1, 0, 1$.

Definition 6.13 Ein *geodätisches n -Simplex* in M_{κ}^n ist die konvexe Hülle von $(n + 1)$ Punkten in allgemeiner Lage (wobei wir für $\kappa = 1$ noch zusätzlich voraussetzen, dass die Punkte in einem offenen Halbraum liegen).

Bemerkung 6.14 $n+1$ Punkte $\{x_0, \dots, x_n\}$ sind in allgemeiner Lage, wenn $(x_1 - x_0), \dots, (x_n - x_0)$ linear unabhängig. (Allgemein also, dass die Tangentialvektoren der Geodäten $[x_0, x_1], \dots, [x_0, x_n]$ linear unabhängig).

Wir definieren nun den M_{κ} -simplizialen Komplex:

Definition 6.15 Sei $S_\lambda, \lambda \in \Lambda$ eine Familie von geodätischen Simplexes, $S_\lambda \subset M_\kappa^{n_\lambda}$. Sei

$$X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \times \{\lambda\}$$

die disjunkte Vereinigung der S_λ . Sei weiter \sim eine Äquivalenzrelation auf X , und sei $K = X / \sim, p: X \rightarrow K$ Projektion, wobei $p_\lambda: S_\lambda \rightarrow K$, mit $p_\lambda(x) = [(x, \lambda)]$.

K heisst M_κ -*simplizialer Komplex* wenn:

1. für jedes $\lambda \in \Lambda$ ist p_λ injektiv.
2. ist $p_\lambda(S_\lambda) \cap p_\mu(S_\mu) \neq \emptyset$, dann gibt es eine Seite $T_\mu \subset S_\mu, T_\lambda \subset S_\lambda$ und eine Isometrie $h_{\lambda,\mu}: T_\lambda \rightarrow T_\mu$, so dass

$$p(x, \lambda) = p(y, \mu) \iff y = h_{\lambda,\mu}(x).$$

Beispiel 6.16 Graph

6.4. Abstrakte simpliziale Komplexe

Definition 6.17 Ein *abstrakter simplizialer Komplex* besteht aus einer Menge $V \neq \emptyset$ (Ecken), sowie $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(V)$, mit $\emptyset \notin \mathcal{S}, S \in \mathcal{S} \implies |S| < \infty$ mit

1. $v \in V \implies \{v\} \in \mathcal{S}$, das heisst jede ein-Punkt Menge ist ein Simplex.
2. $S \in \mathcal{S}, T \subset S, T \neq \emptyset \implies T \in \mathcal{S}$.

\mathcal{S} heisst *Menge der Simplexes*.

Beispiel 6.18 $V = \{v_1, \dots, v_6\}, \mathcal{S} = \{\{v_1\}, \dots, \{v_6\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_6, v_1\}\}$.

Vorsicht: Der Coxeter Komplex ist isomorph zu einem abstrakten simplizialen Komplex (aber nicht "wortwörtlich" wegen umgekehrter Inzidenzstruktur).

Einen endlichen Coxeter Komplex, (das heisst der Coxeter Komplex einer endlichen Coxeter Gruppe) kann man immer als sphärischen simplizialen Komplex realisieren.

6.5. Gebäude

Definition 6.19 Ein *Gebäude* ist ein simplizialer Komplex Δ , welches die Vereinigung von Unterkomplexen sind, welche alle isomorph zu einem festen Komplex Σ sind (diese Unterkomplexe nennt man *Apartments*) mit

- B0 Σ ist ein Coxeter Komplex.
- B1 A, B Simplexes, dann gibt es ein Apartment Σ mit $A, B \in \Sigma$.
- B2 Σ, Σ' Apartments, $A, B \in \Sigma \cap \Sigma'$. Dann existiert ein Isomorphismus $\Sigma \rightarrow \Sigma'$, der A und B punktweise festlässt.

Ein Beispiel für einen sphärischen Coxeter Komplex:

Beispiel 6.20 $P(4, \mathbb{R})$. Hat S_4 , die Permutationsgruppe von vier Elementen. Erzeugt von s, t, u mit $(st)^2 = (su)^2 = (tu)^3 = 1$.

Erzeugenden von S_4 sind $s = (1, 2), t = (3, 4), u = (2, 3)$.

Definition 6.21 Man nennt ein Gebäude ein

- *sphärisches Gebäude*, wenn ein Apartment sphärisch,
- *affines Gebäude*, wenn ein Apartment euklidisch, und
- *hyperbolisches Gebäude*, wenn ein Apartment hyperbolisch

ist.

Bemerkung 6.22 Das Gebäude, das zu einem symmetrischen Raum von nicht-kompaktem Typ gehört ist sphärisch.

Zu $P(n, \mathbb{R})$:

- B_0 folgt aus der Bruhat-Zerlegung.
- B_1 : Skizze des Argumentes: $\Sigma = \partial_\infty F_0$. F_1 anderes Flach, welches asymptotisch zu A und B .
Da F_1 asymptotisch zu A hat man $F_1 = nF_0$ für ein $n \in N^+$. (A Standard Weylkammer). $F_1 = n'F_0$ für ein $n' \in N_w$.
 $F_1 = nF_0, n \in N^+ \cap N_w$.

Versuch, das Gebäude von $P(3, \mathbb{R})$ kombinatorisch zu verstehen.

Wir wollen dieses Gebäude als abstrakten simplizialen Komplex verstehen. Simplicialer Komplex: $V, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(V)$.

$V =$ alle Geraden durch den Nullpunkt im $\mathbb{R}^3 \cup$ alle Ebenen durch den Nullpunkt.

Also $V = \{g, E \mid g \text{ Gerade, } E \text{ Ebene}\}$.

$\mathcal{S} = \{\{g\}, \{E\}, \{g, E\} \mid g \subset E\}$

$\{g, E\} \in \mathcal{S} \iff g \subset E$.

Definition 6.23 Die *Grassmann-Mannigfaltigkeit* ist

$$G_{k,n} = \{U \subset \mathbb{R}^n \mid U \text{ } k - \text{dim linearer Unterraum}\}.$$

Bemerkung 6.24 $G_{k,n}$ ist Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 6.25 $G_{1,n} = \mathbb{R}P^{n-1}$.

Definition 6.26 Eine *Fahne* ist ein Element $(U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_s}) \in G_{\lambda_1, n} \times \dots \times G_{\lambda_s, n}$ mit $1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_s \leq n - 1$ und $U_{\lambda_1} \subset U_{\lambda_2} \subset \dots \subset U_{\lambda_s}$.

Gebäude:

$$V = \bigcup_{k=1}^{n-1} G_{k,n},$$

$$\mathcal{S} = \{\{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_s}\} \mid (U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_s}) \text{ Fahne}\}.$$

Wir zeigen, dass dies ein Gebäude ist.

Apartments:

Seien b_1, \dots, b_n eine Basis von \mathbb{R}^n .

$\Sigma_{b_1, \dots, b_k} = \{ \text{Fahnen die aus den UR } \text{span}(b_I) \text{ gebildet werden, wobei } b_I \text{ nicht leere Teilmenge von } \{b_1, \dots, b_k\} \}$

Standard Apartment ist Σ_{e_1, \dots, e_n} .

Beispiel 6.27

- $n = 3$.

$$\begin{aligned} \Sigma_{e_1, e_2, e_3} = & \{ \{ \langle e_1 \rangle \}, \{ \langle e_2 \rangle \}, \{ \langle e_3 \rangle \}, \\ & \{ \langle e_1, e_2 \rangle \}, \{ \langle e_1, e_3 \rangle \}, \{ \langle e_2, e_3 \rangle \}, \\ & \{ \langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle \}, \{ \langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_3 \rangle \}, \dots \} \end{aligned}$$

- $n = 4$. (0-Simplices)
 $\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_3 \rangle, \langle e_4 \rangle$
 $\langle e_1, e_2 \rangle, \langle e_1, e_3 \rangle, \langle e_1, e_4 \rangle, \langle e_2, e_3 \rangle, \langle e_2, e_4 \rangle, \langle e_3, e_4 \rangle$
 $\langle e_2, e_3, e_4 \rangle, \langle e_1, e_3, e_4 \rangle, \langle e_1, e_2, e_4 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

Zu zeigen: Gebäudeaxiome B1–B3 sind erfüllt.

- B0 Sind A, B Simplices, dann existiert Σ , so dass $A, B \in \Sigma$. Ohne Einschränkung sind maximale Simplices (das heisst maximale Fahnen).

$$\begin{aligned} A : U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_{n-1} \quad (& \subset U_n := \mathbb{R}^n), \quad \dim(U_i) = i, \\ B : V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \quad (& \subset V_n := \mathbb{R}^n), \quad \dim(V_i) = i. \end{aligned}$$

Zunächst setzen wir voraus, dass A, B in "allgemeiner Lage" sind, das heisst $\dim(U_i \cap V_j) = (i + j) - n$.

Insbesondere $\dim(V_1 \cap U_{n-i+1}) = 1$.

Nun definiere b_1, \dots, b_n so, dass $\langle b_i \rangle = V_i \cap U_{n-i+1}$.

b_1, \dots, b_k ist Basis von V_k .

b_n, \dots, b_{n-k+1} ist Basis von U_k .

Das heisst $V_1 \subset \dots \subset V_k$ ist $\{ \langle b_1 \rangle, \langle b_1, b_2 \rangle, \dots, \langle b_1, \dots, b_k \rangle \}$.

Das heisst $A, B \subset \Sigma_{b_1, \dots, b_n}$.

Wenn die Fahnen nicht in allgemeiner Lage liegen, dann ist $\dim(U_i \cap V_j) \geq (i + j) - n$. Dann kann man immernoch $b_i \in V_i \cap U_{n-i+1}$ finden, so dass b_1, \dots, b_k Basis von V_k .

B1

B2

Beispiel 6.28 $n = 3$

$A = (g_1, E_1), B = (g_2, E_2)$

- in allgemeiner Lage:
also $g_1 \cap E_2 = \{0\}, g_2 \cap E_1 = \{0\}$.
 $\implies E_1 \cap E_2 = g_3, \text{span}(g_1, g_2) = E_3$.

- nicht in allgemeiner Lage:

$$g_1 \subset E_2$$

Man hat vier Fälle

1. $g_1 \neq g_2$ und $E_1 \neq E_2$
2. $g_1 = g_2$ und $E_1 \neq E_2$
3. $g_1 = g_2$ und $E_1 = E_2$
4. $g_1 \neq g_2$ und $E_1 = E_2$

Beispiel 6.29 Sei $c = \{\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle, \dots, \langle e_1, \dots, e_n \rangle\}$ Standard Weylkammer im ∞ .

$B \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ die Untergruppe, die c festhält. $B = MAN$.

$b \in B$, dann ist $b(\langle e_1 \rangle) \subset \langle e_1 \rangle$, $b(\langle e_1, \dots, e_k \rangle) \subset \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.

$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ operiert auf dem Gebäude. $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ $U_{\lambda_1} \subset \dots \subset U_{\lambda_n}$ Fahne,

$$g(U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}) = (gU_{\lambda_1}, \dots, gU_{\lambda_n}).$$

Zu jedem Simplex $(U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_s})$ im Gebäude können wir die Gruppe betrachten, die das Simplex festlässt.

Stabilisator von $(\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle)$ sind die oberen Dreiecksmatrizen

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Stabilisator von $(\langle e_n \rangle, \langle e_n, e_{n-1} \rangle, \dots)$ sind entsprechend die unteren Dreiecksmatrizen.

Tits-Metrik auf $\partial_\infty X$ für X symmetrischer Raum von nicht kompaktem Typ.

X sei $\mathrm{CAT}(0)$ Raum, $x \in X$, $z, w \in \partial_\infty X$. Man hat $\angle_x(z, w)$ und man definiert

$$\angle(z, w) := \sup_{x \in X} \angle_x(z, w).$$

Dies ist Metrik auf $\partial_\infty X$.

Td ist die dazugehörige Längnemmetrik.

Beispiel 6.30 \mathbb{H}^n . $(\partial_\infty \mathbb{H}^n, \angle)$.

$$\angle(z, w) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } z = w \\ \pi & \text{wenn } z \neq w \end{cases}$$

$$Td(z, w) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } z = w \\ \infty & \text{wenn } z \neq w. \end{cases}$$

Beispiel 6.31 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

2-dim Flach (Geodätische in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$)

Ein Flach in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ hat eine singuläre Hyperebene.

$\partial_\infty(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^2$.

$N = \{x\} \times \mathbb{R}(\infty)$, $S = \{x\} \times \mathbb{R}(-\infty)$.

Gebäude besteht aus zwei Nullsimplices $\{N\}, \{S\}$ und unendlich vielen Intervallen der Länge π .

Beispiel 6.32 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$.

$$S^3 \simeq \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}.$$

Die Ränder von den Faktoren kann man sich als Grosskreise vorstellen.

Die Menge der Mittelpunkte der Weylkammer entspricht in S^3 dem Cliffordtorus.

$$S_{1/\sqrt{2}}^1 \times S_{1/\sqrt{2}}^1 \subset S^3 \subset \mathbb{R}^4.$$

Beispiel 6.33 $\partial_\infty P(3, \mathbb{R}) \simeq S^4$ (denn $\dim P(3, \mathbb{R}) = 5$).

$$S^4 \simeq T_E^1 P(3, \mathbb{R}).$$

A Aufgaben

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei G eine Lie Gruppe und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine linksinvariante Metrik auf G . Zeige, dass $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vollständig als Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2 (Symmetrische Räume sind homogen, 1 Punkt)

Einen metrischen Raum X nennt man *homogen* wenn die Isometriegruppe $I(X)$ transitiv auf X operiert, d.h. für alle $x, y \in X$ gibt es ein $\phi \in I(X)$, so dass $\phi(x) = y$.

Zeige, dass jeder symmetrische Raum homogen ist.

Aufgabe 3 (Zur Definition von symmetrischen Räumen, 1 Punkt)

Wem die Definition von symmetrischen Räumen in der Vorlesung nicht so geheimer erscheint zeige folgendes:

Sei M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und ϕ, ψ zwei Isometrien von M . Nimm an es gibt einen Punkt $p \in M$ mit $\phi(p) = \psi(p)$ und $d\phi_p = d\psi_p$. Dann gilt $\phi = \psi$.

Hinweis : Es genügt $\phi(p) = p$ und $d\phi_p = id_{T_p M} \rightarrow \phi = id$ zu zeigen.

Aufgabe 4 (Linksinvariante Vektorfelder sind glatt, 2 Punkte)

Sei G eine Lie Gruppe. Zeige, dass wenn $X_e \in T_e G$ irgendein Vektor ist, so ist $X(g) := (dL_g)_e X_e$ ein glattes Vektorfeld auf G .

Hinweise : Dass X glatt ist folgt, wenn $dfX : TG \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist für alle $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ glatt.

Zeige, dass man die Funktion $g \mapsto d(f \circ L_g)X_e$ schreiben kann als

$$d(f \circ L_g)X_e = d(f \circ \phi)(0, Y)_{i_e^1(g)},$$

wobei $\phi : G \times G \rightarrow G$ die Multiplikation $\phi(g, h) = gh$ bezeichnet, Y irgendein glattes Vektorfeld auf G ist mit $Y(e) = X_e$ ($(0, Y)$ ist dann ein Vektorfeld auf $G \times G$) und i_e^1 die Inklusion $G \rightarrow G \times G$, die h auf $i_e^1(h) := (h, e)$ schickt.

Blatt 2

Aufgabe 5 (Holomorphe Funktionen, 2 Punkte)

Wir hatten

Definition 1

$f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ heisst holomorph, wenn f reell diffbar (als Abbildung $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$) und

$$Df_p(J_p v) = J_{f(p)}(Df_p v),$$

wo J die Standard komplexe Struktur auf $\mathbb{C}^{n,m}$ ist, das heisst $J_p(p, v) := (p, iv)$.

Andererseits lernt man in der Funktionentheorie die folgende

Definition 2

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heisst ableitbar in p , falls f reell ableitbar in p ist und $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt, das heisst

$$\frac{\partial u}{\partial x}(p) = \frac{\partial v}{\partial y}(p), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(p) = -\frac{\partial v}{\partial x}(p).$$

Verifiziere, dass wenn $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph im Sinne von Definition 1 ist, dann ist es in jedem Punkt komplex ableitbar im Sinne von Definition 2. Die Umkehrung gilt natürlich auch, sofern die Ableitung gemäss Definition 2 in jedem Punkt p existiert.

Aufgabe 6 (Die klassischen Lie Gruppen, 2 Punkte)

Man überzeuge sich nochmals dass folgende Gruppen Lie Gruppen sind, und untersuche sie auf Kompaktheit, Zusammenhang und Zentrum.

- $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$.
- $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.
- $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = 1_n\}$.
- $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$.
- $GL(n, \mathbb{C})$.
- $SL(n, \mathbb{C})$.
- $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^* A = 1_n\}$.
- $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$.
- $Sp(n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$, mit $J = \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}$.

Blatt 3

Aufgabe 7 (Lie Algebren der klassischen Gruppen. 5 Punkte)

Bestimme die Lie Algebren der klassischen Lie Gruppen. Was sind die (reellen) Dimensionen der Gruppen?

- $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$.
- $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.
- $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = 1_n\}$.
- $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$.
- $GL(n, \mathbb{C})$.
- $SL(n, \mathbb{C})$.
- $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^* A = 1_n\}$.
- $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$.

- $Sp(n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$, where $J = \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}$

Aufgabe 8 (Lie Algebra \leftrightarrow Lie Gruppe (I), 2 Punkte)

Wir wissen, dass isomorphe Lie Gruppen isomorphe Lie Algebren haben. Die Umkehrung davon stimmt nicht.

Zeige, dass $SU(2)$ und $SO(3)$ dieselbe Lie Algebra haben (und beschreibe diese) und dass aber $SU(2)$ und $SO(3)$ nicht isomorph als Gruppen sind.

Hinweis : Isomorphe Gruppen haben dasselbe Zentrum.

Bemerkung : Es gilt der

Satz 1

Seien G, H zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie Gruppen mit Lie Algebren \mathcal{G}, \mathcal{H} . Dann gilt $G \cong H$ (als Lie Gruppen) genau dann wenn $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}$ (als Lie Algebren).

Aufgabe 9 (Lie Algebra \leftrightarrow Lie Gruppe (II), 2 Punkte)

Die Exponentialabbildung ist ein lokaler Homöomorphismus von einer Umgebung von $0 \in \mathcal{G}$ in eine Umgebung von $e \in G$. Es ist klar, dass das Bild $\exp(\mathcal{G})$ in der Zusammenhangskomponente von e in G liegt. Im allgemeinen füllt sie aber nicht die ganze Komponente aus.

Zeige, dass $\exp : sl(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ nicht surjektiv ist (dies obwohl ja $SL(2, \mathbb{R})$ zusammenhängend ist).

Hinweis : Wie sehen die Eigenwerte von X aus? Wie die von $\exp(X)$? Was folgt daraus für die Spur von $\exp(X)$?

Bemerkung : Hingegen gilt, dass mindestens eines von $\pm X$ immer im Bild von \exp liegt für alle $X \in SL(2, \mathbb{R})$. Allgemein hat man den

Satz 2

Sei G eine Lie Gruppe mit Lie Algebra \mathcal{G} . Sei G_0 die Zusammenhangskomponente von G die e enthält. Dann wird G_0 erzeugt von $\exp(\mathcal{G})$, d.h. jedes $g \in G$ lässt sich als endliches Produkt von Elementen aus dem Bild von \exp schreiben.

In der Tat wird jede zusammenhängende topologische Gruppe von jeder Umgebung des neutralen Elementes erzeugt.

Aufgabe 10 (Das Exponential für Matrizen, 2 Punkte)

Die professionelle Definition des Lie Gruppen Exponentials ist

Definition 3

Sei $X \in \mathcal{G}$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Lie Gruppe G . Dann ist $\exp(X) := \Gamma_X^e(1)$, wobei Γ_X^e die Integralkurve von X durch e ist.

In Worten: man folgt der Integralkurve von X während der Zeit 1 und dort wo man landet, das ist $\exp(X)$.

Wir wollen verifizieren, dass diese Definition im Falle von Matrixgruppen äquivalent ist zur bekannten Exponentialformel.

1. Zeige zunächst, dass Definition 3 überhaupt Sinn macht, d.h. dass die Integralkurve tatsächlich bis zur Zeit $t = 1$ existiert. In der Tat, zeige dass linksinvariante Vektorfelder vollständig sind (alle Integralkurven existieren für alle Zeiten).
2. Zeige

$$\exp(X) = \sum_k \frac{X^k}{k!} \quad \text{für } X \in M(n \times n, \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}).$$

Hinweis : Zeige, dass

$$\gamma : t \mapsto \sum_k \frac{t^k X^k}{k!}$$

eine Integralkurve von X durch e beschreibt. Mit $t = 1$ folgt die Behauptung.

Blatt 4

Aufgabe 11 (2 Punkte)

Sei G eine Lie Gruppe und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine linksinvariante Metrik auf G . Zeige, dass $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vollständig als Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 12 (Symmetrische Räume sind homogen, 1 Punkt)

Einen metrischen Raum X nennt man *homogen* wenn die Isometriegruppe $I(X)$ transitiv auf X operiert, d.h. für alle $x, y \in X$ gibt es ein $\phi \in I(X)$, so dass $\phi(x) = y$.

Zeige, dass jeder symmetrische Raum homogen ist.

Aufgabe 13 (Zur Definition von symmetrischen Räumen, 1 Punkt)

Wenn die Definition von symmetrischen Räumen in der Vorlesung nicht so geheimer erscheint zeige folgendes:

Sei M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und ϕ, ψ zwei Isometrien von M . Nimm an es gibt einen Punkt $p \in M$ mit $\phi(p) = \psi(p)$ und $d\phi_p = d\psi_p$. Dann gilt $\phi = \psi$.

Hinweis : Es genügt $\phi(p) = p$ und $d\phi = p = id_{T_p M} \rightarrow \phi = id$ zu zeigen.

Aufgabe 14 (Linksinvariante Vektorfelder sind glatt, 2 Punkte)

Sei G eine Lie Gruppe. Zeige, dass wenn $X_e \in T_e G$ irgendein Vektor ist, so ist $X(g) := (dL_g)_e X_e$ ein glattes Vektorfeld auf G .

Hinweise : Dass X glatt ist folgt, wenn $dfX : TG \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist für alle $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ glatt.

Zeige, dass man die Funktion $g \mapsto d(f \circ L_g)X_e$ schreiben kann als

$$d(f \circ L_g)X_e = d(f \circ \phi)(0, Y)_{i_e^1(g)},$$

wobei $\phi : G \times G \rightarrow G$ die Multiplikation $\phi(g, h) = gh$ bezeichnet, Y irgendein glattes Vektorfeld auf G ist mit $Y(e) = X_e$ ($(0, Y)$ ist dann ein Vektorfeld auf $G \times G$) und i_e^1 die Inklusion $G \rightarrow G \times G$, die h auf $i_e^1(h) := (h, e)$ schickt.

Blatt 6

Aufgabe 15 (Cartan-Zerlegung, 1 Punkt)

Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{p}$ die Cartan-Zerlegung bezüglich $p \in M$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{p}^*$ die bezüglich $q \in M$. Wie stehen \mathfrak{k} und \mathfrak{k}^* , respektive \mathfrak{p} und \mathfrak{p}^* zueinander?

Aufgabe 16 (Cartan-Zerlegung für $SL(n)$, 1 Punkt)

Die Cartan-Involution $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, X \mapsto -X^T$, zerlegt $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ in die Eigenräume $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ zu den Eigenwerten 1, respektive -1 .

Sei $X \in \mathfrak{sl}(n)$ beliebig. Was sind die Komponenten $X_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{k}, X_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}$ so dass $X = X_{\mathfrak{k}} + X_{\mathfrak{p}}$?

Aufgabe 17 ($P(2, \mathbb{R}) = \mathbb{H}^2$, 2 Punkte)

In der VL wurde folgende Abbildung definiert:

$$\begin{aligned} \Phi : P(2, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} &\mapsto (b/d, 1/d). \end{aligned}$$

Wir haben ausserdem folgende isometrische Operationen von $SL(2, \mathbb{R})$ auf $P(2, \mathbb{R})$, respektive \mathbb{H}^2 :

$$\begin{aligned} SL(2) \times P(2, \mathbb{R}) &\rightarrow P(2, \mathbb{R}) & SL(2) \times \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ (g, p) &\mapsto g \cdot p := gpg^T & \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

Zeige, dass Φ $SL(2)$ -äquivariant ist, d.h.

$$\Phi(g \cdot p) = g \cdot \Phi(p) \quad \forall g \in G, p \in P(2, \mathbb{R}). \quad (*)$$

Gehe so vor:

1. Zeige $\Phi(g \cdot I) = g \cdot \Phi(I)$ wobei I die Identitätsmatrix in $P(2, \mathbb{R})$ ist.
2. Jede positiv definite symmetrische Matrix lässt sich als $A = LL^T$ schreiben wobei L untere Dreiecksmatrix (Cholesky-Zerlegung).
Daher $A = L \cdot I$ für ein geeignetes $L \in SL(2, \mathbb{R})$. Folgere daraus mit 1, dass $(*)$ gilt.

Aufgabe 18 (Stabilisatoren sind maximal kompakte Untergruppen, 2 Punkte)

Wir hatten gezeigt, dass Stabilisatoren $G_p \subset I(M)$, $p \in M$ fix, kompakte Untergruppen sind. Tatsächlich sind sie auch noch *maximal* mit dieser Eigenschaft, d.h. falls $K \subset I(M)$ irgendeine kompakte Untergruppe, so ist K konjugiert zu einer Untergruppe von K_p . Dies gilt für jeden symmetrischen Raum, wir wollen es hier aber nur für den Spezialfall $M = P(n, \mathbb{R}) = SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ zeigen.

Beweise also: Sei $K \subset SL(n, \mathbb{R})$ kompakte Untergruppe. Dann existiert ein $g \in SL(n, \mathbb{R})$ so dass $g^{-1}Kg \subset SO(n)$.

Hinweise :

- Der Orbit eines Punktes unter einer kompakten Gruppe ist kompakt, daher beschränkt.
- In einem $CAT(0)$ -Raum hat jede beschränkte Menge ein eindeutiges Zentrum p . Dass $SL(n)/SO(n)$ $CAT(0)$ ist, werden wir in der VL sehen.
- Wohin wird p unter K abgebildet?
- Der Stabilisator von $I \in P(n, \mathbb{R})$ ist $G_I = SO(n)$. Und allgemein $G_{g \cdot p} = gG_p g^{-1}$.
- Finde geeignetes g , so dass $K \subset gSO(n)g^{-1}$.

Aufgabe 19 (Iwasawa Zerlegung von $G = I_0(M)$, 2 Punkte)

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Isometriegruppe G ist, dass sie zerfällt in das direkte Produkt

$$G = KAN,$$

einer *kompakten* Untergruppe K , einer *abelschen* Untergruppe A und einer *nilpotenten* Untergruppe N . Mit anderen Worten kann man jedes $g \in G$ eindeutig schreiben als $g = kan$ mit $k \in K, a \in A, n \in N$.

Für den Fall $G = SL(n, \mathbb{R})$, zeige, dass sich G zerlegt in $G = KAN$ mit $K = SO(n)$, $A = \{\text{Diagonalmatrizen mit } \det = 1\}$, $N = \{\text{obere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale}\}$.

Hinweis : Gram-Schmidt, QR -Zerlegung.

Blatt 8

Aufgabe 20 (Mehr über Wurzelsysteme, 3 Punkte)

Sei \mathfrak{g} eine Lie Algebra auf der die Killing Form B nicht ausgeartet ist (eine solche Lie Algebra nennt man "halbeinfach").

Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ und \mathfrak{a} ein maximal abelscher Unterraum von \mathfrak{p} . Es bezeichne \mathfrak{a}^* den Dualraum des Vektorraumes \mathfrak{a} und $\mathfrak{g}^\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}A(X) = \alpha(A)X \text{ for all } A \in \mathfrak{a}\}$. $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ heisst "Wurzel" falls $\mathfrak{g}^\alpha \neq \emptyset$, $\Lambda \subset \mathfrak{a}^*$ bezeichnet die Menge der Wurzeln. Λ ist endlich, nicht leer und

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Weiter haben wir zu jedem $\alpha \in \lambda$ einen Vektor $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ definiert durch $\alpha = \langle \cdot, H_\alpha \rangle$.

1. Zeige, dass eine halbeinfache Lie Algebra \mathfrak{g} triviales Zentrum hat (das Zentrum $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ sind alle $X \in \mathfrak{g}$ so dass $[X, Y] = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{g}$).
2. Zeige, dass die H_α ganz \mathfrak{a} aufspannen, i.e. $\mathfrak{a} = \text{span}\{H_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$.

Hinweis : Nimm einen Vektor $A \in \mathfrak{a}$ der senkrecht (B ist ein SKP auf \mathfrak{a}) auf $\text{span}\{H_\alpha\}$ steht. Folgere $\text{ad}A \equiv 0$ und verwende 1.

Aufgabe 21 (Die Weyl Gruppe, Weyl Kammern, 5 Punkte)

Nach 1 2 spannen die H_α ganz \mathfrak{a} auf. Mit einigem Aufwand kann man zeigen, dass die Lage der H_α im Raum sehr schön sind. Explizit: Sei S_α die Spiegelung in \mathfrak{a} an der Hyperebene senkrecht zu H_α .

$$S_\alpha(A) := A - \frac{2 \langle H_\alpha, A \rangle}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle} H_\alpha$$

Dann gilt, dass S_α die Wurzelvektoren permutiert.

Die Gruppe erzeugt von $\{S_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ ist eine Spiegelungsgruppe auf \mathfrak{a} deren Elemente Wurzelvektoren auf Wurzelvektoren abbilden. Diese Gruppe nennt man *Weyl-Gruppe* W . Die Spiegelhyperebenen zerschneiden \mathfrak{a} in verschiedene Zusammenhangskomponenten, die *Weyl Kammern*.

1. Beschreibe die Weyl Kammern und die Weyl Gruppe für den Fall $SL(3)/SO(3)$ (alles nötige wurde in der VL erarbeitet) \mathfrak{a} ist hier 2-dimensional.
2. Versuche zu verallgemeinern und die Weyl Gruppe für $SL(n)/SO(n)$ zu beschreiben. Zu welcher bekannten Gruppe ist sie isomorph? Die Wurzelraumzerlegung hatten wir in der letzten Serie erarbeitet, \mathfrak{a} ist hier $(n - 1)$ -dimensional.
3. Ein Element $A \in \mathfrak{a}$ heisst *regulär* falls es in keiner der Spiegelebenen S_α liegt. Für den Fall $SL(n)/SO(n)$ hatten wir als \mathfrak{a} die Menge der Diagonalmatrizen (mit Spur 0). Wann ist so ein Element $A \in \mathfrak{a}$ regulär?

Blatt 9

Aufgabe 22 ($P_2^*(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^2$, 3 Punkte)

Wir hatten $P_2^*(\mathbb{R})$ charakterisiert als die Menge aller 2×2 -Matrizen von der Form

$$\begin{pmatrix} x + iy & it \\ it & x - iy \end{pmatrix} \quad \text{mit } x, y, t \in \mathbb{R}$$

und die Abbildung

$$\Theta : P_2^*(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}^2 \\ \begin{pmatrix} x + iy & it \\ it & x - iy \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$$

erklärt.

Zeige, dass Θ eine Homothetie ist..

Aufgabe 23 (Abelsche und nilpotente Lie Gruppen und -Algebren, 4 Punkte)

Wir haben folgende

Definition 4

Eine Lie Algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ heisst *abelsch*, falls $[X, Y] = 0 \forall X, Y \in \mathfrak{g}$. Sie heisst *nilpotent* falls für alle $X \in \mathfrak{g}$ ein n existiert mit $(\text{ad}_X)^n \equiv 0$.

Nenne eine Lie Gruppe G *abelsch* respektive *nilpotent* falls die zugehörige Lie Algebra \mathfrak{g} diese Eigenschaft hat.

Zeige, dass zusammenhängenden Lie Gruppen dann auch abelsch, resp. nilpotent, im üblichen Sinn für Gruppen sind, d.h.

1. Sei G eine zusammenhängende Lie Gruppe mit \mathfrak{g} abelsch im Sinne der obigen Definition. Dann gilt $gh = hg \forall g, h \in G$.
2. Sei G eine zusammenhängende Lie Gruppe mit \mathfrak{g} nilpotent im Sinne der obigen Definition. Dann ist G als abstrakte Gruppe nilpotent, sprich G hat eine endliche Normalreihe

$$G = A_0 \triangleright A_1 \triangleright \dots \triangleright A_r = 1$$

mit A_{i-1}/A_i im Zentrum von G/A_i .

Hinweise :

- Verwende Campbell-Baker-Hausdorff um zu zeigen, dass $\exp(\mathfrak{g}) \leq G$ Untergruppe ist.
- Zeige $\exp(\mathfrak{g}) \leq G$ ist *offene* Untergruppe.
- Zeige, dass eine offene Untergruppe immer auch abgeschlossen ist. Folgere $\exp(\mathfrak{g}) = G$.
- Verwende wieder Campbell-Baker-Hausdorff um die jeweiligen Eigenschaften von \mathfrak{g} auf $\exp(\mathfrak{g})$ zu übertragen. Teil 1 ist einfach, für 2 betrachte folgende Idealreihe von \mathfrak{g} ;

$$\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^i := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}].$$

Weil \mathfrak{g} nilpotent ist existiert p so, dass $\mathfrak{g}^p = \{0\}$.

Aufgabe 24 (Flachs und Geodäten, 3 Punkte)

Eine wichtige Eigenschaft symmetrischer Räume ist die Existenz von Untermannigfaltigkeiten die flach sind, d.h. isometrisch zu \mathbb{R}^l für ein l . Wie gross dieses l sein kann steht in direktem Zusammenhang mit maximal abelschen Unterräumen von \mathfrak{a} , s. Serien 7 und 8. In der Tat gilt $l = \dim \mathfrak{a}$.

Folgende zwei Tatsachen werden wohl in Kürze in der VL behandelt und dürfen hier als gegeben angenommen werden.

- Seien $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ wie üblich und $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}$ zwei maximal abelsche Unterräume. Es gibt dann ein $k \in K$ so dass $\text{Ad}(k)(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}'$. Insbesondere haben also alle maximal abelschen Unterräume dieselbe Dimension!
- Wir hatten gesehen, dass alle Geodäten in M durch $p \in M$ von der Form $t \mapsto \exp(tX) \cdot p$ sind. Allgemeiner hat man, dass wenn $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$ irgendein Unterraum ist, so ist $\exp(\mathfrak{h}) \cdot p$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\dim \mathfrak{h}$.

1. Benutze diese zwei Punkte und die Formel für den Krümmungstensor um zu zeigen, dass jeder Punkt $p \in M = SL(n)/SO(n)$ in einer $(n - 1)$ -dimensionalen flachen Untermannigfaltigkeit von M liegt.
2. Zeige dass allgemeiner sogar jede maximale Geodäte $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ komplett in so einem $(n - 1)$ -Flach enthalten ist.

Blatt 10

Aufgabe 25 (Flachs haben eindeutige Ränder, 3 Punkte)

In der VL wurde erläutert, dass mehrere (maximale) Flachs in $SL(n)/SO(n)$ eine Weyl-Kammer im Unendlichen gemeinsam haben können (es gibt sogar unendlich viele solche Flachs). Zeige aber folgendes:

Seien A_1, A_2 zwei (maximale) Flachs in $SL(n)/SO(n)$ mit $\partial A_1 = \partial A_2$. Dann $A_1 = A_2$.

Hinweis : Nimm $\xi \in \partial A_1 = \partial A_2$ und reguläre Geodäten $c_1 \subset A_1, c_2 \subset A_2$ mit $c_i(\infty) = \xi$. Argumentiere mit metrischer Geometrie, dass $c_1 \equiv c_2$ und folgere daraus $A_1 = A_2$.

Aufgabe 26 (Operation von $I_0(M)$ auf $\partial SL(n)/SO(n)$, 1 Punkt)

Wir wissen schon lange, dass $I_0(M)$ transitiv auf $SL(n)/SO(n)$ operiert. Da Isometrien Geodäten in Geodäten überführen erweitert sich diese Operation in natürlicher Weise auf eine Operation auf dem Rand im Unendlichen. Ist diese Operation transitiv? Warum? Oder warum nicht?

Aufgabe 27 (Das einfachste nicht-triviale dicke sphärische Gebäude, 5 Punkte)

Sei \mathbb{F}_2 der Körper mit 2 Elementen. Betrachte den kanonischen 3-dimensionalen \mathbb{F}_2 -Vektorraum \mathbb{F}_2^3 . Die Kammern sind maximale Fahnen $V_1 \subset V_2$ wobei $V_2 \subset \mathbb{F}_2^3$ ein Unterraum der Dimension i . Wir haben zwei Inzidenzen. Sagen wir zwei Kammern sind 1-inzident, falls sie einen Unterraum der Dimension 1 gemeinsam haben und 2-inzident, falls sie einen Unterraum der Dimension 2 gemeinsam haben.

Zeige, dass dieser simpliziale Komplex die Struktur eines sphärischen Gebäudes vom Rang 2 trägt (die Kammern sind also Simplizes der Dimension 1, und zwei inzidente Kammern treffen sich in einem 0-Simplex. Dies ist nichts anderes als ein Graph). Wieviele Kammern gibt es? Wieviele Apartments?

Index

Symbols

M_K -simplicialer Komplex	54
$\mathbb{C}P^n$	3
$\Sigma(W, S)$	53
f -verwandt	7

A

abelsch	11
abstrakter simplicialer Komplex	54
affines Gebäude	55
Apartments	54
Appartments	46
asymptotisch	49

B

biinvariant	17
Bruhat-Zerlegung	50

C

Cartan Involution	24
Coxeter Gruppe	52

D

dual	40
------	----

E

Ein-Parameter Gruppe	14
----------------------	----

F

Fahne	55
Faserung	4
fast komplexe Struktur	8
Flach	46
punktirtes	47

G

Gebäude	46, 54
affines	55
hyperbolisches	55
sphärisches	55
Gebäude Struktur	46
geodätische Spiegelung	20
geodätisches n -Simplex	53
Grassmann-Mannigfaltigkeit	55

H

holomorph	8
homogen	23
Hopf-Faserung	3
Horizontalraum	4
hyperbolisches Gebäude	55

I

irreduzibel	46
-------------	----

J

Jacobi-Feld	22
-------------	----

K

Kammern	46
Killing-Form	32
komplex projektiver Raum	3
komplexe Mannigfaltigkeit	8

L

Lie Gruppe	10
Lie-Algebra	11
abelsch	11
Lie-Algebra Homomorphismus	11
linksinvariant	10, 17
lokal symmetrisch	20

M

Menge der Simplices 54

P

parallel 21

poset 53

punktiertes Flach 47

R

Rang 48

rechtsinvariant 17

regulär 48

Riemannsche Metrik

 biinvariant 17

 linksinvariant 17

 rechtsinvariant 17

Riemannsche Submersion 4

S

simplicialer Komplex 54

M_K 54

 abstrakter 54

singulär 48

singuläre Hyperebenen 38

spezielle Untergruppe 53

sphärisches Gebäude 55

Standard Restklassen 53

symmetrisch 20

 lokal 20

Symmetrischer Raum

 irreduzibel 46

 kompakt 46

 nichtkompakter Typ 46

 Rang 48

T

Tits-Metrik 57

Transvektionen 23

V

Vertikalraum 4

W

Weylgruppe 50

Weylkammern 38, 43

Wurzel 37

Wurzelraum 38