

Vergleich numerischer Methoden für stationäre Konvektions-Diffusionsprobleme

Diplomarbeit

ausgeführt unter der Leitung von
Prof. S. Sauter und Dr. A. Smolianski
am Institut für Mathematik der Universität Zürich

3.10.2005

Christian Wüst

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Problemstellung und Zielsetzung	3
1.2	Gliederung	4
2	Die Konvektions-Diffusionsgleichung	5
2.1	Theoretische Grundlagen	5
2.2	Die Konvektions-Diffusionsgleichung	8
2.3	Anwendungen	8
2.4	Lineare Finite Elemente	10
3	Die Methoden: Einführung und Konvergenzanalyse	16
3.1	Einleitung	16
3.2	Standard-Galerkin FEM	18
3.3	Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin (SUPG)	24
3.4	Residual-Free Bubbles (RFB)	36
3.5	Exponentiell angepasste Basisfunktionen	43
3.6	Anisotrope Gitter / Shishkin-Gitter	46
3.7	A-posteriori Verfeinerung	55
4	Aufwand der Methoden	64
4.1	Rechenzeit	64
4.2	Implementierungsaufwand	65
5	Numerischer Vergleich der Methoden	67
5.1	Modellproblem A: Problem Rand-Grenzschicht-2D	70
5.2	Modellproblem B: Rotating Flow	74
6	Fazit	80
6.1	Zusammenfassung aller Eigenschaften	80
6.2	Zusammenfassende Bewertung der Verfahren:	82
6.3	Anleitung zur Verwendung der Verfahren	84

7	Anhang: Die Software	85
7.1	Installation	85
7.2	Features	87
7.3	Ein Problem nachrechnen	90
7.4	Matlab	91
7.5	Grenzen der Software	91
7.6	Ausbau der Software	92

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung und Zielsetzung

Konvektions-Diffusions-Probleme der Form

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u + b(x) \cdot \nabla u &= f(x) \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u_B \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei $0 < \varepsilon \ll 1$ der Diffusionsparameter und $b(x)$ die Konvektionsfunktion ist, spielen eine sehr wichtige Rolle in der Modellierung aktueller physikalischer und ökonomischer Prozesse. Speziell natürliche Massen- und Temperatur-Transport-Probleme, sowie Flussprobleme von Flüssigkeiten um feste Körper können auf Konvektions-Diffusions-Probleme zurückgeführt werden.

Im Fall $\varepsilon \ll |b|$ nimmt die Konvektions-Diffusionsgleichung hyperbolischen Charakter an. Die Lösung der Standard-Galerkin Finite-Elemente Methode weist in den Grenzschichten unphysikalische Oszillationen auf. Diese Grenzschichten treten je nach Problem in der Nähe von Teilen des Gebietrandes oder im inneren des Gebietes auf. Mittlerweise gibt es zahlreiche Ansätze, solche Probleme zu stabilisieren: Als erste einsatzfähige Technik gilt das um 1980 von Hughes entwickelte *streamline-upwind Petrov-Galerkin* (SUPG) Verfahren. Weitere Ansätze lieferten ähnlich gute Resultate, wie die Methode der *residual-free bubbles* und die *exponentiellen Basisfunktionen*. Beide Verfahren stehen in engem Zusammenhang zu SUPG. Es bleibt stets im Auge zu behalten, dass sich diese Techniken ausschliesslich mit dem konvektionsdominierten Fall auseinandersetzen. Dominiert der Diffusionsterm, ist die Standard-Galerkin Finite-Elemente Methode jeglichen Upwind-Methoden vorzuziehen. Daneben gibt es Ansätze, welche die Gittergeometrie in den Grenzschichten anpassen. Wir betrachten anisotrope Gitter, die a-priori die Problembereiche anpassen und eine a-posteriori Gitterverfeinerung, die mithilfe eines Gradienten-Fehlerindicators verfeinert. Das erste Ziel der Arbeit ist die Analyse all dieser Methoden. Danach wird durch Vergleiche zwischen den Methoden eine Übersicht erstellt, in welchem Fall welche Methode empfohlen werden kann. Je nach Anwendung stehen unterschiedliche Aspekte im Vordergrund, welche durch differenzierte Fragestellungen unterschiedliche Empfehlungen nach sich ziehen.

1.2 Gliederung

In *Kapitel 2* werden allgemeine Resultate zum kontinuierlichen Problem angegeben, die als Grundlage zur folgenden Theorie dienen. Im Zentrum steht der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für schwache Lösungen. Dann wird konkret Bezug auf das zweidimensionale Konvektions-Diffusions-Problem genommen und Anwendungen angegeben. Im weiteren wird die Standard-Galerkin Finite-Elemente Methode mit linearen Elementen eingeführt und dabei die Problematik dieser Methode im Zusammenhang mit Konvektions-Diffusionsgleichungen aufgezeigt.

In *Kapitel 3* werden die Stabilisierungstechniken vorgestellt. In der Theorie werden nach Möglichkeit bereits Vor- und Nachteile hervorgehoben. Anhand eines Modellproblems werden in einer und in zwei Dimensionen numerische Resultate mit den theoretischen Abschätzungen verglichen.

In *Kapitel 4* wird der Aufwand der Verfahren verglichen. Neben dem Vergleich der CPU-Zeiten wird auch der Implementierungsaufwand besprochen.

Anhand zweier Modellprobleme werden in *Kapitel 5* absolute Fehler verglichen. Der Fokus liegt dabei auf dem Typ der Grenzschicht: Ein Problem befasst sich mit Rand-Grenzschichten, das andere mit inneren Grenzschichten. So werden die Methoden auf Robustheit bezüglich der Problemstellung getestet.

Als Resultat der Arbeit wird in *Kapitel 6* eine Übersicht der Eigenschaften der Verfahren gegeben. Damit lässt sich eine fundierte Empfehlung geben, bei welcher Problemstellung welches Verfahren einzusetzen ist.

Im *Anhang* wird die entwickelte Software präsentiert und erklärt.

Kapitel 2

Die Konvektions-Diffusionsgleichung

2.1 Theoretische Grundlagen

Wir widmen uns zuerst dem allgemeinen Fall. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ eine offene beschränkte Menge mit Lipschitz-Rand $\Gamma := \partial\Omega$ und äusserem Einheitsnormalenfeld n . Die allgemeine lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Form

$$-\operatorname{div} A \nabla u + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{in } \Omega \quad (2.1)$$

Dabei ist $f \in L^2(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $0 < c_0 \leq c(x) \leq C_0 < \infty$ f.ü., $b \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $A \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{d \times d})$ mit $A(x) = A^T(x)$ für alle $x \in \Omega$ und

$$0 < \lambda_0 := \inf_{x \in \Omega} \sup_{z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{z^T A(x) z}{z^T z} \leq \sup_{x \in \Omega} \sup_{z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{z^T A(x) z}{z^T z} =: \Lambda_0 < \infty \quad (2.2)$$

Wir versehen diese allgemeine Gleichung mit Randwerten. Dazu seien die folgenden Randbedingungen aufgeführt

- Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen: $u = u_D$ auf $\Gamma = \overline{\Omega}$, wobei u_D eine gegebene, stetige Funktion sei. Im Fall $u_D \equiv 0$ spricht man von homogenen Dirichlet-Randbedingungen.
- Homogene Neumann-Randbedingungen: $\langle An, \nabla u \rangle = 0$ auf Γ
- Gemischte Dirichlet-Neumann-Randbedingungen: $u = u_D$ auf Γ_D und $\langle An, \nabla u \rangle = 0$ auf Γ_N

Für den Fall der gemischten Randbedingungen muss natürlich $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ und $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$ gelten. Bei gemischten Randbedingungen fordern wir ausserdem, dass Γ_D ein positives $(d-1)$ -dimensionales Mass hat.

Definition 2.1. Sei $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ das innere Produkt.

- $u \in u_D + H_0^1(\Omega)$ heisst schwache Lösung der Differentialgleichung (2.1) mit Dirichlet-Randbedingungen, wenn gilt

$$\underbrace{(A\nabla u, \nabla v) + (b \cdot \nabla u, v) + cuv}_{a(u,v)} = \underbrace{(f, v)}_{l(v)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

- Sei $H_D^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$. Dann heisst $u \in u_D + H_D^1(\Omega)$ schwache Lösung der Differentialgleichung (2.1) mit gemischten Randbedingungen, wenn gilt

$$\underbrace{(A\nabla u, \nabla v) + (b \cdot \nabla u, v) + cuv}_{a(u,v)} = \underbrace{(f, v)}_{l(v)} \quad \forall v \in H_D^1(\Omega).$$

Das Randintegral über den Neumann-Rand verschwindet für homogenen Neumann-Rand.

Satz 2.2 (Existenz- und Eindeutigkeit für schwache Lösungen). *Unter den oben eingeführten Bezeichnungen unterscheidet man die folgenden Fälle.*

- (1) *Ist $-\frac{1}{2} \operatorname{div} b + c \geq 0$, so besitzt die Differentialgleichung (2.1) mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen eine eindeutige schwache Lösung.*
- (2) *Ist $-\frac{1}{2} \operatorname{div} b + c \geq 0$ und $\langle b, n \rangle$ auf Γ_N , so besitzt die Differentialgleichung (2.1) mit gemischten Randbedingungen eine eindeutige schwache Lösung.*
- (3) *Ist $c \geq c_0 > 0$, $-\frac{1}{2} \operatorname{div} b + c \geq 0$ und $\langle b, n \rangle \geq 0$ auf Γ , so besitzt die Differentialgleichung (2.1) mit Neumann-Randbedingungen eine eindeutige schwache Lösung.*

Beweis. Wir beweisen nur (1). Betrachten wir zunächst die rechte Seite. Das Funktional $l(v)$ ist linear. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$|l(v)| = \|(f, v)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Damit ist das Funktional $l(v)$ linear und stetig auf $H^1(\Omega)$. Die Bilinearform $a(u, v)$ teilen wir in zwei Teile

$$\underbrace{(A\nabla u, \nabla v) + cuv}_{a_0(u,v)} + \underbrace{(b \cdot \nabla u, v)}_{a_1(u,v)}.$$

Sei λ_0 wie in (2.2). Die Bilinearform $a_0(u, v)$ ist symmetrisch. Wegen $c \geq 0$ und der Friedrichs-Ungleichung gilt

$$a_0(u, u) = (A\nabla u, \nabla u) + (cu, u) \geq \lambda_0 |u|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \lambda_0 c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Damit ist $a_0(u, v)$ auf $H^1(\Omega)$ auch koerziv. Die Stetigkeit auf $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ folgt durch

$$\begin{aligned} |a_0(u, v)| &\leq \Lambda_0 |u|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)} + \|c\|_\infty \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max\{\Lambda_0, \|c\|_\infty\} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Genauso ist die Bilinearform $a_1(u, v)$ stetig, denn es gilt

$$|a_1(u, u)| \leq \|b\|_\infty \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|b\|_\infty \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mit der Beziehung

$$\operatorname{div}(u^2 b) = b \cdot \nabla(u^2) + u^2(\operatorname{div}(b)) \quad (2.3)$$

und dem Gausschen Integralsatz folgt

$$\begin{aligned} a(u, u) &= (A \nabla u, \nabla u) + (b \cdot \nabla u, u) + (cu, u) \\ &\geq \lambda_0 |u|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} b \cdot \nabla(u^2) + cu^2 \right) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \lambda_0 |u|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} \operatorname{div}(b) + c \right) u^2. \end{aligned}$$

Falls $-\frac{1}{2} \operatorname{div}(b) + c \geq 0$ ist die Bilinearform a koerziv auf $H^1(\Omega)$. Unter den gezeigten Eigenschaften von a und l folgt die Eindeutigkeit aus einer für unsymmetrische Probleme angepassten Version von Lax-Milgram. \square

2.2 Die Konvektions-Diffusionsgleichung

In dieser Arbeit verwenden wir die zweidimensionale Konvektions-Diffusionsgleichung als Modellproblem:

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u + b(x) \cdot \nabla u &= f(x) \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u_B \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei $0 < \varepsilon \ll 1$ der Diffusionsparameter ist und $b(x)$ die Konvektionsfunktion. Dies ist die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{in } \Omega \tag{2.5}$$

mit $A = \varepsilon \cdot \operatorname{Id}_2$ und $c = 0$. Damit ist das Problem elliptisch. Das hinreichende Kriterium zur Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sieht für (2.5) nach Satz (2.2) wie folgt aus

$$-\frac{1}{2}\operatorname{div}(b) \geq 0$$

Für konstante Vektoren b ist diese Bedingung immer erfüllt. Die zugehörige schwache Formulierung lautet damit

$$\underbrace{\varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (b \cdot \nabla u, v)}_{a(u,v)} = \underbrace{(f, v)}_{l(v)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Bemerkung 2.3. Die Bilinearform a ist nicht symmetrisch. Damit erhalten wir auch keine symmetrische Systemmatrix, was für die Wahl des Löseres wesentlich ist.

2.3 Anwendungen

Um die Vielfältigkeit von Anwendungen, die auf Konvektions-Diffusionsprobleme führen, zu verdeutlichen, seien einige konkrete Beispiele explizit erwähnt:

- Gleichungen

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u + b(x) \cdot \nabla u &= f(x) \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u_B \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.6}$$

treten im Zusammenhang mit Molekular- und Wärmetransporten auf. Man stelle sich beispielsweise einen starken, regelmässig fließenden Fluss vor. Nun strömt an einer bestimmten Stelle eine flüssige Verschmutzung in den Fluss. In welcher Form bewegt sich die Verschmutzung nun an der Flussoberfläche? Zwei physikalische Phänomene können beobachtet werden: Einerseits diffundiert die Verschmutzung gleichmässig in alle Richtungen, wobei die Stärke der Diffusion durch den Parameter $\varepsilon > 0$ gegeben ist. Der dominante Teil der Bewegung ist die Konvektion $b(x)$ flussabwärts, m.a.W. die Geschwindigkeit, mit der die Verschmutzung flussabwärts transportiert wird. Die Konzentration der Verschmutzung u ist dann Lösung der Gleichung (2.6).

- Die Kontinuitäts-Gleichung für Elektronen in einem stationär skalierten Model eines eindimensionalen Halbleiters. Unter einigen Vereinfachungen gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial}{\partial x} (\psi + \log u) \right] = 0$$

wobei die gesuchte Funktion $u(x)$ die Elektronenkonzentration und $\psi(x)$ das zuvor bereits berechnete elektrostatische Potential ist. Nun ist bei solchen Problemen der Ausdruck $\partial\psi/\partial x$ sehr gross im Vergleich zum Diffusionsterm $\partial^2 u/\partial^2 x$. Damit haben wir ein Konvektions-Diffusions-Problem (siehe [24]).

- Die stationäre, inkompressible Navier-Stokes-Gleichung

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u + \langle u, \nabla \rangle u + \nabla p &= f \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dabei sei $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Der Diffusions-Parameter $\nu > 0$ bezeichnet die Viskosität (Zähigkeit). Keine Probleme machen Flüssigkeiten, deren Zähigkeit kaum ins Gewicht fällt. Für kleine Parameter ν haben wir ein Konvektions-Diffusions-Problem (siehe [24]).

- Financial Modelling: Das Black-Scholes model.
Sei V der Wert einer Aktien-Option als eine Funktion der darunterliegenden Anlagepreises S in einer Zeit t gegeben durch

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 S} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

wobei σ die Sprunghaftigkeit der Anlage und r die Interessensrate ist. Auch in diesem Beispiel kann der konvektive Effekt (financial drift) dominant gegenüber dem Preis S werden, was wiederum auf ein Konvektions-Diffusions-Problem führt (siehe [21]).

2.4 Lineare Finite Elemente

Eindimensional

Wir wählen zunächst eine uniforme Diskretisierung auf $I := [0, 1]$. Sei N die Anzahl der Teilintervalle $K_i =]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, \dots, N$ mit

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \quad h = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, N\}.$$

Nun soll auf diesem Intervall I mit stückweise linearen finiten Elementen approximiert werden. Der natürliche Umgang auch mit nicht-uniformen Unterteilungen des gegebenen Gebietes ist einer der grossen Vorteile von Finite-Elemente Methoden gegenüber Finite-Differenzen Methoden.

Wir befassen uns zunächst mit der Standard-Galerkin Finite-Elemente-Methode, d.h. der Raum der Ansatzfunktionen und der Raum der Gewichtsfunktionen sind identisch. Zur Konstruktion einer stückweise linearen Basis definiert man

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Dabei bezeichnet i , $1 \leq i \leq N$ den i -ten globalen Freiheitsgrad. Für die Funktionen ϕ_i , $1 \leq i \leq N$ gilt offensichtlich die Lagrange-Eigenschaft

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Auf jedem Element K_i sind genau die zwei Basisfunktionen ϕ_{i-1} und ϕ_i von Null verschieden. Man zeigt leicht, dass die Basisfunktionen ϕ_i , $i = 1 \dots N$, den Raum der stückweise linearen, stetigen Funktionen auf \mathcal{G} erzeugen, konkret

$$V_h^{(1)} = \{u \in H_D^1 \mid \forall K \in \mathcal{G} : u|_K \in \mathbb{P}_1\} = \text{span}(\phi_i, i = 1, \dots, N).$$

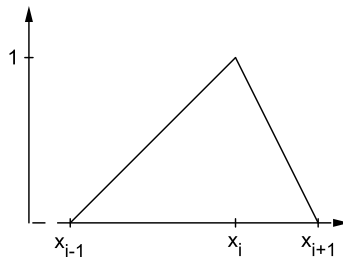


Abbildung 2.1: Die stückweise lineare Basisfunktion in einer Dimension zum i -ten Freiheitsgrad

Die schwache Formulierung zum eindimensionalen kontinuierlichen Problem (2.5) lautet: Finde $u \in V_h^{(1)}$ so dass

$$\int_0^1 (\varepsilon u'v' + b(x)u'v) dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in V_h^{(1)}.$$

Es genügt, die obige Gleichung für alle Basisfunktionen ϕ_i , $i = 0, \dots, N$ zu betrachten. Damit haben wir pro Freiheitsgrad eine Gleichung. Die Zerlegung $u(x) = \sum_{j=0}^N x_j \phi_j$ liefert ein lineares Gleichungssystem für den unbekanntem Koeffizientenvektor $x = (x_j)_{j=1}^N$. Der Lösungsvektor dieses Systems beinhaltet die Koeffizienten zu den Basisfunktionen. Im Fall einer Lagrangebasis (Basisfunktionen erfüllen die Eigenschaft (2.9)) sind das zugleich die Funktionswerte in den Knotenpunkten.

Beispiel 2.4. Sei das folgende eindimensionale Konvektions-Diffusionsproblem gegeben:

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + u' = 1 & \text{in }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Die exakte Lösung lautet

$$\eta(x) = \frac{x}{b} - \frac{e^{\frac{bx}{\varepsilon}} - 1}{b \left(e^{\frac{bx}{\varepsilon}} - 1 \right)}$$

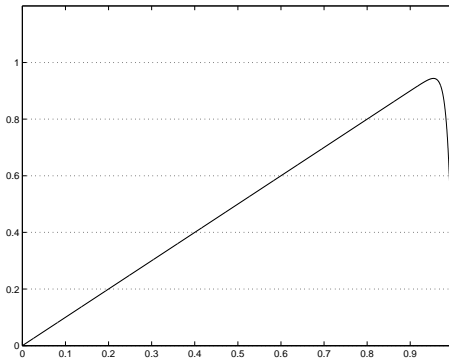


Abbildung 2.2: Die exakte Lösung von (2.10) mit $\varepsilon = 0.01$. Der kritische Bereich ist die Rand-Grenzschicht der Breite $O(\varepsilon)$ bei $x = 1$.

In diesem speziellen eindimensionalen Problem lässt sich das Gleichungssystem explizit angeben. Es ist

$$Mu = y$$

zu lösen, wobei gilt

$$\begin{aligned} M &:= \text{tridiag} \left(-\frac{\varepsilon}{h} - \frac{b}{2}, \frac{2\varepsilon}{h}, -\frac{\varepsilon}{h} + \frac{b}{2} \right) \\ y &:= (h, \dots, h) \\ u &:= \{u_h(x_j)\}_{j=1, \dots, N-1} \end{aligned}$$

Die Lösung dieses LGS lässt sich explizit angeben.

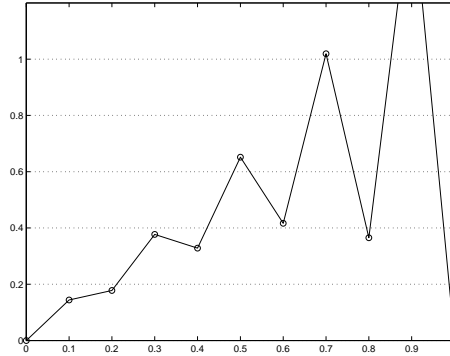


Abbildung 2.3: Die Standard-Galerkin Lösung von (2.10) mit $\varepsilon = 0.01$. Die unphysikalischen Oszillationen in der Umgebung der Rand-Grenzschicht beeinflussen die Lösung auf dem gesamten Gebiet und machen die Lösung unbrauchbar.

Definition 2.5. Wir definieren die dimensionslose (Gitter-) Péclet-Zahl als

$$\text{Pe} := \frac{\|b\|_{\infty} h}{\varepsilon} \quad (2.11)$$

Der Fall $\text{Pe} < 2$ stellt dabei im Allgemeinen sicher, dass die diskrete Lösung keine Oszillationen mehr aufweist. Unser Interesse gilt dem konvektionsdominierten Fall $\text{Pe} > 2$. Meist ergeben sich stark konvektionsdominierte Probleme durch kleine Werte für ε . Realistische Parameter für die Anwendung fallen in den Bereich $\varepsilon \in [1E-1, 1E-6]$. In der Literatur wird die Péclet-Zahl häufig noch mit einem Faktor $\frac{1}{2}$ skaliert, was den Übergang von Konvektions- zu Diffusionsdominanz von $\text{Pe} = 2$ auf $\text{Pe} = 1$ verschiebt.

Für eindimensionale Probleme kann man die diskrete Lösung konkret angeben (vgl. [23]). Darin treten Terme der Form

$$\frac{1 + c\text{Pe}}{1 - c\text{Pe}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

auf, die im konvektionsdominierten Fall ($\text{Pe} > 2$) unphysikalische Oszillationen hervorrufen (vgl. Abb.2.3). Für feste Parameter ε und b ist es dadurch immer möglich für ein uniformes Gitter die Schrittweite h so klein zu wählen, dass man die Oszillationen wegen $\text{Pe} \leq 2$ eliminieren kann. Das ist in der Praxis bei sehr kleinen Werten für ε im Vergleich zu b kaum möglich, da die Rechenleistung begrenzt ist.

Zweidimensional: Lineare Dreieckselemente

Zur Diskretisierung in zwei Dimensionen setzen wir lineare Dreieckselemente ein. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes, beschränktes Gebiet mit polygonalem Rand. Das Gebiet werde unter den gewohnten Zulässigkeitsbedingungen in ein Gitter \mathcal{G} zerlegt (Triangulierung). Für jedes

Dreieck $K \in \mathcal{G}$ seien h_K die längste Seite und ρ_K der Durchmesser des grössten einbeschriebenen Kreises. Die Triangulierung heisst form-regulär, wenn eine moderate Konstante $c_{\mathcal{G}}$ existiert mit

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq c_{\mathcal{G}} \tag{2.12}$$

Diese Bedingung verhindert das Auftreten von sehr schmalen (degenerierten) Dreiecken. Als Mass für die Feinheit des Gitters führen wir noch die Gitterweite

$$h := \max_{K \in \mathcal{G}} h_K$$

ein. Sei

$$V_h^{(1)} = \{ u \in H_D^1 \mid \forall K \in \mathcal{G} : u|_K \in \mathbb{P}_1 \}$$

der Finite-Elemente Raum. Die Dreiecke $K \in \mathcal{G}$ seien abgeschlossen. Analog zum eindimensionalen Fall konstruieren wir eine elementweise lineare Basis $\{\phi_i\}_{i=1..N}$ von $V_h^{(1)}$ mit der Lagrange-Eigenschaft

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf jedem Dreieck K definieren wir drei Basisfunktionen. Seien $x_i, i = 1, 2, 3$ die Eckpunkte des Dreiecks K . Wir setzen

$$\lambda_{K,i}(x) := \frac{\det(x_{i+1}^K - x, x_{i-1}^K - x_{i+1}^K)}{\det(x_{i+1}^K - x_i, x_{i-1}^K - x_{i+1}^K)} \quad i = 1, 2, 3.$$

Es ist klar, dass diese Funktionen auch

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_{K,i} = 1$$

erfüllen. Zu einem Knoten x_i wird die globale Basisfunktion ausserhalb der angrenzenden Dreiecke durch die Nullfunktion fortgesetzt. Dazu sei

$$\omega_i = \cup_{K \in \mathcal{G}, x_i \in K}$$

und schliesslich

$$\phi_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \omega_i \\ \lambda_{K,i} & \text{falls } x \in K \subset \omega_i \text{ und } x_i = x_j^K \end{cases}$$

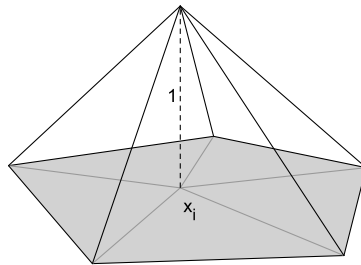


Abbildung 2.4: Die globale Basisfunktion ϕ_i zum Knoten x_i

Das Gebiet ω_i entspricht genau dem Träger von ϕ_i (gefärbter Bereich in Abb.2.4). Es gilt $V_h = \text{span}\{\phi_i, i = 1, \dots, N\}$. Das weitere Vorgehen ist analog zu den linearen Elementen in einer Dimension.

Zur entwickelten Standard-Galerkin Methode mit linearen Dreieckselementen beweisen wir folgende globale H^1 - und L^2 -Fehlerabschätzungen:

Satz 2.6. *Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Die Lösung des diskreten Problems wird mit u_h bezeichnet. Sei $u \in H^2(\Omega)$. Dann gilt*

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 h |u|_{H^2(\Omega)}. \quad (2.13)$$

Ist zusätzlich Ω konvex, so gilt

$$|u - u_h|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 h^2 |u|_{H^2(\Omega)}. \quad (2.14)$$

Die Konstanten c_1, c_2 hängen nur von c_G, Ω und den Koeffizienten in der Differentialgleichung c und A ab.

Beweis. Wir beweisen nur (2.13). Nach dem Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes ist a koerziv mit Konstante λ_0 . Weiter setze zur Abkürzung

$$A := \|a\|_{\mathcal{L}^2(X, \mathbb{R})}. \quad (2.15)$$

Dann folgt mit Céa's Lemma für unsymmetrische Probleme die Abschätzung

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{A}{\lambda_0} \inf_{v \in S} |u - v|_{H^1(\Omega)}.$$

Als weiteres Hilfsmittel verwenden wir die Abschätzung für die Interpolierende

$$\forall u \in H^2(\Omega) : |u - I_{\mathcal{G}}u|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 |u|_{H^2(\Omega)}. \quad (2.16)$$

Die Konstante c_1 hängt dabei von der Regularität des Gitters ab. Setzt man $c_2 := \frac{A}{\lambda_0}$ und $c := c_1 c_2$ gilt zusammen

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 \inf_{v \in S} |u - v|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 |u - I_{\mathcal{G}}u|_{H^1(\Omega)} \leq c |u|_{H^2(\Omega)}.$$

□

Beispiel 2.7. Wir betrachten auf $\Omega := [0, 1]^2$ das zweidimensionale Konvektions-Diffusionsproblem (2.5) mit $b = \frac{1}{\varepsilon}$ und $f(x, y) = x + y - 2\frac{e^{x/\varepsilon} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1}$:

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + ((1, 1)^T \cdot \nabla u) v = x + y - 2\frac{e^{x/\varepsilon} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.17)$$

Die spezielle Wahl der rechten Seite wird zu Beginn des nächsten Abschnittes begründet.

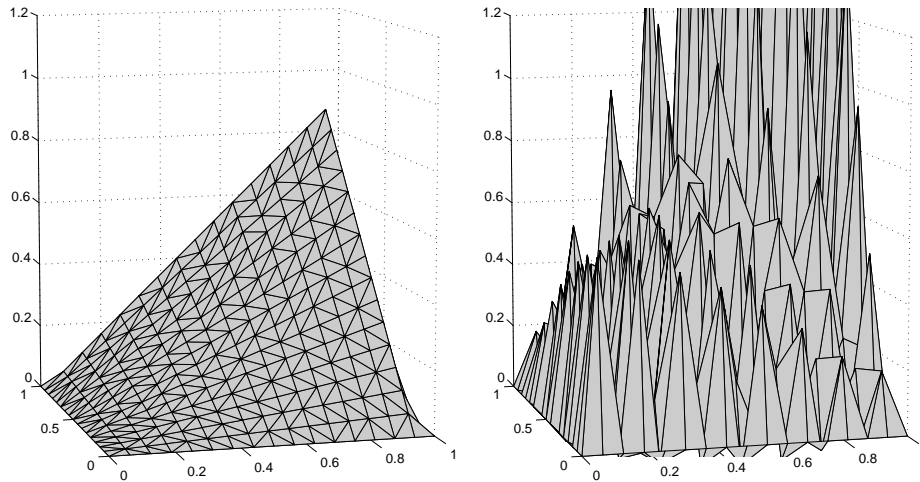


Abbildung 2.5: Exakte Lösung und diskrete Standard-Galerkin-Lösung auf einem 16×16 -Gitter mit $\varepsilon = 0.001$. Die Gradienten von Ordnung $1/\varepsilon$ der exakten Lösung in den Rand-Grenzschichten nahe $x = 1$ und $y = 1$ führen zu den Oszillationen bei der diskreten Lösung. Die Lösung ist unbrauchbar.

Die Abbildung (2.5) macht die Problematik deutlich. Konkret gilt $Pe = 88 \gg 2$, womit bei der Standard-Galerkin-Methode Oszillationen auftreten. Wir haben in einer, wie auch in zwei Dimensionen anhand eines einfachen Beispiels die Notwendigkeit von Stabilisierungstechniken aufgezeigt.

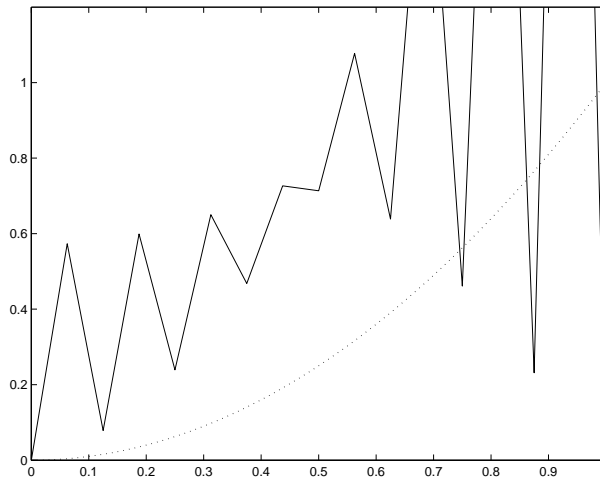


Abbildung 2.6: Die Spur bezüglich $x = y$ der beiden Plots aus Abbildung (2.5) aufgetragen bezüglich der x -Koordinate. Die diskrete Lösung besitzt keinerlei Approximationseigenschaft.

Kapitel 3

Die Methoden: Einführung und Konvergenzanalyse

3.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden die Stabilisierungstechniken vorgestellt. Anhand erster einfacher Modellprobleme wird die Konvergenz untersucht und mit theoretischen Konvergenzresultaten verglichen. Im Allgemeinen verwenden wir dafür uniforme Gitter.

Ein eindimensionales Modellproblem: Rand-Grenzschicht-1D

Betrachte das bereits in Beispiel (2.10) eingeführte Konvektions-Diffusions-Problem

$$\begin{aligned} -\varepsilon\eta''(x) + b \cdot \eta'(x) &= 1, & 0 < x < 1, \\ \eta(0) &= 0, \\ \eta(1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit $0 < \varepsilon \ll 1$. Die exakte Lösung lautet

$$\eta(x) = \frac{x}{b} - \frac{e^{\frac{bx}{\varepsilon}} - 1}{b \left(e^{\frac{bx}{\varepsilon}} - 1 \right)}$$

und weist nahe $x = 1$ eine exponentielle Grenzschicht der Breite $O(\varepsilon/b)$ auf. Daraus resultieren Gradienten der Ordnung b/ε in diesem Bereich von $[0, 1]$. Wir setzen $b = 1$ und bezeichnen dieses Modellproblem mit *Rand-Grenzschicht-1D*.

Ein zweidimensionales Modellproblem: Rand-Grenzschicht-2D

Es sei nun $\Omega = [0, 1]^2$. Mittels Tensorprodukt konstruieren wir ein einfaches zweidimensionales Modellproblem der Form

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u + b\nabla u &= f & \text{in } \Omega \in \mathbb{R}^2 \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Für die Konvergenzanalyse muss die Lösung bekannt sein. Geben wir also die Lösung vor und berechnen die zugehörige rechte Seite.

Bemerkung 3.1. Sei das Produkt $\eta(x)\eta(y)$ Lösung des Problems (3.2) mit $\vec{b} := (b, b)^T$, $b > 0$. Dann gilt $f(x, y) = \eta(x) + \eta(y)$ (vgl. Bsp (2.17)).

Beweis. Sei η Lösung von (3.1). Mit dem Ansatz $u(x, y) = \eta(x)\eta(y)$ ergibt sich in (3.2)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\varepsilon \Delta (\eta(x)\eta(y)) + (b, b)^T \cdot \nabla (\eta(x)\eta(y)) \\ &= -\varepsilon (\eta_{xx}(x)\eta(y) + \eta(x)\eta_{yy}(y)) + b\eta_x(x)\eta(y) + b\eta(x)\eta_y(y) \\ &= \eta(y) \underbrace{(-\varepsilon\eta_{xx}(x) + b\eta_x(x))}_{=1} + \eta(x) \underbrace{(-\varepsilon\eta_{yy}(y) + b\eta_y(y))}_{=1} \\ &= \eta(x) + \eta(y). \end{aligned}$$

□

Wir bezeichnen das Problem (3.2) mit $\vec{b} = (1, 1)^T$ und $f(x, y) = \eta(x) + \eta(y)$ als *Rand-Grenzschicht-2D*. Dabei wird in x - und y -Richtung je ein singular gestörtes Problem kombiniert, das für $\varepsilon = 0$ keine stetige Lösung hat. Auch dieses Modellproblem ist singular gestört.

Für dieselben Parameter ε können die Probleme nicht mit gleich grossen Schrittweiten gelöst werden wie im eindimensionalen Fall. Wir betrachten daher jeweils zunächst das eindimensionale Problem Rand-Grenzschicht-1D. So können wir Probleme mit kleineren Schrittweiten lösen und das Konvergenzverhalten genauer untersuchen. Das Gitter besitzt jeweils die uniforme Schrittweite h .

Bemerkung 3.2. Die bereits eingeführte, dimensionslose Péclet-Zahl $Pe := \frac{\|b\|_\infty h}{\varepsilon}$ kann auch elementweise durch

$$Pe_K = \frac{\|b_K\|_{\infty, K} h_K}{\varepsilon} \quad (3.3)$$

angesetzt werden. Die Definition der Grösse h_K ist dabei nicht klar. Als populärster Ansatz gilt $h_K := \max_{i=1,2,3} h_i$. Im Fall von sehr schmalen Dreiecken ist es beispielsweise besser, h_K als die längste Seite in Flussrichtung zu definieren. b_K sei die Geschwindigkeit im Schwerpunkt von K . Die (lokale) Péclet-Zahl wird sich in verschiedenen Bereichen als wichtige Grösse im Zusammenhang mit Konvergenzeigenschaften herausstellen.

3.2 Standard-Galerkin FEM

Als Vorgabe analysieren wir das Konvergenzverhalten der Standard-Galerkin-FEM für die zwei homogenen Modellprobleme Randgrenzschicht-1D und Randgrenzschicht-2D. Als theoretische Grundlage ziehen wir den Satz 2.6 heran. Demzufolge sollten der H^1 -Fehler linear und der L^2 -Fehler quadratisch konvergieren. Neben dieser asymptotischen Aussage wird sich zeigen, inwiefern sich die Oszillationen im konvektionsdominierten Fall auf das Konvergenzverhalten auswirken. Wir behalten abhängig vom Parameter $0 < \varepsilon < 1$ die Schranke $Pe = 2$ im Auge.

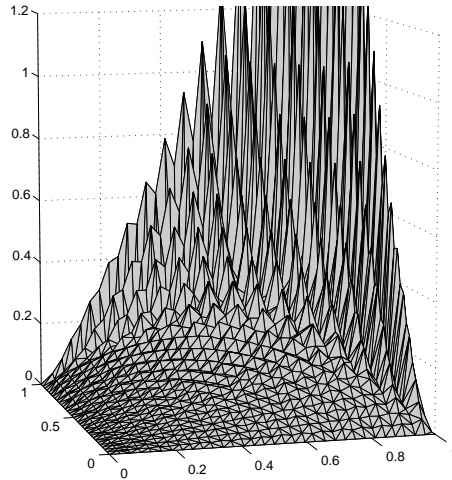


Abbildung 3.1: Diskrete Standard-Galerkin-Lösung von Randgrenzschicht-2D mit $\varepsilon = 0.001$ auf uniformem 32×32 -Gitter. Die Oszillationen treten bereits nicht mehr auf dem gesamten Gebiet auf. Trotzdem ist die Lösung unbrauchbar.

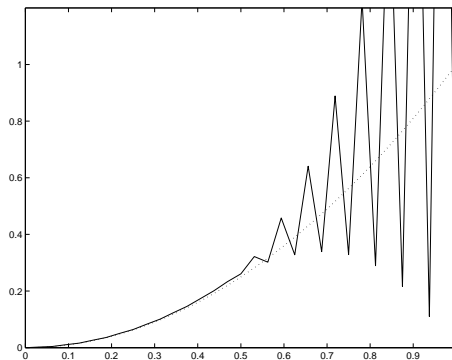


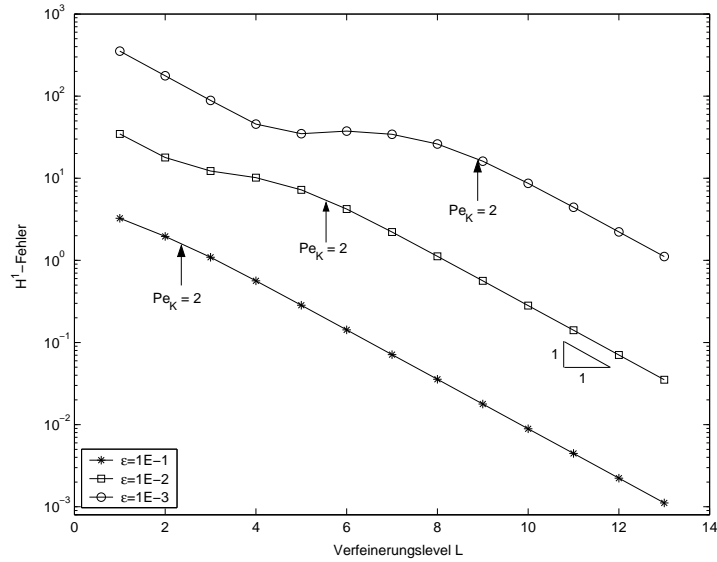
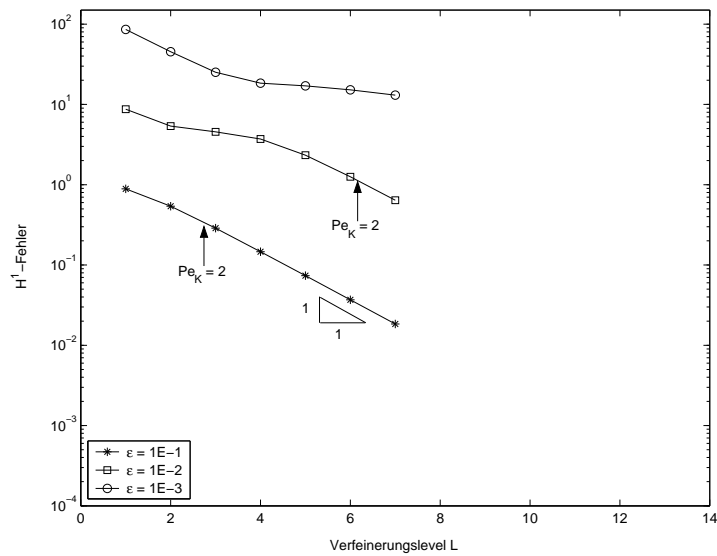
Abbildung 3.2: Spur bezüglich $x = y$ verglichen mit der exakten Lösung. Die Péclet-Zahl beträgt $22 \gg 2$.

Numerische Resultate von Standard-Galerkin in der globalen H^1 -Norm

$\varepsilon = 1E - 1$			$\varepsilon = 1E - 2$			$\varepsilon = 1E - 3$		
h	$ u - u_h _{H^1}$	Quot.	h	$ u - u_h _{H^1}$	Quot.	h	$ u - u_h _{H^1}$	Quot.
2^{-1}	3.26E+0	—	2^{-1}	3.47E+1	—	2^{-1}	3.54E+2	—
2^{-2}	1.96E+0	1.6661	2^{-2}	1.79E+1	1.9376	2^{-2}	1.77E+2	1.9997
2^{-3}	1.09E+0	1.7912	2^{-3}	1.21E+1	1.4605	2^{-3}	8.86E+1	1.9964
2^{-4}	5.64E-1	1.9366	2^{-4}	1.02E+1	1.2074	2^{-4}	4.57E+1	1.9390
2^{-5}	2.84E-1	1.9832	2^{-5}	7.22E+0	1.4057	2^{-5}	3.49E+1	1.3088
2^{-6}	1.43E-1	1.9957	2^{-6}	4.22E+0	1.7113	2^{-6}	3.75E+1	0.9295
2^{-7}	7.13E-2	1.9989	2^{-7}	2.22E+0	1.9047	2^{-7}	3.43E+1	1.0938
2^{-8}	3.57E-2	1.9997	2^{-8}	1.12E-0	1.9741	2^{-8}	2.61E+1	1.3150
2^{-9}	1.78E-2	1.9999	2^{-9}	5.63E-1	1.9934	2^{-9}	1.61E+1	1.6175
2^{-10}	8.92E-3	2.0000	2^{-10}	2.82E-1	1.9983	2^{-10}	8.68E+0	1.8596
2^{-11}	4.46E-3	2.0000	2^{-11}	1.41E-1	1.9996	2^{-11}	4.43E+0	1.9602
2^{-12}	2.23E-3	2.0000	2^{-12}	7.05E-2	1.9999	2^{-12}	2.22E+0	1.9897
2^{-13}	1.11E-3	2.0000	2^{-13}	3.52E-2	2.0000	2^{-13}	1.11E+0	1.9976

Tabelle 3.1: Tabellen zum H^1 -Fehler des Problems Rand-Grenzschicht-1D. Die horizontalen Trennlinien geben den Bereich $Pe = 2$ an.

Die Tabellen (3.1) zeigen das lineare Fehlerverhalten des H^1 -Fehlers. Im diffusionsdominierten Bereich $Pe < 2$ zeigen die oszillationsfreien Lösungen ein sehr gutes Fehlerverhalten. Anhand von logarithmisierten Fehlerplots vergleichen wir ein- und zweidimensionale Lösungen. Die Werte von ε variieren wir im Bereich $\varepsilon \in [1E - 1, 1E - 6]$. Solche Größen sind für Anwendungen realistisch.


 Abbildung 3.3: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D für moderate Parameter

 Abbildung 3.4: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D für moderate Parameter

Das asymptotische Verhalten der linearen Konvergenz des H^1 -Fehlers ist sichtbar (Tabellen, Abb. 3.3). Im Übergang vom konvektions- zum diffusionsdominierten Fall ($Pe \sim 2$) lässt sich eine Einbuss des Fehlerverhaltens beobachten, die für kleinere Diffusionsparameter ϵ länger anhalten. Insbesondere für den diffusionsdominierten Fall $Pe < 2$ ist lineare Konvergenz wieder zu beobachten. In der Abbildung (3.4) ist dasselbe Fehlerverhalten auch für den zweidimensionalen Fall sichtbar.

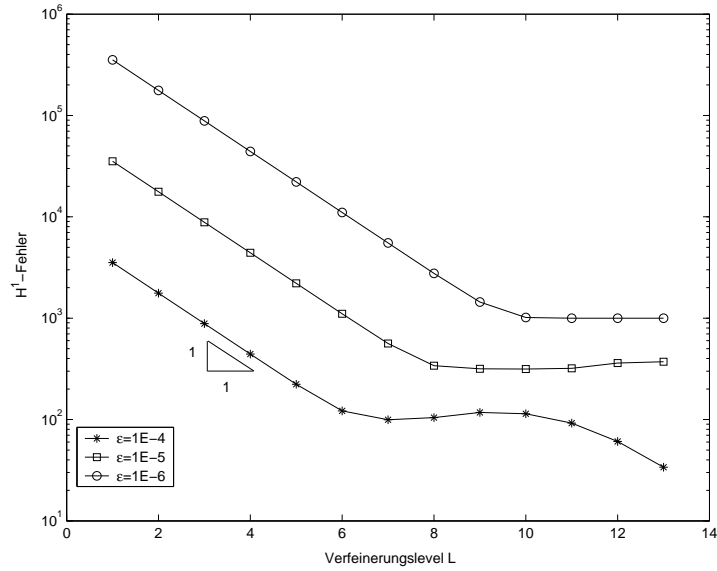


Abbildung 3.5: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D für extreme Parameter

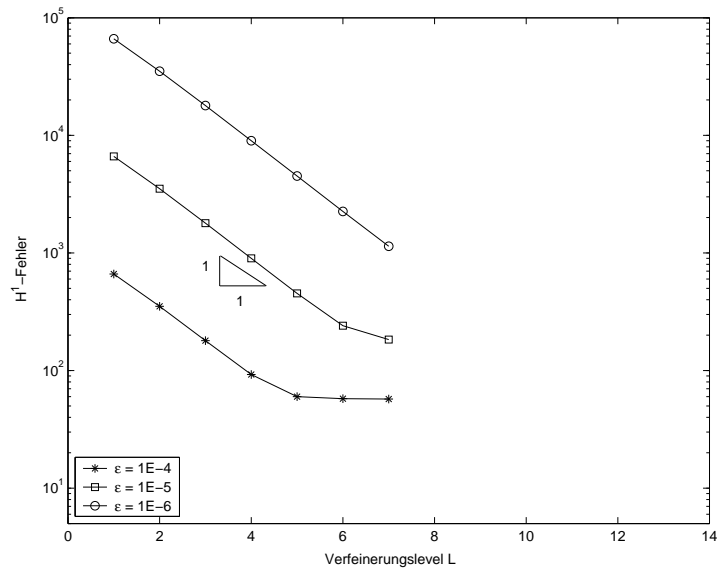


Abbildung 3.6: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D für extreme Parameter

Auch für extreme Parameter $0 < \epsilon \ll 1$ zeigt Standard-Galerkin ein sehr gutes Fehlverhalten. Die Einbussen im Übergang $Pe \sim 2$ sind stärker. Trotzdem zeigt sich, dass sich die Oszillationen nicht negativ auf das Verhalten des H^1 -Fehlers auswirken.

Numerische Resultate von Standard-Galerkin in der globalen L^2 -Norm

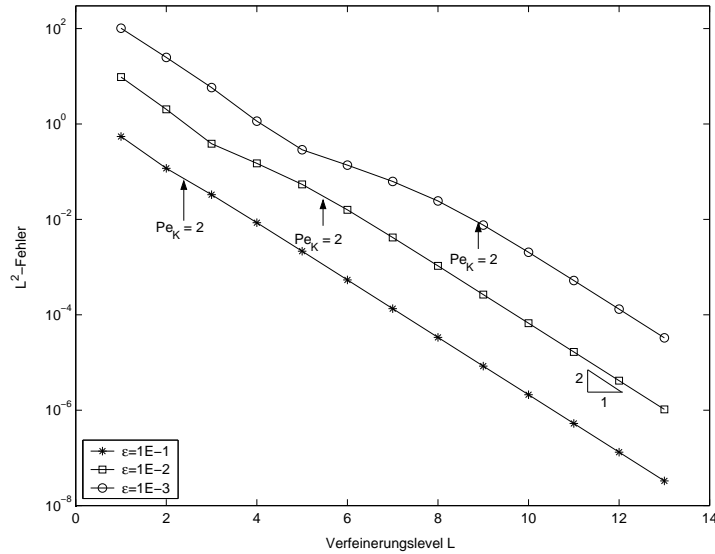


Abbildung 3.7: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D für moderate Parameter

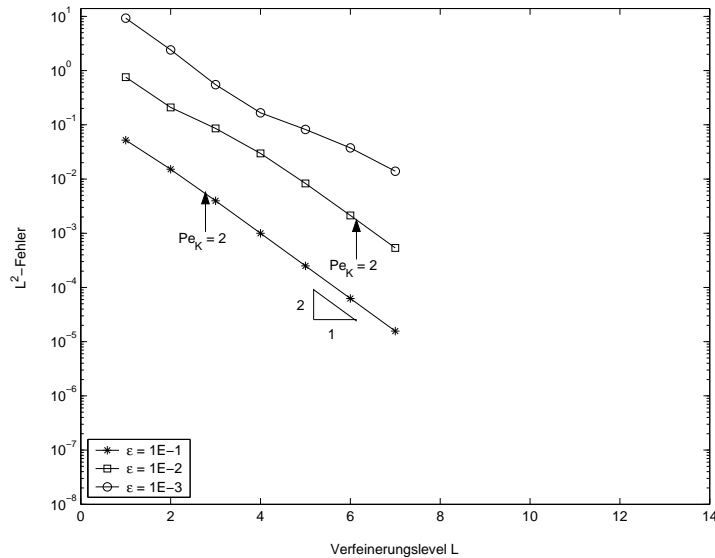


Abbildung 3.8: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D für moderate Parameter

Wie erwartet kann man auch den numerischen Ergebnissen ein quadratisches Konvergenzverhalten der L^2 -Fehler entnehmen. Das Verhalten im Übergang von Konvektions- zu Diffusionsdominanz fällt etwas besser aus, als beim H^1 -Fehler. Im zweidimensionalen Fall zeigt sich dasselbe Fehlerverhalten wie eindimensional.

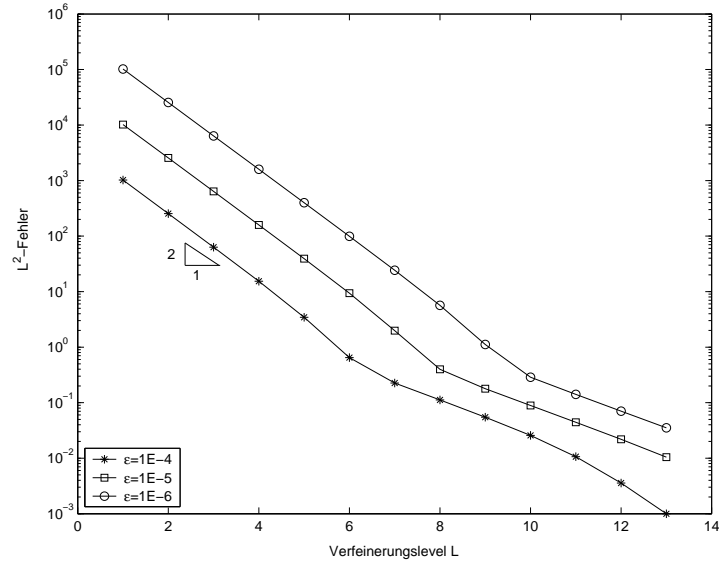


Abbildung 3.9: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D für extreme Parameter

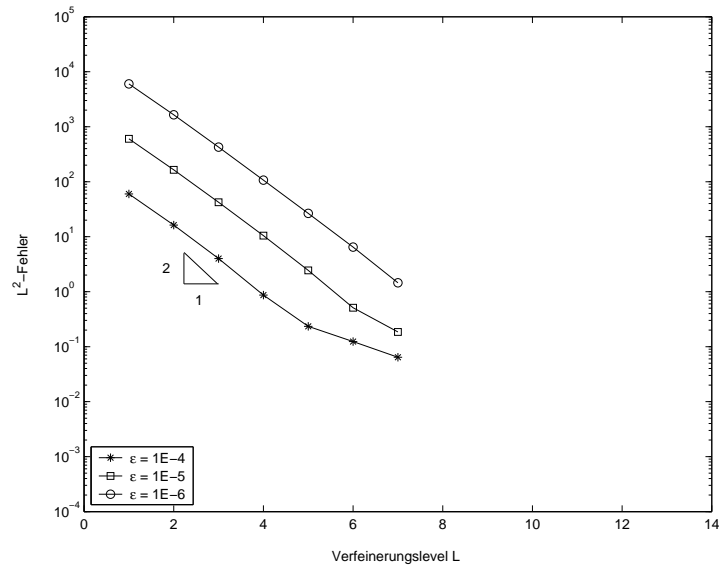


Abbildung 3.10: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D für extreme Parameter

Selbst für extreme Parameter zeigen die berechneten Lösungen ein gutes Fehlverhalten. Auch im Fall des L^2 -Fehlers wird dies nicht durch das Auftreten von Oszillationen beeinträchtigt.

3.3 Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin (SUPG)

Als ersten Repräsentanten der Upwind-Techniken betrachten wir das in [9, 8, 15, 11] vorgestellte SUPG (SDFEM) Verfahren. Die Methode hat sich bewährt als robuste mathematische Grundlage zur Lösung von Konvektions-Diffusions-Problemen.

Sei V der Raum der stückweise linearen Funktionen. Die schwache Formulierung der Standard-Galerkin Methode $a(u, v) = l(v)$ wird bei SUPG in Richtung b verstärkt.

$$a_S(u, v) := a(u, v) + \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K \int_K \langle b, \nabla u \rangle \langle b, \nabla v \rangle$$

$$l_S(v) := l(v) + \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K \int_K f \cdot \langle b, \nabla v \rangle$$

Die schwache Formulierung des stabilisierten Problems lautet dann: Finde $u_S \in S$ mit

$$a_S(u, v) = l_S(v) \quad \forall v \in S \quad (3.4)$$

SUPG als Petrov-Galerkin Verfahren

Wie man dem Namen des Verfahrens entnimmt, handelt es sich ursprünglich um ein Petrov-Galerkin Verfahren. Seien S_1, S_2 zwei endlichdimensionale Unterräume von $H_0^1(\Omega)$. Falls das Problem: Finde $u \in S_1$ mit

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in S_2 \quad (3.5)$$

mit zwei verschiedenen Unterräumen S_1 und S_2 gelöst wird, spricht man von einem Petrov-Galerkin Verfahren. Anstelle der Interpretation als reines Galerkin-Verfahren (3.4) ist SUPG als Petrov-Galerkin-Verfahren mit $S_1 = S$ und $S_2 = \{v + \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K b \cdot \nabla v, v \in S\}$ für lineare Elemente äquivalent. Im Hinblick auf den Implementierungsaufwand ist die Galerkin Formulierung (3.4) einfacher.

Bemerkung 3.3. Der addierte Term verstärkt die Diffusion ε in Stromrichtung. Daher wird SUPG in der Literatur auch als *Streamline-Diffusion Finite-Element Methode (SD-FEM)* bezeichnet. Wenn der Gradient von u , bzw v in Stromrichtung b zeigt, wird auch der addierte Term in (3.4) gross.

Der Parameter τ_K

Die Bilinearform a_S und die Linearform l_S sind durch den Stabilisationsparameter τ_K gitterabhängig. Es gibt in der Literatur viele Varianten, wie man τ_K wählen kann. Diese sind meist durch Abschätzungen motiviert. Die optimale Wahl der lokalen Stabilisationsparameter bei SUPG ist noch immer ein offenes Problem. Es lässt sich also bereits festhalten, dass dieser unbestimmte Parameter eine Schwachstelle des Verfahrens ist. Wir versuchen über eine Fehlerabschätzung eine möglichst gute Wahl für τ_K zu finden. Wir führen dazu

die gitterabhängige Norm

$$|u|_{1,S} := \left\{ \varepsilon |u|_1^2 + \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K \|b \cdot \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

ein. Dann gilt

Satz 3.4. *Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die Lösung der Konvektions-Diffusions-Gleichung*

$$-\varepsilon \Delta u + b \cdot \nabla u = f$$

und homogenen Dirichlet-Randbedingungen und $u_S \in \mathcal{S}$ die Lösung der SUPG-Diskretisierung. Es sei $u \in H^2(\Omega)$. Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$|u - u_S|_{1,S} \leq \frac{75}{2} c_G \left\{ \sum_{K \in \mathcal{G}} (\varepsilon^2 \tau + \varepsilon h_K^2 + \tau h_K^2 + \tau^{-1} h_K^4) |u|_{H^2(K)}^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.6)$$

Dabei ist c_G eine Formregularitätskonstante, die nur vom Gitter abhängt. Die Fehlerabschätzung (3.6) ist optimal für

$$\tau = \frac{h_K^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + h_K^2}}$$

Beweis. Wir teilen die abzuschätzende Grösse in zwei Teile

$$|u - u_S|_{1,S} \leq |u - I_G u|_{1,S} + |I_G u - u_S|_{1,S}.$$

Die Abschätzung des ersten Summanden geschieht elementweise durch Zurückziehen auf das Referenzelement. Man zeigt

$$|u - I_G u|_{1,S} \leq 10.5 c_G \left\{ \sum_{K \in \mathcal{G}} (\varepsilon + \tau_K) h_K^2 |u|_{H^2(K)}^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.7)$$

Setze für den zweiten Teil $w_S := u_S - I_G u$. Aus der Koerzivität der Norm $|\cdot|_{1,S}$ folgt

$$\begin{aligned} |w_S|_{1,S}^2 \leq a_S(w_S, w_S) &= a_S(u_S - u + u - I_G u, w_S) \\ &= a_S(u_S - u, w_S) + a_S(u - I_G u, w_S) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Bleiben die beiden Summanden in (3.8) abzuschätzen.

$$\begin{aligned}
 a_S(u - u_S, w_S) &= l_S(w_S) - a_S(u, w_S) \\
 &= l(w_S) + \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K \int_K f(b \cdot \nabla w_S) - a(u, w_S) - \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K \int_K (b \cdot \nabla u)(b \cdot \nabla w_S) \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K \int_K (f - (b \cdot \nabla u))(b \cdot \nabla w_S) \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K \int_K (-\varepsilon \Delta u)(b \cdot \nabla w_S) \\
 &\leq \sum_{K \in \mathcal{G}} \varepsilon \tau_K |u|_{H^2(K)} \|b \cdot \nabla w_S\|_{L^2(K)} \\
 &\leq \left\{ \sum_{K \in \mathcal{G}} \varepsilon^2 \tau_K |u|_{H^2(K)}^2 \right\}^{1/2} |w_S|_{1,S}
 \end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden in (3.8) machen wir die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
 a_S(u - I_{\mathcal{G}}u, w_S) &= \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(u - I_{\mathcal{G}}u) \cdot \nabla w_S + \int_{\Omega} (b \cdot \nabla(u - I_{\mathcal{G}}u)) w_S \\
 &\quad + \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K \int_K (b \cdot \nabla(u - I_{\mathcal{G}}u))(b \cdot \nabla w_S) \\
 &= \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(u - I_{\mathcal{G}}u) \cdot \nabla w_S + \int_{\Omega} (b \cdot \nabla w_S)(u - I_{\mathcal{G}}u) \\
 &\quad + \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K \int_K (b \cdot \nabla(u - I_{\mathcal{G}}u))(b \cdot \nabla w_S) \\
 &\leq \varepsilon |u - I_{\mathcal{G}}u|_{H^1(\Omega)} |w_S|_{H^1(\Omega)} + \sum_{K \in \mathcal{G}} \|u - I_{\mathcal{G}}u\|_{L^2(K)} \|b \cdot w_S\|_{L^2(K)} \\
 &\quad + \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K \|b \cdot \nabla(u - I_{\mathcal{G}}u)\|_{L^2(K)} \|b \cdot \nabla w_S\|_{L^2(K)} \\
 &\leq 2|w_S|_{1,S} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{G}} (\varepsilon + \tau_K) |u - I_{\mathcal{G}}u|_{H^1(K)}^2 + \tau_K^{-1} \|u - I_{\mathcal{G}}u\|_{L^2(K)}^2 \right\}^{1/2} \\
 &\leq 2|w_S|_{1,S} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{G}} (\varepsilon + \tau_K) 10.5^2 c_{\mathcal{G}}^2 h_K^2 |u|_{H^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K^{-1} 100 h_K^4 |u|_{H^2(K)}^2 \right\}^{1/2} \\
 &\leq 2 \cdot 10.5 c_{\mathcal{G}} |w_S|_{1,S} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{G}} h_K^2 (\varepsilon + \tau_K + \tau_K^{-1} h_K^2) |u|_{H^2(K)}^2 \right\}^{1/2}
 \end{aligned}$$

Damit gilt nach Division durch $|w_S|_{1,S} = |u_S - I_G u|_{1,S}$ mit $c_G \geq 1$

$$\begin{aligned} |w_S|_{1,S} &\leq \left\{ \sum_{K \in \mathcal{G}} \varepsilon^2 \tau_K |u|_{H^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2} + 21 \left\{ \sum_{K \in \mathcal{G}} h_K^2 (\varepsilon + \tau_K + \tau_K^{-1} h_K^2) |u|_{H^2(K)}^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq 22c_G \left\{ \sum_{K \in \mathcal{G}} (\varepsilon h_K^2 + h_K^2 \tau_K + \tau^{-1} h_K^4 + \varepsilon^2 \tau_K) |u|_{H^2(K)}^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Nun addiert man die Abschätzung für $|u - I_G u|_{1,S}$ in (3.7) mit den zwei abgeschätzten Summanden von (3.8). Mit $\varepsilon, h_K, \tau_K > 0$ folgt die Behauptung. \square

In [24] wird eine Fehlerabschätzung in der Norm mit Reaktionsterm

$$|u|_{SD} := \left\{ \varepsilon |u|_1^2 + \sum_{K \in \mathcal{G}} \tau_K \|b \cdot \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

hergeleitet. Im konvektionsdominierten Fall wird der Fehler durch die einfache Wahl

$$\tau_K = \lambda h_K,$$

wobei $0 < \lambda = O(1)$ eine geeignete positive Konstante, minimiert. Vergleicht man diesen Parameter für $\varepsilon \ll h$, also $Pe \gg 2$ mit (3.4), fällt auf, dass auch

$$\frac{h_K^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + h_K^2}} \sim h_K$$

gilt. Meistens ist in der Definition von τ die Fallunterscheidung $Pe < 2$ und $Pe > 2$ enthalten und es werden angepasste Funktionen verwendet. Wir untersuchen im folgenden vor allem die Ansätze für den konvektionsdominierten Fall, denn andernfalls fällt SUPG mit $\tau = 0$ mit der Standard-Galerkin Methode zusammen.

τ_K	h_K	Bezeichnung	Quelle
$\frac{h_K}{2 b }$	$h_K = \max_i h_i$	Standard	[9]
$\frac{h_K}{2 b }$	$h_K = \sqrt{\frac{4 K }{\pi}}$	Variation h_K	
$\frac{h_K^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + h_K^2}}$	$h_K = \max_i h_i$	H^1 -optimal	(3.4)
$\frac{h_K}{3 b }$	$h_K = \max_i h_i$	RFB approx	[7]
$\frac{h_K}{2 b } \frac{Pe_K}{3} \left(1 + \left(\frac{Pe_K}{3}\right)^2\right)^{-1/2}$	$h_K = \max_i h_i$	Hughes	[11]

Tabelle 3.2: Varianten für die Wahl des Stabilisationsparameters τ_K und der charakteristischen Länge h_K im konvektionsdominierten Fall.

In der Tabelle 3.2 werden einige Möglichkeiten angegeben. Auch die Grösse h_K beeinflusst den Effekt der Methode und ist nicht eindeutig optimal definierbar. Besonders bei anisotropen Gitter mit sehr schmalen Dreiecken ist nicht klar, ob die längste Seite eine gute

Wahl ist, oder ob man das längste Segment in Flussrichtung vorziehen sollte. Wie beim Stabilisationsparameter werden zahlreiche Ansätze gemacht. Eine ausführliche Liste wird in [22] angegeben.

Am Ende dieses Abschnittes legen wir uns auf einen Parameter τ_K fest. Wir motivieren unsere Wahl durch eine Problemstellung. Wir lösen das Problem Rand-Grenzschicht-2D mit allen Varianten aus Tabelle 3.2 für $\varepsilon = 1E - 3$ und $\varepsilon = 1E - 6$:

H^1 -Fehler			L^2 -Fehler		
Wahl τ_K, h_K	$\varepsilon = 1E - 3$	$\varepsilon = 1E - 6$	Wahl τ_K, h_K	$\varepsilon = 1E - 3$	$\varepsilon = 1E - 6$
Standard	2.859	2.969	Standard	0.121	0.120
Variation h_k	3.792	4.025	Variation h_k	0.109	0.109
H^1 -optimal	1.813	1.630	H^1 -optimal	0.179	0.179
RFB approx	4.142	4.415	RFB approx	0.109	0.109
Hughes	2.860	2.969	Hughes	0.121	0.120

Tabelle 3.3: Tabellen zum H^1 - und L^2 -Fehler des Problems Rand-Grenzschicht-2D mit den Ansätzen von Tabelle (3.2).

Für die numerischen Tests verwenden wir die H^1 -optimal Variante. Für den L^2 -Fehler ist diese Wahl nicht günstig, wie die Resultate aus Tabelle (3.3) zeigen. Für die Grösse h_K beschränken uns auf $h_K = \max_i h_i$.

Konvergenzresultate

Neben zahlreichen Abschätzungen in den Normen $|\cdot|_{1,S}$ und $|\cdot|_{SD}$ betrachten wir die Fehler in der H^1 - und der L^2 -Norm. In [15] werden die folgenden Konvergenzeigenschaften von SUPG beschrieben.

Der Parameter τ_K genüge den folgenden Abschätzungen:

$$\tau_K \leq \begin{cases} c_1 \frac{h_K}{|b|} & \text{falls } \text{Pe} > 2, \\ c_2 \frac{h_K^2}{\varepsilon} & \text{falls } \text{Pe} < 2. \end{cases} \quad (3.9)$$

Sei $\mathcal{S}_\varepsilon \subset \Omega$ ein Gebiet, das die Randschichten enthält. Bilde $\Omega' := \Omega \setminus \mathcal{S}_\varepsilon$.

Im konvektionsdominierten Fall gilt

$$\|b \cdot \nabla(u - u_S)\|_{L^2(\Omega')} \leq O(h) \quad (3.10)$$

und

$$\|u - u_S\|_{L^2(\Omega')} \leq O(h^{3/2}). \quad (3.11)$$

Im diffusionsdominierten Fall gilt

$$|u - u_S|_{H^1(\Omega)} \leq O(h) \quad (3.12)$$

und

$$\|u - u_S\|_{L^2(\Omega)} \leq O(h^2). \quad (3.13)$$

Bemerkung 3.5. Man verifiziere, dass die Voraussetzungen für die Wahl von (3.4) erfüllt sind. Damit sind die obigen Resultate gültige Vorgaben für die Konvergenztests. Im Fall vom Modellproblem Randgrenzschicht-2D, welches scharfe Randgrenzschichten aufweist, können wir im konvektionsdominierten Fall keine globalen Konvergenzerwartungen angeben. Im diffusionsdominierten Fall erwarten wir die optimalen Konvergenzraten wie bei Standard-Galerkin.

Die Ordnung 1.5 des L^2 -Fehlers im konvektionsdominierten Fall ausserhalb der Randschichten ist trotzdem erstaunlich. Das bedeutet, dass sich die schlechtere Konvergenzordnung auch auf das innere des Gebietes überträgt. Diesen *Preis* zahlt man durch das geglättete Verhalten in den Randschichten.

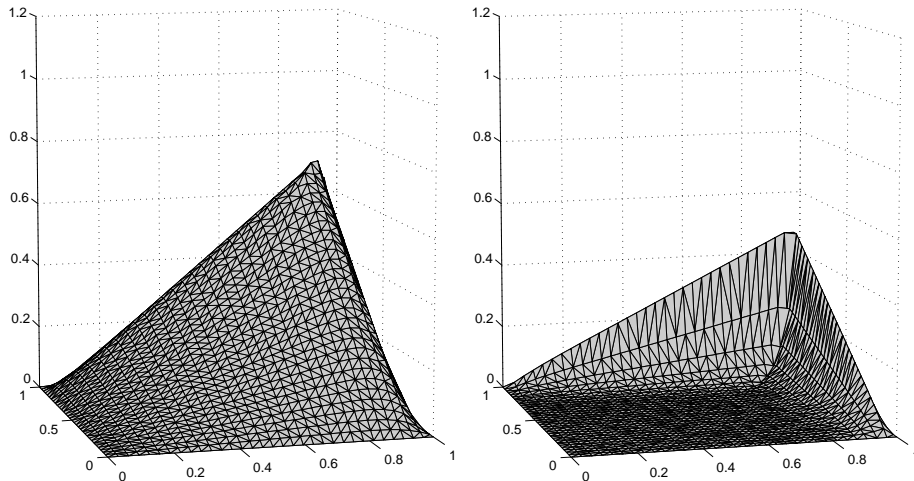


Abbildung 3.11: Diskrete Lösung und diskreter Fehler von SUPG auf uniformem 32×32 Gitter mit $\varepsilon = 0.001$. Die Gestalt der exakten Lösung wird grob wiedergegeben. In der Grenzschicht wird die Lösung stark geglättet.

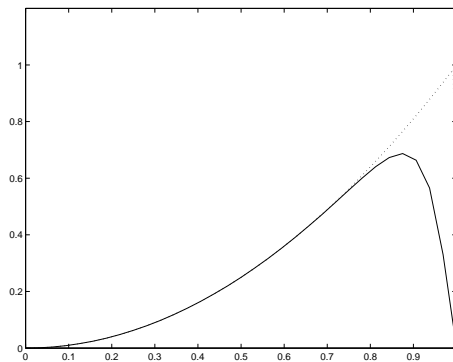


Abbildung 3.12: Spur von (3.11) bezüglich $x = y$ verglichen mit der exakten Lösung. Das Verhalten dieser SUPG-Lösung in der Grenzschicht ist nicht befriedigend.

Bemerkung 3.6. Die Bedingung $Pe < 2$, die ein optimales Fehlerverhalten sichert, ist in der Praxis kaum realisierbar: Sei $\varepsilon = 0.001$ und ein uniformes Gitter gegeben. $Pe < 2$ ist dann gleichbedeutend damit, dass das Problem rund 260'000 Freiheitsgrade besitzt. Bei $\varepsilon = 1E-4$ sind bereits mehrere Millionen Freiheitsgrade erforderlich. Die Problematik wird in diesem konkreten Fall sehr deutlich: Die a-priori Fehlerabschätzungen sind für zweidimensionale Probleme mit kleinem Parameter ε nicht aussagekräftig, da die Bedingung $Pe < 2$ sehr viele Freiheitsgrade erfordert. Die Abbildungen zu den zweidimensionalen Resultaten zeigen, dass bereits für moderate Diffusionsparameter die Bereiche des optimalen Konvergenzverhaltens selbst mit guten Rechenkapazitäten kaum ablesbar sind.

Numerische Resultate von SUPG in der globalen H^1 -Norm

Wir lösen zunächst die Konvektions-Diffusions-Gleichung Rand-Grenzschicht-1D.

$\varepsilon = 1E-1$			$\varepsilon = 1E-2$			$\varepsilon = 1E-3$		
h	$ u - u_h _{H^1}$	Quot.	h	$ u - u_h _{H^1}$	Quot.	h	$ u - u_h _{H^1}$	Quot.
2^{-1}	2.59E+0	—	2^{-1}	3.16E+0	—	2^{-1}	1.58E+0	—
2^{-2}	2.14E+0	1.2098	2^{-2}	7.13E+0	0.4428	2^{-2}	2.02E+0	0.7822
2^{-3}	1.47E+0	1.4556	2^{-3}	8.98E+0	0.7938	2^{-3}	2.70E+0	0.7486
2^{-4}	7.67E-1	1.9153	2^{-4}	8.66E+0	1.0377	2^{-4}	6.41E+0	0.4208
2^{-5}	3.34E-1	2.2923	2^{-5}	7.40E+0	1.1699	2^{-5}	1.88E+1	0.3411
2^{-6}	1.51E-1	2.2224	2^{-6}	5.41E+0	1.3677	2^{-6}	2.75E+1	0.6833
2^{-7}	7.24E-2	2.0792	2^{-7}	3.08E+0	1.7550	2^{-7}	2.81E+1	0.9787
2^{-8}	3.58E-2	2.0218	2^{-8}	1.39E+0	2.2220	2^{-8}	2.49E+1	1.1276
2^{-9}	1.78E-2	2.0056	2^{-9}	6.10E-1	2.2748	2^{-9}	1.94E+1	1.2889
2^{-10}	8.92E-3	2.0014	2^{-10}	2.88E-1	2.1154	2^{-10}	1.21E+1	1.6048
2^{-11}	4.46E-3	2.0004	2^{-11}	1.42E-1	2.0335	2^{-11}	5.75E+0	2.0969
2^{-12}	2.23E-3	2.0001	2^{-12}	7.06E-2	2.0087	2^{-12}	2.49E+0	2.3068
2^{-13}	1.14E-3	2.0000	2^{-13}	3.53E-2	2.0022	2^{-13}	1.15E+0	2.1622

Tabelle 3.4: Tabellen zum H^1 -Fehler des Problems (3.1) mit SUPG. Die horizontalen Trennlinien geben den Bereich $Pe = 2$ an.

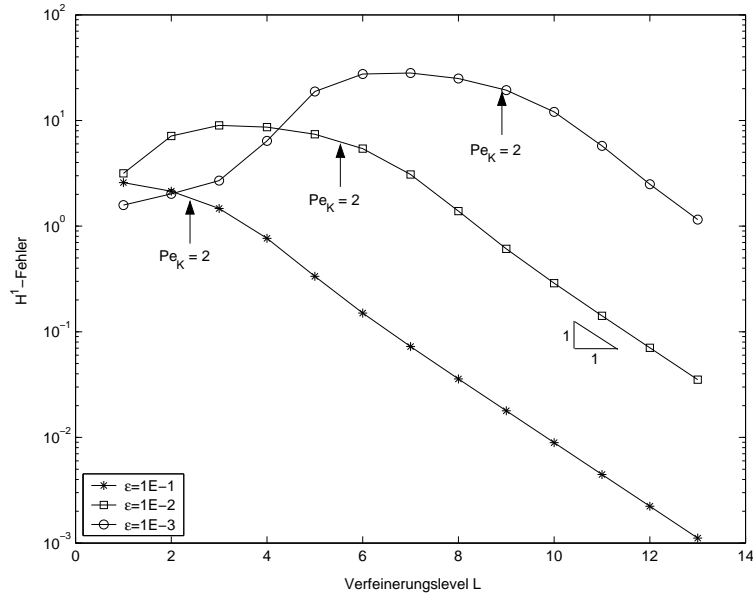


Abbildung 3.13: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D mit SUPG für moderate Parameter

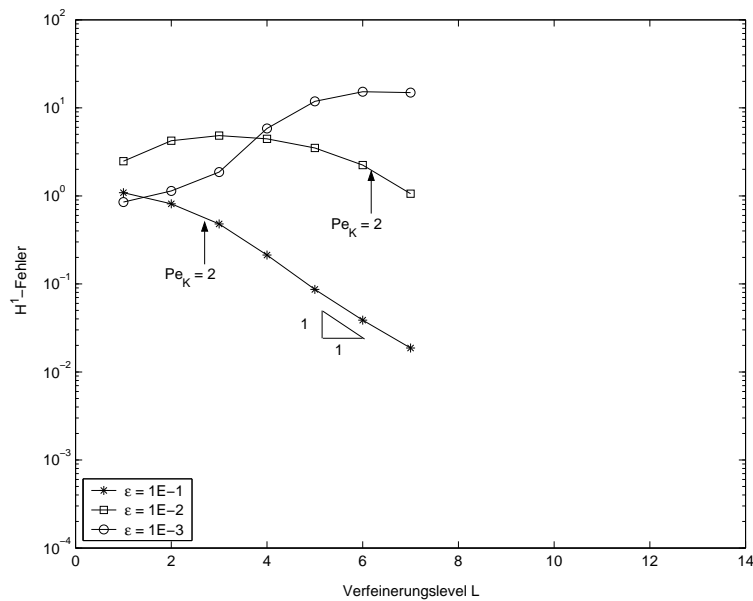


Abbildung 3.14: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit SUPG für moderate Parameter

Wir vergleichen die Ergebnisse mit den Erwartungen. Die erwartete lineare Konvergenz für festes ε und $Pe < 2$ ist sichtbar und scharf (Tabelle, Abb. (3.13)). Für sehr grosses h und $\varepsilon \rightarrow 0$ beobachten wir keine Konvergenz. (Abb. 3.13, 3.15). Die Abbildungen (3.14) und (3.16) zeigen, dass der Fehler im zweidimensionalen Fall dasselbe Verhalten wie im eindimensionalen Fall zeigt.

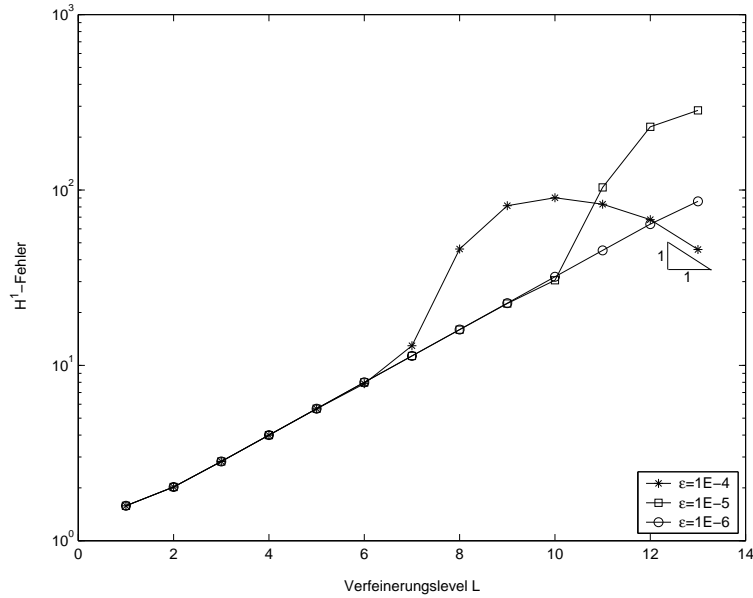


Abbildung 3.15: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D mit SUPG für extreme Parameter

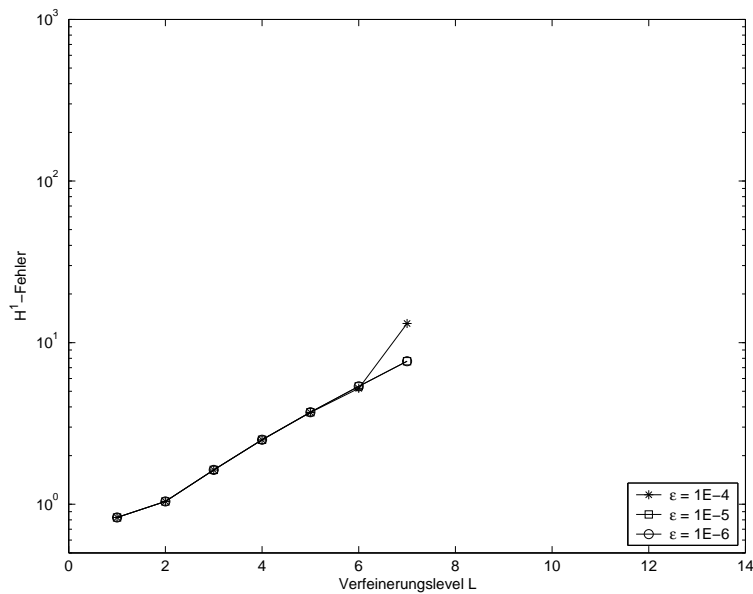


Abbildung 3.16: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit SUPG für extreme Parameter

Auf den ersten Blick befriedigen die Resultate für den H^1 -Fehler bei extremen Parametern nicht. Vergleicht man den Plot mit dem von Standard-Galerkin, fällt auf, dass das Fehlerverhalten im Fall $Pe < 2$ sehr ähnlich ist. Im Fall $Pe > 2$ zeigt SUPG zwar kein Konvergenzverhalten (die H^1 -Fehler wachsen sogar an), trotzdem sind die H^1 -Fehler aber im Gegensatz zu Standard-Galerkin (Oszillationen) konstant bezüglich ϵ .

Bemerkung 3.7. Bereits auf sehr groben Gittern zeigt SUPG H^1 -Fehler von Ordnung 10^0 . Diese Fehlergrösse wird dann durch Gitterverfeinerung bis zum Verfeinerungslevel 14 im extremsten Fall nicht verbessert. Das zeigt auf die Notwendigkeit von a-posteriori Fehlerschätzungen als Abbruchkriterium auf.

Numerische Resultate von SUPG in der globalen L^2 -Norm

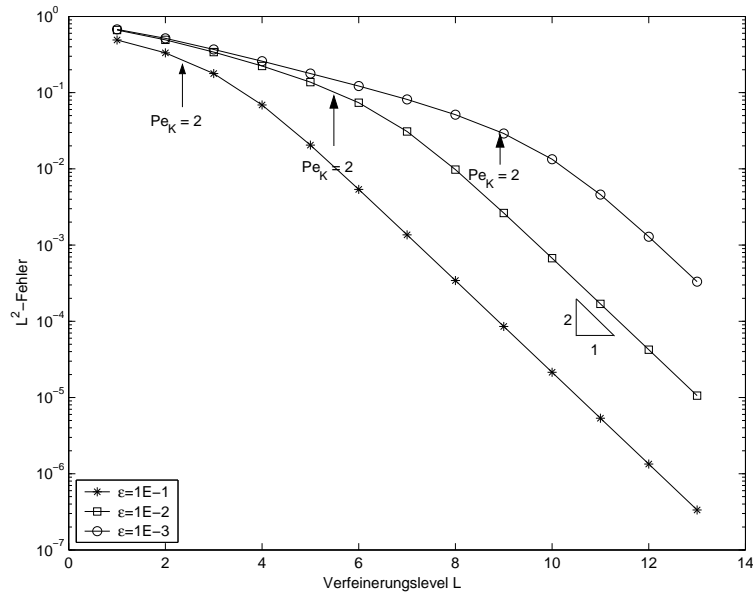


Abbildung 3.17: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D mit SUPG für moderate Parameter

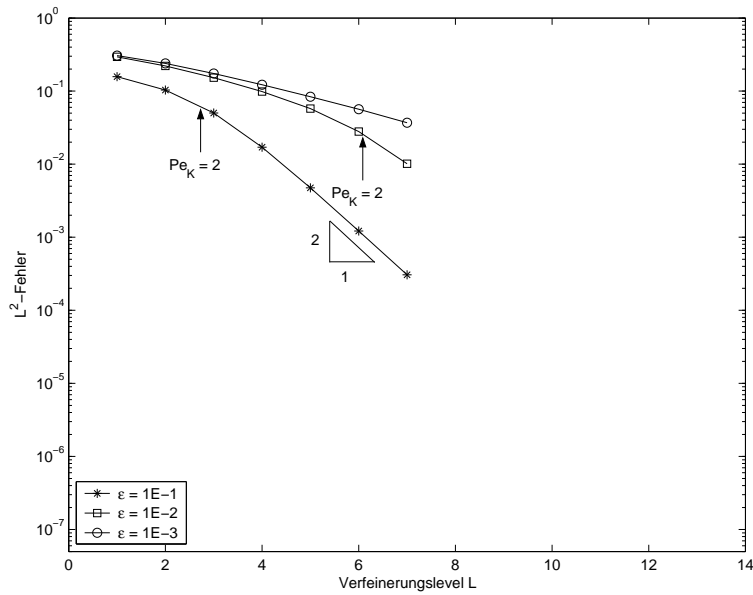


Abbildung 3.18: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit SUPG für moderate Parameter

Für $Pe < 2$ ist das quadratische Verhalten sichtbar und scharf. Im konvektionsdominierten Fall beobachten wir eine globale Fehlerrate von 0.5.

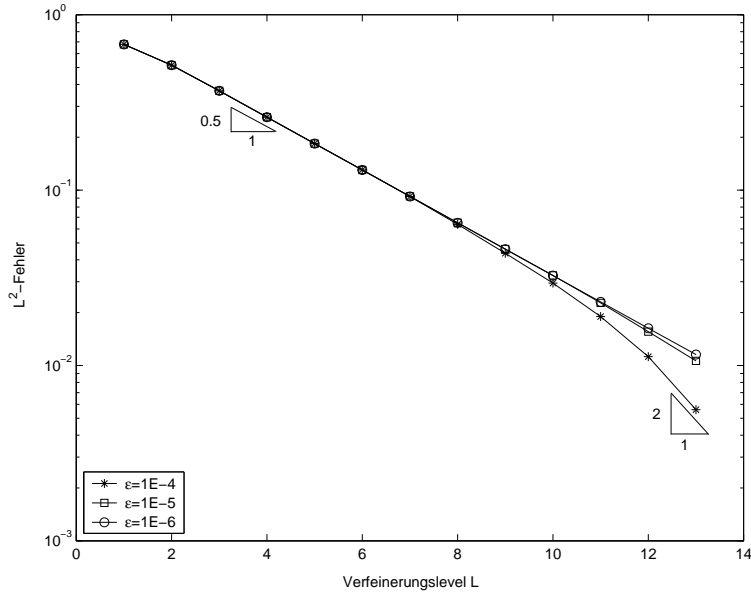


Abbildung 3.19: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D mit SUPG für extreme Parameter

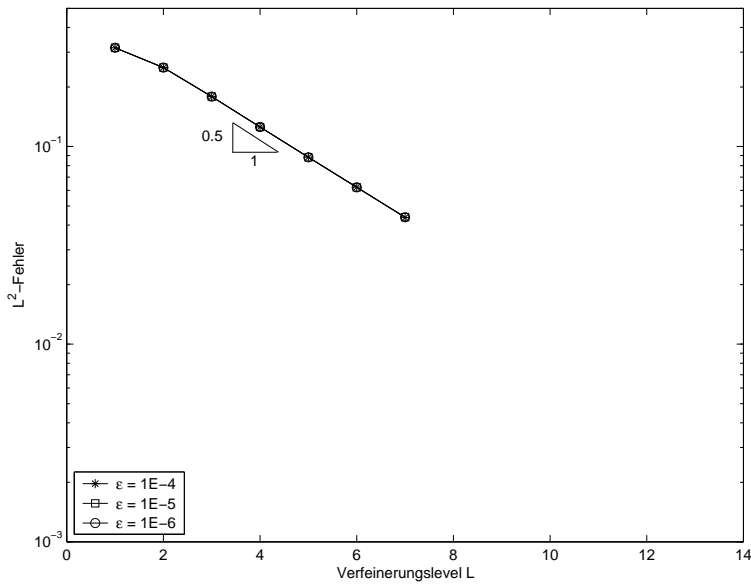


Abbildung 3.20: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit SUPG für extreme Parameter

Im Bereich der extremen Diffusionsparameter bleiben die absoluten L^2 -Fehler gleich gross. Erst beginnend mit der Bedingung $Pe < 2$ werden die Fehler mit Rate 2 kleiner und unterscheiden sich von den Fehlern extremerer Parameter.

3.4 Residual-Free Bubbles (RFB)

Die Methode der Residual-Free Bubbles besteht aus einer Anreicherung durch elementweise geeignete Bubble-Funktionen. Diese Funktionen gehören zum Raum $V_U = \oplus_{K \in \mathcal{G}} H_0^1(K)$, verschwinden also auf den Elementrändern. Im Elementinneren sollen sie die partielle Differentialgleichung mit rechter Seite 1 erfüllen. Setzt man V_R als den Raum der stetigen, elementweise linearen Funktionen kann man Lösungen u_h wegen $V_R \cap V_U = \{0\}$ schreiben als

$$u_h = u_R + u_U, \quad u_R \in V_R, u_U \in V_U \quad (3.14)$$

und ersetzt damit den Raum V_R durch $V_R \oplus V_U$. Der Teil u_R heisst auflösbarer (resolvable) Teil der Lösung, u_U heisst unauflösbarer (unresolvable) Teil der Lösung. Damit kann man die schwache Formulierung aufteilen in: Finde $u_R \in V_R, u_U \in V_U$ mit

$$a(u_R + u_U, v_R) = f(v_R) \quad \forall v_R \in V_R \quad (3.15)$$

$$a(u_R + u_U, v_U) = f(v_U) \quad \forall v_U \in V_U. \quad (3.16)$$

Durch geeignete Umformungen (vgl. [4]) lässt sich folgende schwache Formulierung herleiten: Finde $u_R \in V_R$ mit

$$\varepsilon(\nabla u_R, \nabla v_R) + (b \cdot \nabla u_R, v_R) + \sum_K (b \cdot \nabla v_R, u_R - u_R^-) = (f, v_R) + \sum_K (b \cdot \nabla v_R, u_U^f) \quad \forall v_R \in V_R.$$

Dabei bezeichne x^- den Punkt auf ∂K von x in Richtung $-\vec{b}$ - wir nennen ihn Einflussrandpunkt zu x . Weiter sei $u_R^- := u_R(x^-)$ und $u_U^f := |b|^{-1} \int_{x^-}^x f \, ds$. Man beachte, dass die Bubble-Funktionen komplett in die Formulierung (3.4) eingeflossen sind und wir lediglich eine Formulierung mit V_R zu lösen haben.

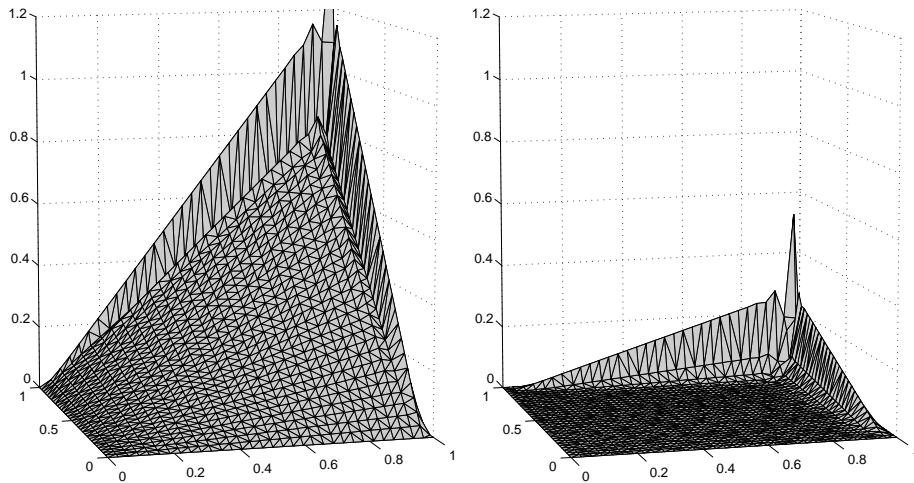


Abbildung 3.21: Diskrete Lösung und diskreter Fehler von RFB auf uniformem 32×32 -Gitter mit $\varepsilon = 0.001$. In der Grenzschicht sind Oszillationen zu sehen. Die Lösung wird in der Grenzschicht nicht so stark geglättet wie bei SUPG.

Konstante Daten

Sind die Daten b und f konstant, so kann die Formulierung (3.15) in SUPG übergeführt werden (vgl.[7]). In einer Dimension findet man

$$\tilde{\tau}_1 = \frac{h^3}{12\varepsilon}. \quad (3.17)$$

Im zweidimensionalen Fall gilt

$$\tilde{\tau}_2 = \frac{1}{|K|} \int_K \hat{\varphi}_K,$$

wobei $\hat{\varphi}_K$ das folgende Randwertproblem löst

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta \hat{\varphi}_K + b_K \cdot \nabla \hat{\varphi}_K &= 1 \quad \text{in } K \\ \hat{\varphi}_K &= 0 \quad \text{auf } \partial K. \end{aligned}$$

Der Stabilisierungsparameter $\tilde{\tau}_2$ lässt sich im konvektionsdominierten Fall durch

$$\tilde{\tau}_2 \approx \frac{1}{3} \frac{h_K^b}{|b_K|}$$

annähern, wobei $h_K^b < h_K$ die längste Seite in Flussrichtung bezeichne. Interessant wird es sein, diesen Parameter mit anderen SUPG-Parametern zu vergleichen, denn dieser ist nicht durch eine Fehlerabschätzung sondern durch den Einsatz von Bubble-Funktionen entstanden. Man sieht bereits, dass $\tilde{\tau}_2$ und der Standardparameter von SUPG $\tau = \frac{h_T}{2|b_T|}$ aus Tabelle 3.2 sehr ähnlich sind.

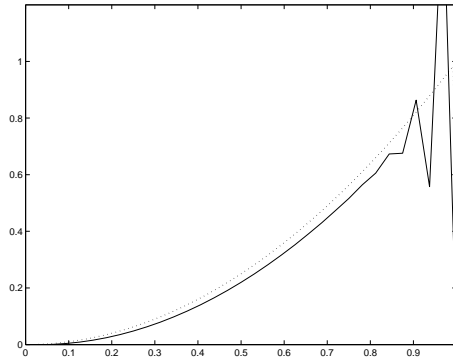


Abbildung 3.22: Spur von (3.21) bezüglich $x = y$ verglichen mit der exakten Lösung. Im Gegensatz zu SUPG wird die Lösung in der Grenzschicht nicht mehr so stark geglättet, dafür zeigen sich kleine Oszillationen. Im Rest des Gebietes ist die Lösung ungenau.

Im Falle von linearen Elementen fallen die Konvergenzeigenschaften mit denen von SUPG zusammen. Wir verweisen auf den SUPG-Abschnitt.

Numerische Resultate von RFB in der globalen H^1 -Norm

Wir lösen die Konvektions-Diffusions-Gleichung Rand-Grenzschicht-1D. Da die Daten konstant sind, können wir mit (3.17) arbeiten.

$\varepsilon = 1E - 1$			$\varepsilon = 1E - 2$			$\varepsilon = 1E - 3$		
h	$ u - u_h _{H^1}$	Quot.	h	$ u - u_h _{H^1}$	Quot.	h	$ u - u_h _{H^1}$	Quot.
2^{-1}	2.49E+0	—	2^{-1}	3.20E+0	—	2^{-1}	1.99E+0	—
2^{-2}	1.92E+0	1.2960	2^{-2}	7.05E+0	0.4542	2^{-2}	2.82E+0	0.7087
2^{-3}	1.27E+0	1.5113	2^{-3}	8.82E+0	0.8001	2^{-3}	3.83E+0	0.7358
2^{-4}	7.48E-1	1.6989	2^{-4}	8.30E+0	1.0618	2^{-4}	6.94E+0	0.5513
2^{-5}	4.09E-1	1.8283	2^{-5}	6.73E+0	1.2337	2^{-5}	1.87E+1	0.3722
2^{-6}	2.15E-1	1.9072	2^{-6}	4.67E+0	1.4427	2^{-6}	2.71E+1	0.6883
2^{-7}	1.10E-1	1.9515	2^{-7}	2.84E+0	1.6454	2^{-7}	2.73E+1	0.9945
2^{-8}	5.57E-2	1.9752	2^{-8}	1.58E+0	1.7933	2^{-8}	2.32E+1	1.1769
2^{-9}	2.80E-2	1.9874	2^{-9}	8.38E-1	1.8865	2^{-9}	1.69E+1	1.3721
2^{-10}	1.40E-2	1.9937	2^{-10}	4.32E-1	1.9402	2^{-10}	1.06E+1	1.5851
2^{-11}	7.03E-3	1.9968	2^{-11}	2.19E-1	1.9692	2^{-11}	6.08E+0	1.7522
2^{-12}	3.52E-3	1.9984	2^{-12}	1.11E-1	1.9844	2^{-12}	3.26E+0	1.8616
2^{-13}	1.76E-3	1.9992	2^{-13}	5.55E-2	1.9921	2^{-13}	1.69E+0	1.9262

Tabelle 3.5: Tabellen zum H^1 -Fehler des Problems (3.1) mit RFB. Die horizontalen Trennlinien geben den Bereich $Pe = 2$ an. Zusammenfassend lässt sich ein sehr ähnliches Fehlerverhalten wie bei SUPG beobachten.

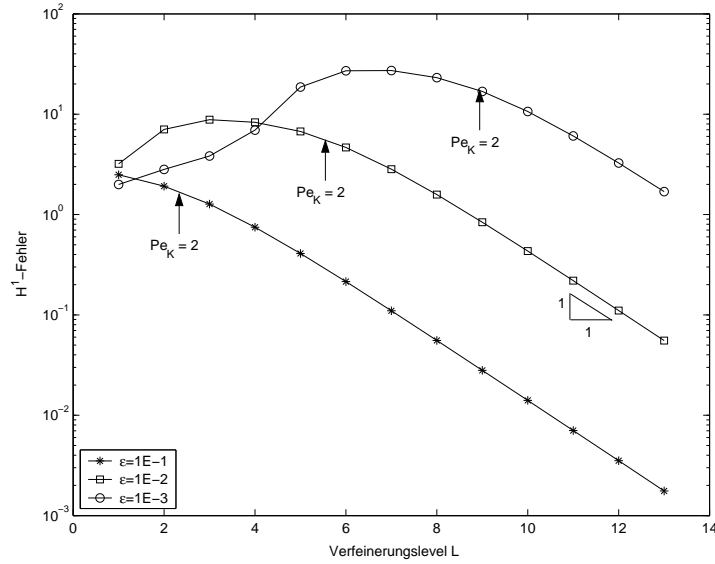


Abbildung 3.23: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D mit RFB für moderate Parameter

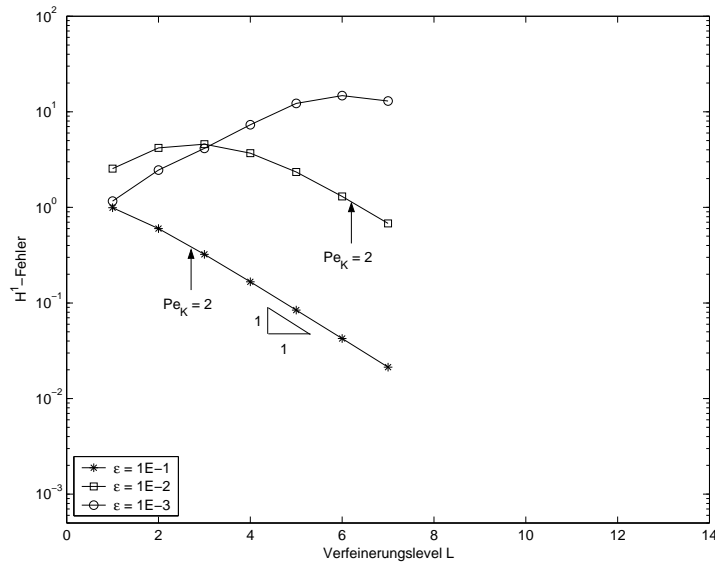


Abbildung 3.24: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit RFB für moderate Parameter

Lineare Konvergenz für festes ε und $Pe < 2$ ist sichtbar und scharf (Tabelle, Abb. (3.23)). Für sehr grosses h und $\varepsilon \rightarrow 0$ beobachten wir wie bei SUPG keine Konvergenz. Die Fehler im zweidimensionalen Fall zeigen dasselbe Verhalten wie im eindimensionalen Fall.

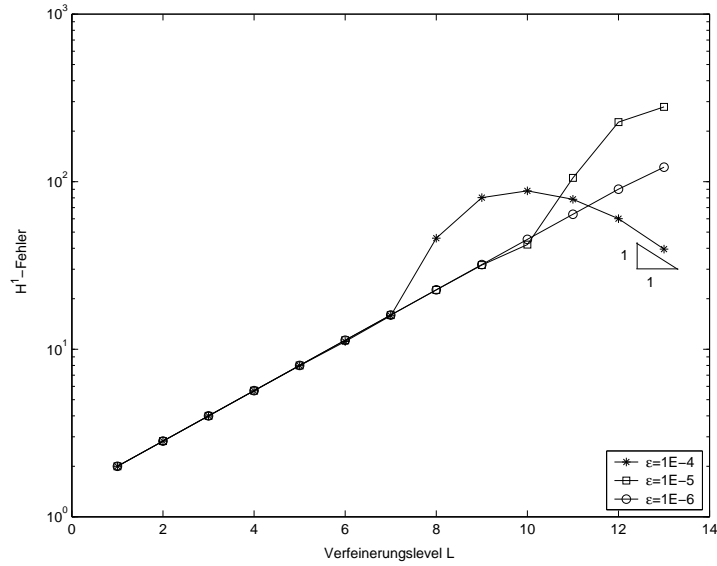


Abbildung 3.25: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D mit RFB für extreme Parameter

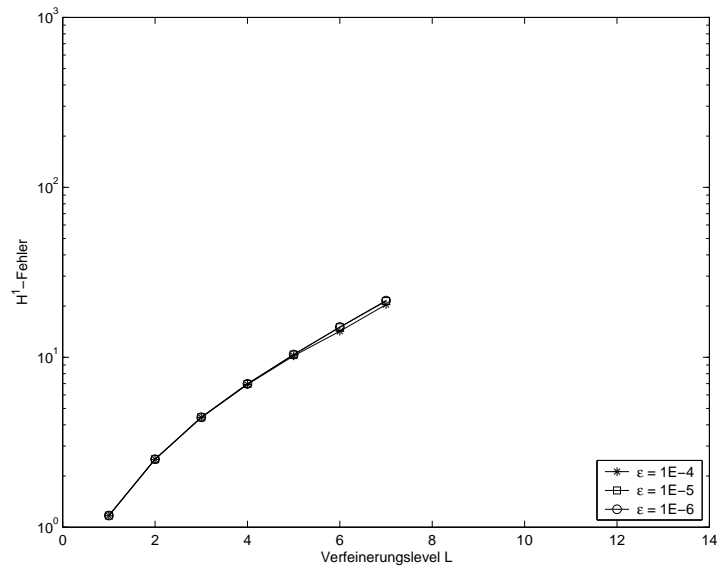


Abbildung 3.26: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit RFB für extreme Parameter

Wie SUPG zeigt auch RFB zwar im konvektionsdominierten Fall kein Konvergenzverhalten, die Fehler sind aber absolut kleiner als bei Standard-Galerkin.

Numerische Resultate von RFB in der globalen L^2 -Norm

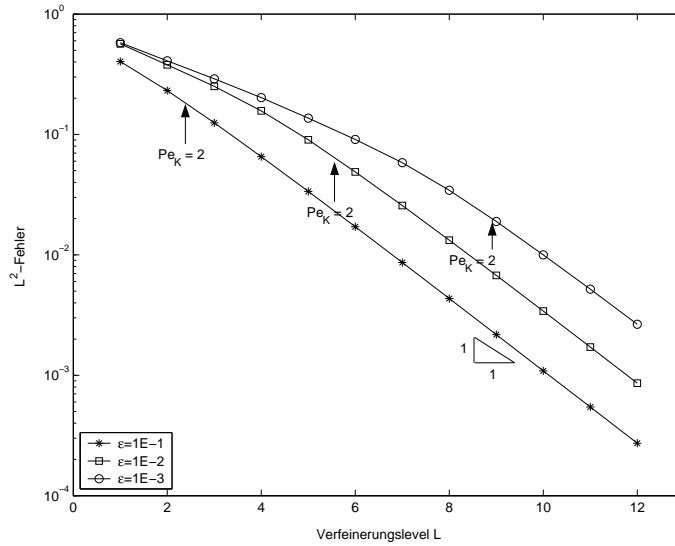


Abbildung 3.27: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D mit RFB für moderate Parameter

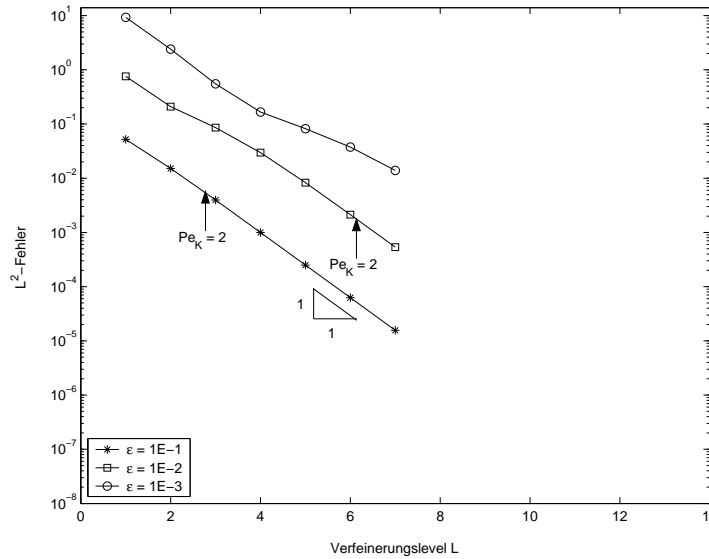


Abbildung 3.28: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit RFB für moderate Parameter

Im konvektionsdominierten Fall beobachten wir eine globale Fehlerrate von 0.5 (wie SUPG). Die Residual-Free Bubbles sind ausschliesslich für den konvektionsdominierten Fall geeignet wie die Ergebnisse zeigen: der L^2 -Fehler konvergiert im Fall $Pe < 2$ nur linear.

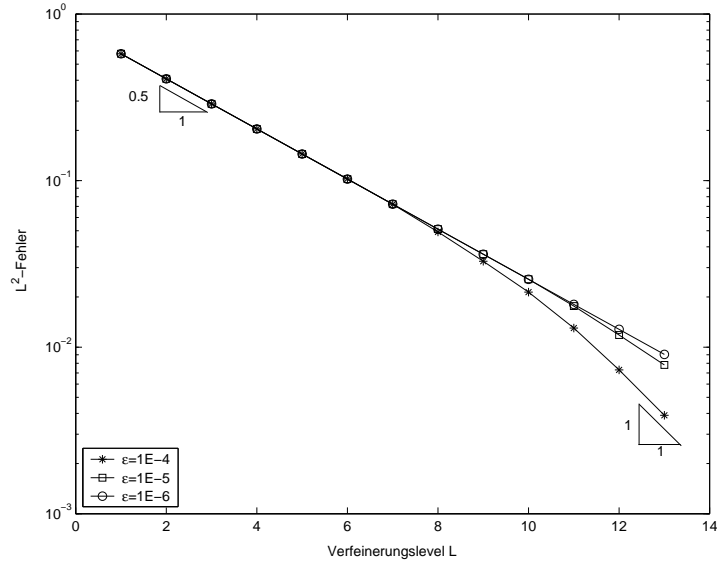


Abbildung 3.29: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D mit RFB für extreme Parameter

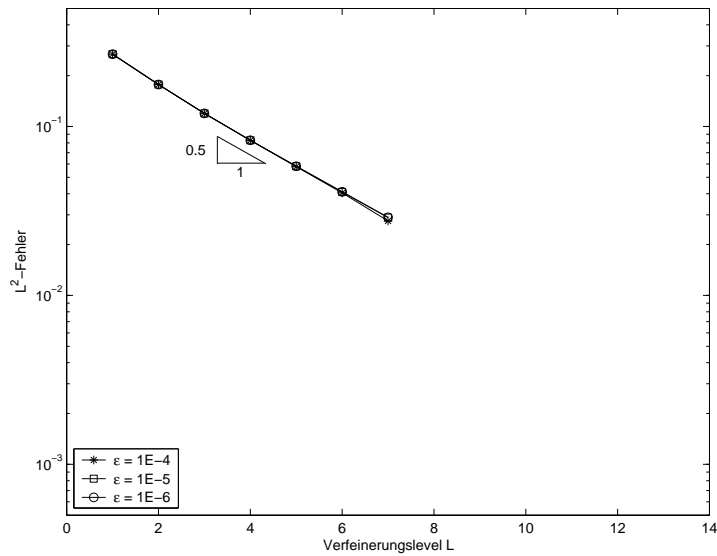


Abbildung 3.30: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit RFB für extreme Parameter

Im Bereich der externen Diffusionsparameter bleiben die absoluten L^2 -Fehler gleich gross. Wir beobachten wieder, dass im Fall $Pe < 2$ die Konvergenz nur linear ist. Im Abschnitt zu konstanten Daten haben wir gesehen, dass der SUPG Parameter von RFB in diesem Fall der festen Ordnung ch_τ ist, was diese Beobachtung bestärkt.

3.5 Exponentiell angepasste Basisfunktionen

Die Idee der *exponentiellen Basisfunktionen* besteht darin, die Basisfunktionen dem Problem anzupassen. Dabei werden die linearen Basisfunktionen in Flussrichtung verstärkt. Betrachte ein Dreieck K . Darauf seien die drei lokalen Basisfunktionen φ_k , $k = 1, 2, 3$ gegeben. x_k , $k = 1, 2, 3$ bezeichne die drei Eckpunkte des Dreiecks K und es gelte

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Zur Konstruktion der neuen Basisfunktionen wird elementweise zu jeder linearen Basisfunktion φ_k , $k = 1, 2, 3$ eine Gewichtsfunktion der Form

$$m_k(x) := B(-(Ab(x))^T(x - x_k) = B(\langle Ab(x), x - x_k \rangle)$$

definiert, wobei

$$B(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

die Bernoullifunktion sei. Die gewichteten Basisfunktionen definiert man innerhalb des Dreiecks K durch

$$\tilde{\varphi}_k := \frac{m_k \varphi_k}{m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + m_3 \varphi_3} \quad k = 1, 2, 3$$

und setzt sie ausserhalb durch die Nullfunktion fort.

Korollar 3.8. *Die gewichteten Basisfunktionen erfüllen analog zu den linearen Basisfunktionen die folgenden Bedingungen*

- Die Funktionen $\tilde{\varphi}_k$, $k = 1, 2, 3$ sind stetig und erfüllen $\tilde{\varphi}_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$.
- $0 \leq \tilde{\varphi}_k \leq 1$ für $k = 1, 2, 3$.
- $\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3 \equiv 1$ in K

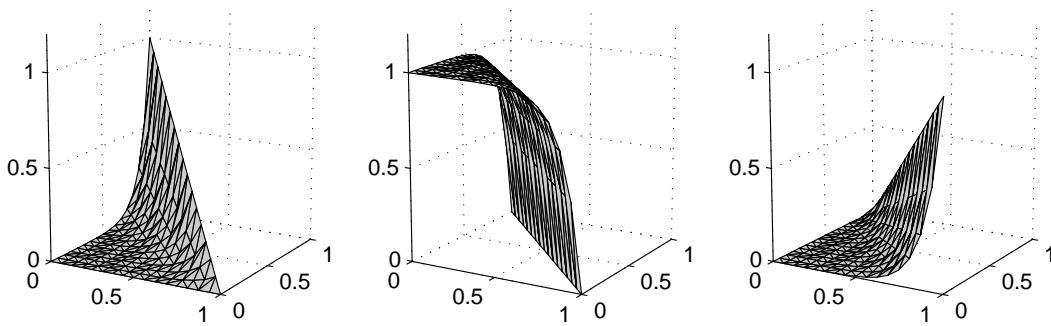


Abbildung 3.31: Die gewichteten Basis-Funktionen zum Modellproblem Rand-Grenzsicht-2D mit $\varepsilon = 0.1$. Die linearen Funktionen werden in die Flussrichtung $\vec{b} = (1, 1)^T$ verstärkt.

Die gewichteten Basisfunktionen weisen im Fall $Pe \gg 2$ nahe der Elementränder hohe Gradienten auf. Dies erfordert im Hinblick auf die Implementierung der Methode eine Modifikation. Eine Möglichkeit ist in [17] gegeben. In einer, sowie in zwei Dimensionen wird eine Möglichkeit gegeben, diese Problematik mit geeigneten Approximationen zu umgehen. Wir beschränken die Tests auf den zweidimensionalen Fall.

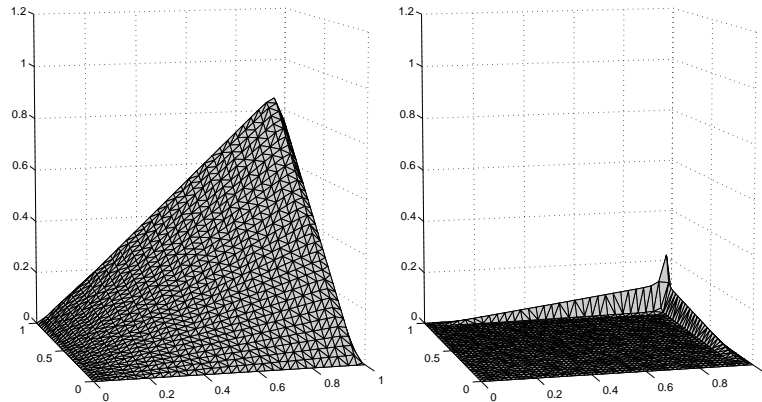


Abbildung 3.32: Diskrete Lösung und diskreter Fehler von Galerkin FEM mit gewichteten Basisfunktionen nach [17] auf uniformem 32×32 -Gitter mit $\varepsilon = 0.001$. Die Gestalt der Lösung wird gut wiedergegeben und der Fehler in der Grenzschicht scheint kleiner als bei SUPG und RFB.

Obwohl in der Formulierung in [17] die Auswertung der Gradienten von Basisfunktionen umgangen wird, treten Probleme mit Rundungsfehlern auf. In der Formulierung auftretende Terme der Form

$$e^{-h/\varepsilon}$$

werden in der testsituation ungefähr ab $h/\varepsilon > 100$ zu Null gerundet. Lösungen, bei denen $h \gg 100\varepsilon$ gilt, erfordern erhöhte Genauigkeit in der Rechner-Arithmetik. Für die Tests bis $\varepsilon = 1E - 3$ ist dieses Problem selbst für $h = 1/2$ noch nicht existent.

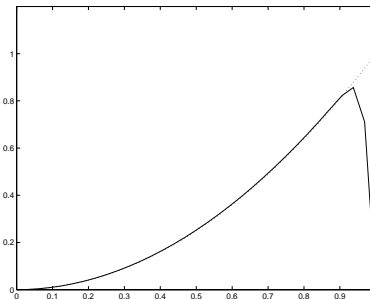


Abbildung 3.33: Spur von (3.32) bezüglich $x = y$ verglichen mit der exakten Lösung. Das Verhalten der Lösung in der Grenzschicht wird auf diesem Gitter besser wiedergegeben als bei den Upwind-Verfahren SUPG und RFB.

Numerische Resultate

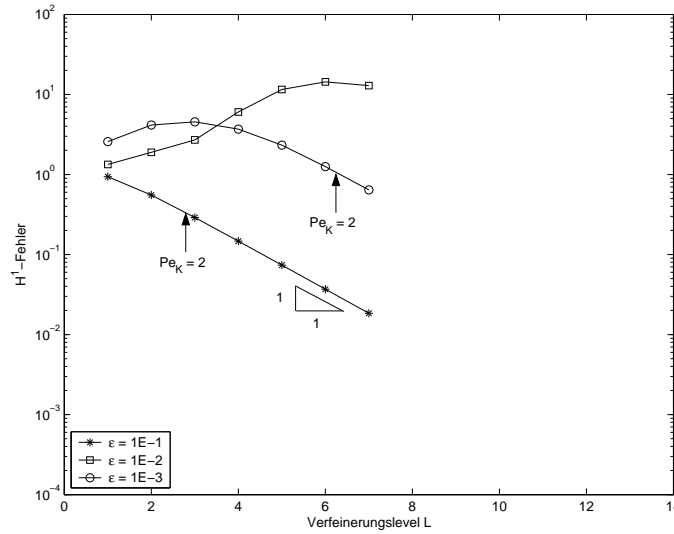


Abbildung 3.34: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit gewichteten Basisfunktionen für moderate Parameter

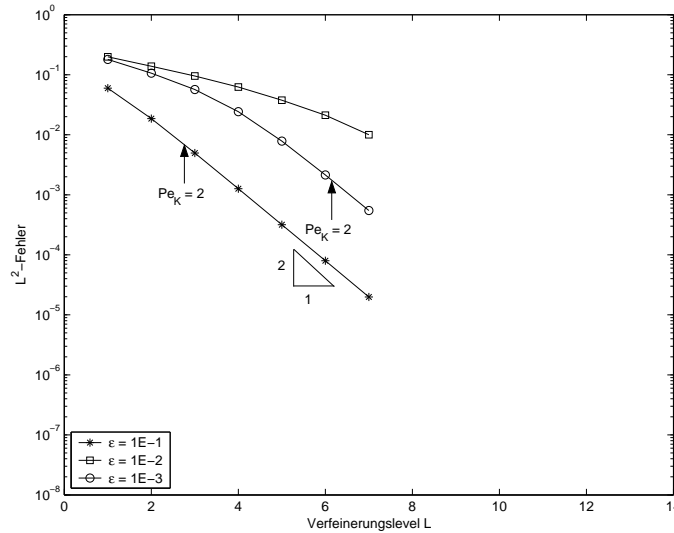


Abbildung 3.35: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit gewichteten Basisfunktionen für moderate Parameter

H^1 - und L^2 -Fehler zeigen ein Upwind-Fehlerverhalten wie etwa bei SUPG: Für $Pe < 2$ optimale Konvergenz und im Fall $Pe > 2$ reduzierte Konvergenz (L^2 -Fehler) oder keine Konvergenz (H^1 -Fehler).

3.6 Anisotrope Gitter / Shishkin-Gitter

Befassen wir uns nun mit der ersten Methode, die spezielle Gitter verwendet. Anisotrope Gitter lösen das Gebiet in der Grenzschicht besser auf als auf dem restlichen Gebiet. Dabei startet man mit einem a-priori konstruierten Gitter, das bereits dem Problem angepasst ist.

Anhand dessen lassen sich bereits die folgenden starken Bedingungen herausstreichen:

- Für eine a-priori Wahl des Gitters muss man die Bereiche der Grenzschichten kennen, was speziell für komplizierte Funktionen $b(x)$ schwierig ist. Insbesondere kann $b(x)$ als Lösung eines iterativen Problems hervorgehen (siehe Anwendung 2.7).
- Die Frage nach der Breite der Grenzschicht muss unabhängig vom konkreten Problem a-priori geklärt werden können.

Bemerkung 3.9. Im Fall der Shishkin-Gitter wird die Grenzschicht zwar je nach Feinheit des Gitters neu angepasst, aber in der Formulierung zu Wahl der Grenzschichtbreite treten nach wie vor variable Größen auf, konkret in [20]

$$\lambda_i = \min \left(\frac{1}{2}, 2 \frac{\varepsilon}{\beta_i} \log N \right), \quad i = 1, 2 \quad (3.18)$$

wobei β_i konstante, positive, untere Schranken für die Funktionen $b_i(x_1, x_2)$ sind. Die Ganzzahl $N > 4$ ist die Anzahl der Gitterpunkte in eine Koordinatenrichtung.

Wir arbeiten mit anisotropen Gittern mit a-priori festgelegter Grenzschichtbreite δ . Diese Grenzschichtbreite ist von Ordnung ε . Da wir a-priori keine weiteren Angaben kennen, sind wir gezwungen, $\delta = \varepsilon$ zu wählen.

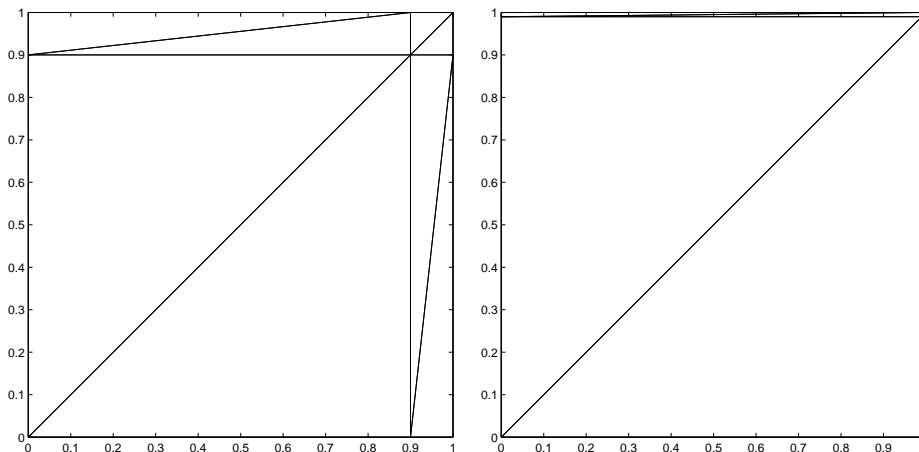


Abbildung 3.36: Die anisotropen Startgitter für das Modellproblem Rand-Grenzschicht-2D mit $\varepsilon = 0.1$ und $\varepsilon = 0.01$. Dieses spezielle Modellproblem ist für den Einsatz von anisotropen Gittern sehr gut geeignet.

Die Wahl der Grenzschichtbreite $\delta = \varepsilon$ garantiert direkt, dass in der Grenzschicht $\text{Pe}_K < c_2$ mit einer moderaten Konstante $c_2 \in \mathbb{R}$ gilt, denn

$$\text{Pe}_K = \frac{h \|b\|_{\infty, K}}{\varepsilon} = \frac{\|b\|_{\infty, K}}{c} < c_2. \quad (3.19)$$

Dies bedeutet, dass bei guter Wahl von δ bereits für grosse h und selbst bei kleinen ε keine Oszillationen auftreten.

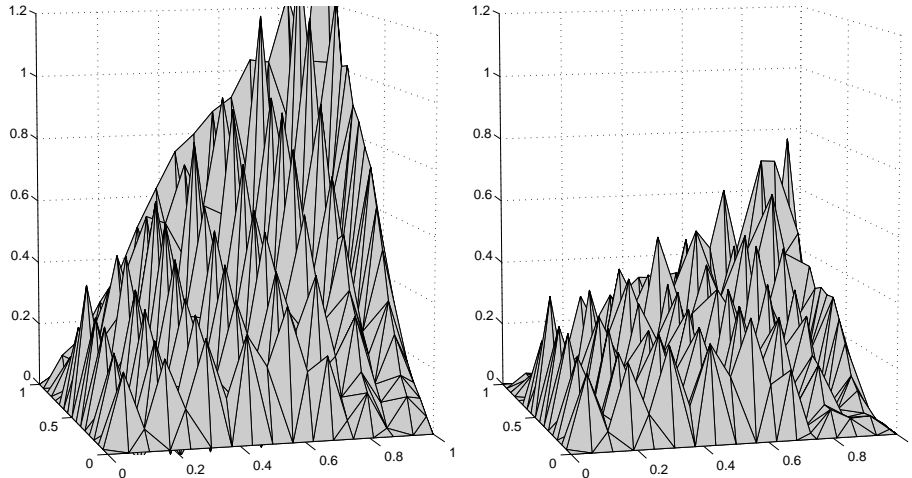


Abbildung 3.37: Diskrete Lösung und diskreter Fehler von Galerkin FEM auf anisotropem Gitter (32x32) mit $\varepsilon = \delta = 0.001$. Die Lösung gleicht stark derjenigen auf dem uniformen Gitter. Da die Breite der Grenzschicht nicht optimal gewählt werden kann (hier zu schmal), bleiben Oszillationen in der Lösung.

Der grobe Ansatz und die resultierenden Abbildungen lassen Zweifel aufkommen, ob es sich bei einer derart groben Wahl überhaupt lohnt anisotrope Gitter einzusetzen.

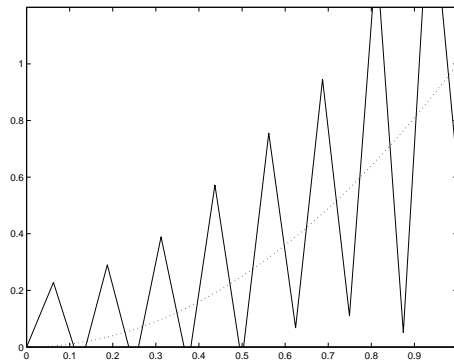


Abbildung 3.38: Spur von (3.37) bezüglich $x = y$ verglichen mit der exakten Lösung. Die diskrete Lösung ist unbrauchbar.

Bemerkung 3.10. Im Fall der Modellprobleme Rand-Grenzschicht-1D und Rand-Grenzschicht-2D können aus der exakten Lösung $u(x, y)$ den Bereich der extremen Gradienten explizit

angeben. Für die Breite der Grenzschicht gilt dann:

$$\delta = 1 - \max \{u(x, y)\} = 1 - \varepsilon \log \left(\varepsilon \left(e^{1/\varepsilon} - 1 \right) \right) \quad (3.20)$$

Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass die Breite in diesem Fall nicht mit einer festen Konstante und ε wächst. Die Frage nach einer möglichst genauen Bestimmung der Breite bleibt offen.

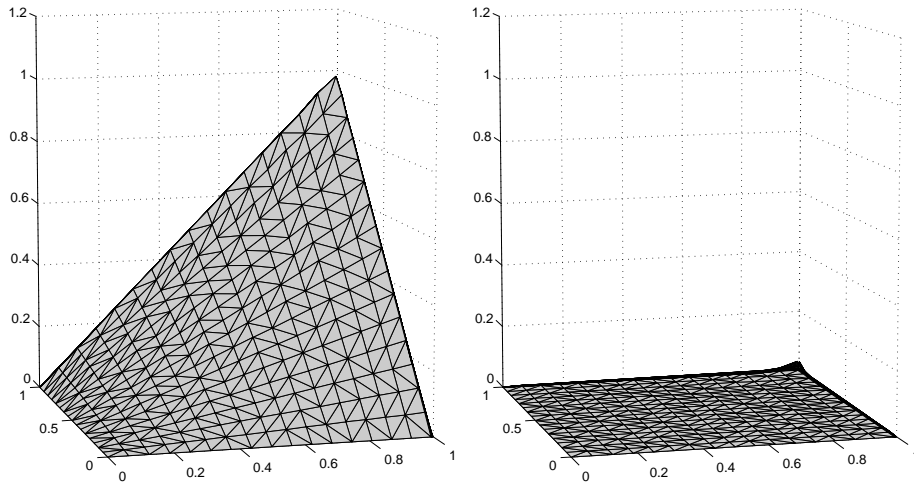


Abbildung 3.39: Diskrete Lösung und diskreter Fehler von Galerkin FEM auf anisotropem Gitter (32x32) mit $\varepsilon = 0.001$ unter Verwendung der exakten Lösung für die Wahl der Grenzschichtbreite ($\delta = 0.007$). Die optimale Grenzschichtbreite löst das Gitter innerhalb der Grenzschicht so gut auf, dass keinerlei Oszillationen mehr auftreten. Die Spur bezüglich $x = y$ verläuft bereits praktisch identisch mit der der exakten Lösung.

Wir wollen im Rahmen dieser Bemerkung die Unterschiede des Fehlerverhaltens zwischen angepasstem und a-priori Gitter vorausschicken. Die Fehler des a-priori angepassten Gitters liegen wie erwartet zwischen denen des uniformen Gitters und denen des optimal angepassten Gitters. Die Abbildungen (3.40) motivieren den Einsatz von a-priori angepassten anisotropen Gittern.

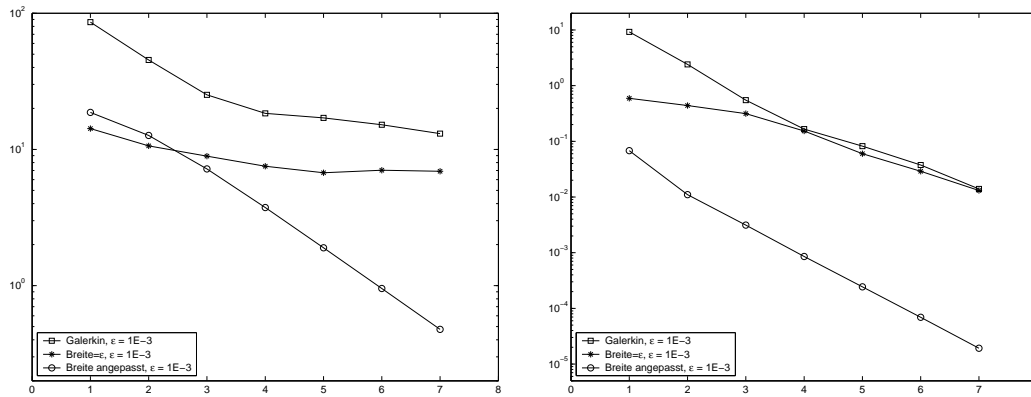


Abbildung 3.40: Vergleich von H^1 - (links) und L^2 -Fehlern (rechts) bei a-priori und angepassten anisotropen Gittern. Bezüglich den globalen Fehlern zeigen die verwendeten Gitter mit $\delta = \varepsilon$ einen Kompromiss zwischen uniformen Gittern und optimalen Gittern.

Wir schliessen die Bemerkung und beschränken uns für die Tests auf die Wahl $\delta = \varepsilon$.

Bevor wir mit den Ergebnissen beginnen, müssen wir auch dem Umstand Rechnung tragen, dass wir sehr schmale Dreiecke zulassen. Dies wirkt sich negativ auf die Kondition der Matrix aus. Die Konditionszahl der Matrix wird dabei mit einem Faktor der Grössenordnung

$$c \sim \frac{1}{\sin \varphi_{\min}}$$

skaliert, wobei φ_{\min} den minimalen Winkel des Gitters bezeichne. Da wir regelmässig verfeinern, bleiben die Winkel der Dreiecke beim Verfeinern gleich. Im Startgitter haben die Problemdreiecke bezüglich des kleinsten Winkels die Ankathete $1 - \varepsilon$ und die Gegenkathete ε . Die Hypotenuse lässt sich für sehr kleine ε durch 1 nach oben abschätzen. Dann gilt

$$c \sim \frac{1}{\sin \varphi_{\min}} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Die Konditionszahl der Matrix wird damit durch einen Faktor der Ordnung $1/\varepsilon$ skaliert, was eine Einbusse in der Genauigkeit der Lösung des Gleichungssystems zur Folge hat.

Numerische Resultate von Standard-Galerkin auf anisotropen Gittern in der globalen H^1 -Norm

Wir lösen die Konvektions-Diffusions-Gleichung Rand-Grenzschicht-1D.

$\varepsilon = 1E - 1$			$\varepsilon = 1E - 2$			$\varepsilon = 1E - 3$		
r	$ u - u_h _{H^1}$	Quot.	h	$ u - u_h _{H^1}$	Quot.	r	$ u - u_h _{H^1}$	Quot.
1	9.12E-1	—	1	3.44E+0	—	1	8.63E+0	—
2	5.92E-1	1.5387	2	4.04E+0	0.8525	2	8.39E+0	1.0293
3	3.43E-1	1.7268	3	4.25E+0	0.9498	3	8.87E+0	0.9452
4	1.84E-1	1.8631	4	3.65E+0	1.1656	4	1.04E+1	0.8536
5	9.52E-2	1.9260	5	2.59E+0	1.4087	5	1.27E+1	0.8174
6	4.83E-2	1.9690	6	1.52E+0	1.7041	6	1.38E+1	0.9205
7	2.43E-2	1.9850	7	8.02E-1	1.8949	7	1.26E+1	1.0964
8	1.22E-2	1.9926	8	4.07E-1	1.9674	8	9.58E+0	1.3156
9	6.12E-3	1.9963	9	2.05E-1	1.9897	9	5.92E+0	1.6171
10	3.06E-3	1.9982	10	1.03E-1	1.9964	10	3.19E+0	1.8586
11	1.53E-3	1.9991	11	5.13E-2	1.9986	11	1.63E+0	1.9594
12	7.66E-4	1.9995	12	2.57E-2	1.9994	12	8.17E-1	1.9892

Tabelle 3.6: Tabellen zum H^1 -Fehler des Problems Rand-Grenzschicht-1D auf anisotropem Gitter. Die horizontalen Trennlinien geben den Bereich an, wo $Pe = 2$ auf dem gesamten Gebiet gilt.

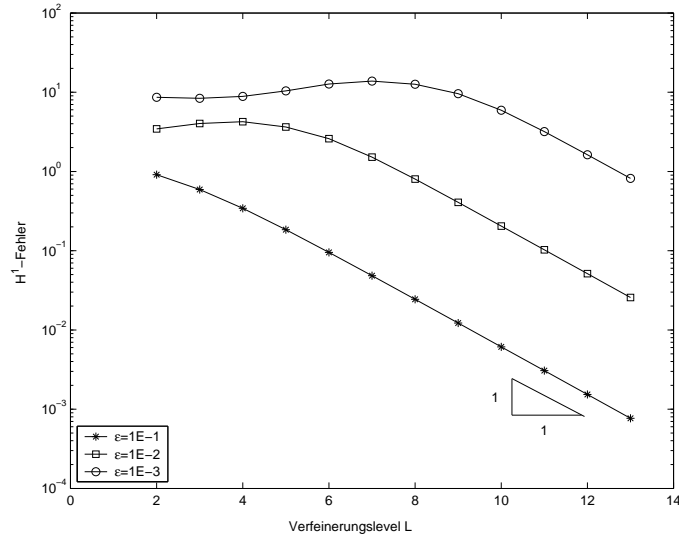


Abbildung 3.41: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D mit anisotropem Gitter für moderate Parameter

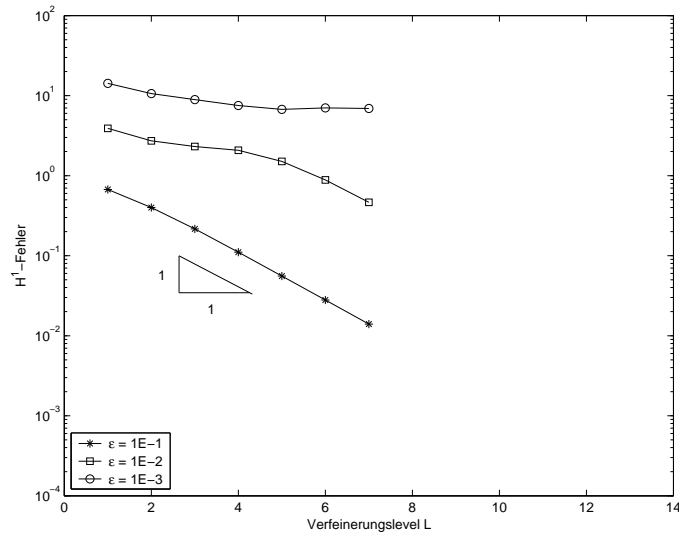


Abbildung 3.42: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit anisotropem Gitter für moderate Parameter

Das Fehlerverhalten für moderate Parameter ϵ ist dem von Standard-Galerkin auf uniformem Gitter sehr ähnlich. Die absoluten Fehler sind auf anisotropem Gitter bereits viel kleiner.

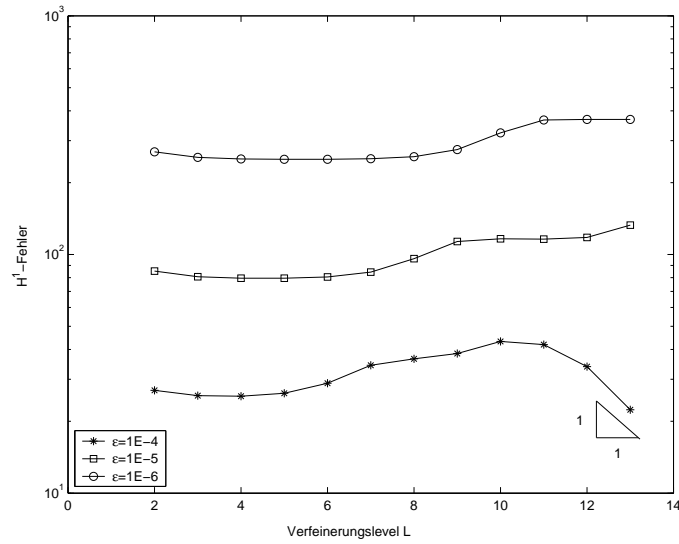


Abbildung 3.43: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D mit anisotropem Gitter für extreme Parameter

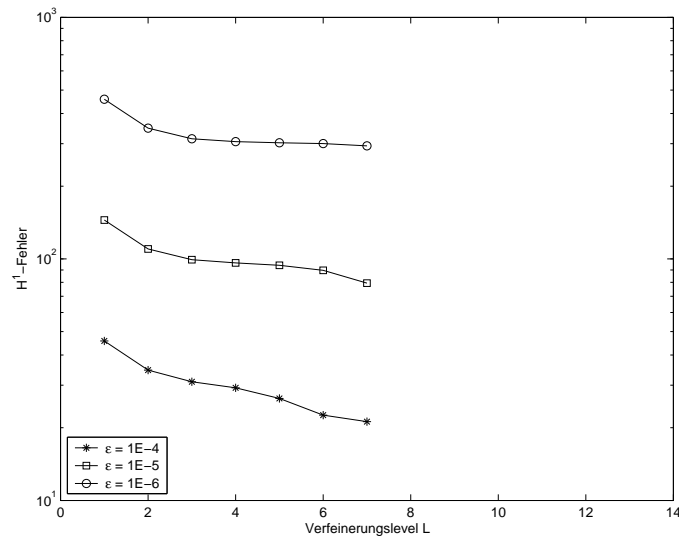


Abbildung 3.44: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit anisotropem Gitter für extreme Parameter

Im Fall extremer Parameter ist kein Konvergenzverhalten sichtbar; nicht einmal im eindimensionalen Fall. Die Abbildungen in (3.40) bestärken aber, dass sich gerade für solche Parameter der Einsatz von anisotropen gegenüber uniformen Gittern trotzdem lohnt.

Numerische Resultate von Standard-Galerkin auf anisotropen Gittern in der globalen L^2 -Norm

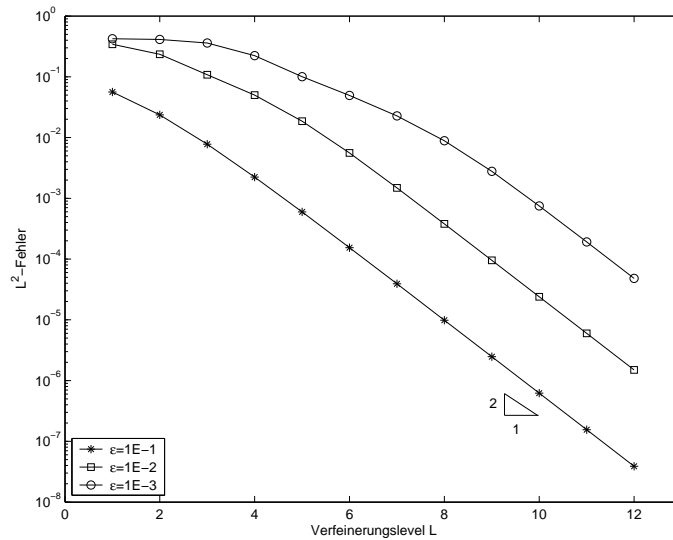


Abbildung 3.45: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D mit anisotropem Gitter für moderate Parameter

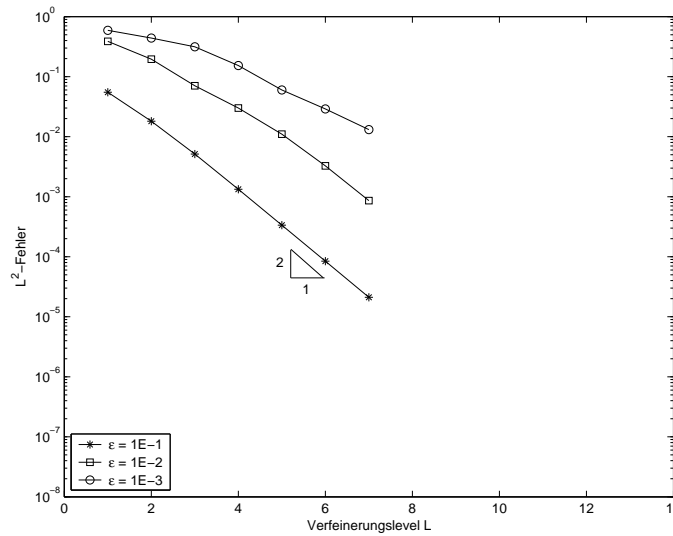


Abbildung 3.46: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit anisotropem Gitter für moderate Parameter

Auch hier zeigt sich das Standard-Galerkin L^2 -Fehlerverhalten. Man verifiziert wieder, dass die absoluten Fehler durch den Einsatz des anisotropen Gitters kleiner geworden sind.

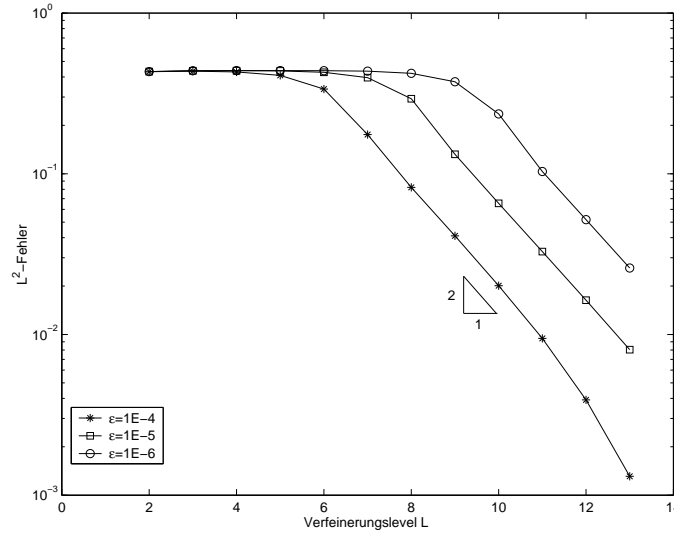


Abbildung 3.47: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-1D mit anisotropem Gitter für extreme Parameter

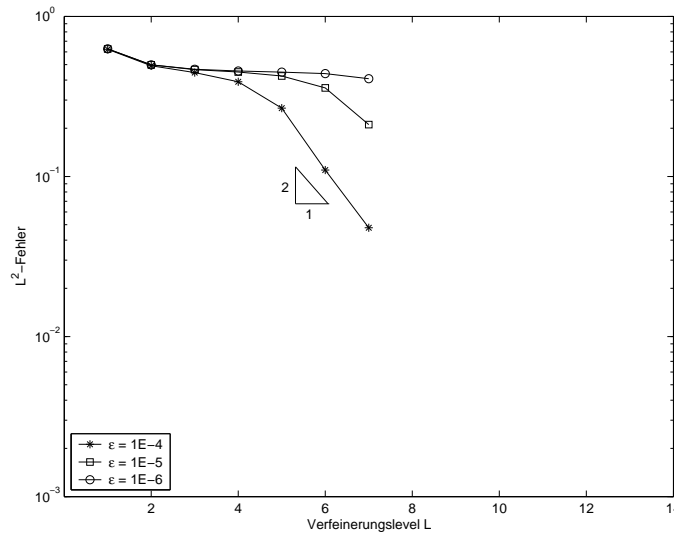


Abbildung 3.48: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D mit anisotropem Gitter für extreme Parameter

Für extreme Parameter ist erst ab einem gewissen Punkt quadratische Konvergenz ersichtlich. Es lässt sich damit beobachten, ab wann das Gitter in der Grenzschicht gut genug aufgelöst ist und die Oszillationen verschwinden; in diesem Bereich wird die Konvergenzrate optimal.

3.7 A-posteriori Verfeinerung

Da im Allgemeinen die Grenzschichten nicht a-priori lokalisiert werden können, führen wir eine adaptive a-posteriori Verfeinerungsstrategie ein. Schrittweise soll das Gitter speziell dort verfeinert werden, wo der Fehler der diskreten Lösung noch zu gross ist. Anstelle eines Fehlerschätzers führen wir einen einfachen Fehlerindikator ein, auf Grund dessen die problematischen Teile des Gebietes mit zusätzlichen Freiheitsgraden angereichert werden. Anhand dieser einfachen adaptiven Methode soll gezeigt werden, ob und wann sich adaptive Gitteranpassung lohnt.

Im Fall von Konvektions-Diffusionsgleichungen liegt es nahe, Bereiche mit hohen Gradienten zusätzlich zu verfeinern. Grosse Gradienten treten einerseits in den Bereichen auf, wo es Oszillationen gibt. Andererseits, gibt es keine grossen Oszillationen, sind die grössten Gradienten in den Grenzschichten enthalten. So wird die Methode Oszillationen bereits mit weniger Freiheitsgraden eliminieren als auf einem regelmässigen Gitter. Sei u_h die diskrete Lösung auf dem groben Gitter. Dann sei Indikator $K := |\nabla u_h|$ der Fehlerindikator auf jedem Element K .

Es stellen sich drei Fragen:

- Wie grob darf das Startgitter sein?
- Wie stark sollen die Problembereiche zusätzlich verfeinert werden?
- Kommt man nur mit Standard-Galerkin FEM aus oder braucht man Upwind-Methoden?

Die Wahl des Startgitters

Das Startgitter soll zumindest so fein sein, dass die diskreten Lösungen einigermaßen die Gestalt der exakten Lösung zeigen. Zu grobe Startgitter können dazu führen, dass die Grenzschicht unvollständig lokalisiert wird.

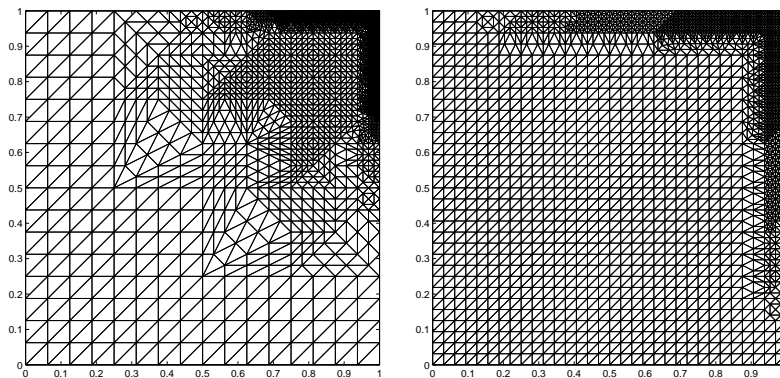


Abbildung 3.49: Zwei Gitter mit rund 2000 Freiheitsgraden. Beim linken Gitter wurde mit der a-posteriori Verfeinerung bereits beim 8x8-Gitter begonnen. Beim rechten Gitter erst beim 16x16-Gitter. Im rechten Gitter wird die Rand-Grenzschicht besser aufgelöst.

Es ist plausibel, dass die Markierung auf sehr groben Gittern noch nicht den gewünschten Effekt hat. Wir beginnen mit der speziellen Verfeinerung bei den Tests auf dem 16×16 -Gitter mit 961 Freiheitsgraden.

Die Verfeinerungstiefe

Die Verfeinerungstiefe wählen wir so, dass der Fehler in der Grenzschicht und der Fehler im übrigen Gebiet möglichst gleichmässig kleiner werden. Auf uniformen Gittern liegt vom globalen Fehler ein grosser Teil in der Grenzschicht, m.a.W wird die Grenzschicht im Gegensatz zum übrigen Gebiet zu langsam verfeinert. Verfeinern wir jedoch pro Schritt in der Grenzschicht zu stark, wird der globale Fehler zwar schnell kleiner, aber danach kommt es zu einer Stagnierung des globalen Fehlers.

Definition 3.11. Wir definieren die Verfeinerungstiefe V als die Anzahl der Dreiecke, in die das Dreieck mit dem grössten Gradientenbetrag unterteilt wird. Die Verfeinerungsstrategie (Abbildung 3.50) ist dadurch eindeutig festgelegt.

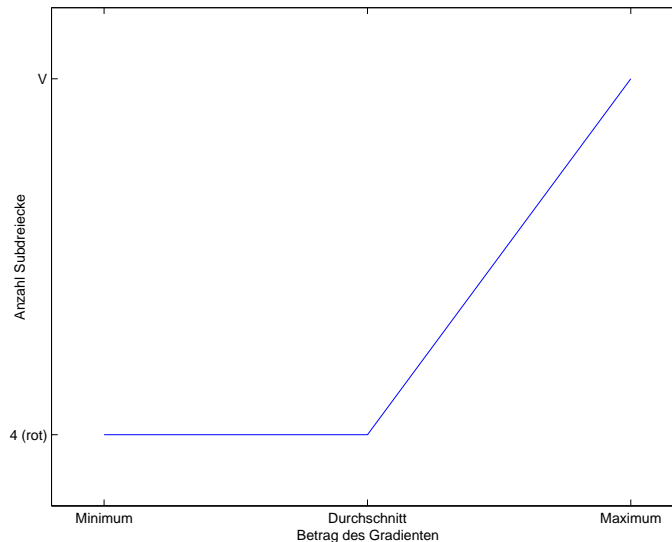


Abbildung 3.50: Die Verfeinerungsstrategie für eine Iteration.

Die numerischen Resultate zeigen, dass diese Verfeinerungstiefe nicht von ε abhängt, und dass $V = 16$ eine gute, sichere Wahl ist.

Der Einsatz von SUPG

Sei ε sehr klein (z.B. $1E-6$). Dann treten in der diskreten Standard-Galerkin Lösung auf einem groben uniformen Gitter auf sämtlichen Dreiecken Oszillationen auf, was ein effizientes Auflösen der Grenzschicht verunmöglicht. Man kommt also im Fall $0 < \varepsilon \ll 1$ nicht ohne den Einsatz von Upwind-Verfahren aus. Sie geben bereits auf einem groben Gitter eine oszillationsfreie Lösung, die sich zum Verfeinern nach Gradienten gut eignet. Dabei

schlagen wir vor, mit RFB oder einem L^2 -orientierten SUPG Parameter zu markieren. Der H^1 -optimale Parameter verglättet zu stark in der Grenzschicht. Wir verwenden für die Tests τ_{Hughes} (vgl. SUPG Abschnitt). Bleibt die Frage zu klären, wann man SUPG einsetzen soll.

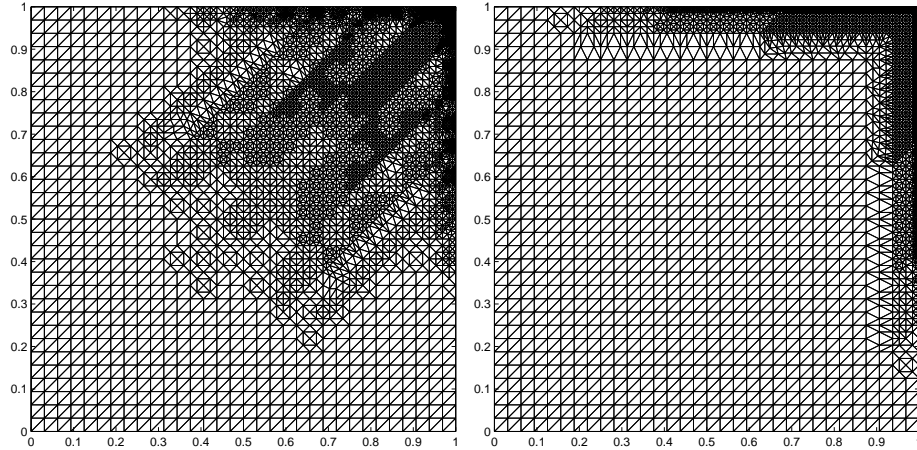


Abbildung 3.51: Motivation für den Einsatz einer Upwind-Methode bei grossen Péclet-Zahlen. Sei $\varepsilon = 0.001$. In beiden Fällen wurden zwei a-posteriori Verfeinerungsschritte mit $V = 16$ ab uniformem 16×16 -Startgitter durchgeführt. Links wurde zur Markierung Standard-Galerkin, beim rechten SUPG mit τ_{Hughes} verwendet. Man sieht, dass die Oszillationen von Standard-Galerkin, die auf dem groben Startgitter noch existieren, sich auf die Markierung der Dreiecke übertragen. Das heisst nicht, dass das Verfahren nicht funktioniert, das Auflösen der Grenzschicht ist aber nicht effizient. Im Fall von SUPG wird bereits nur noch in der Region der Rand-Grenzschicht speziell verfeinert.

Um ein Kriterium für den Einsatz von SUPG zu umgehen, könnte man SUPG immer einsetzen. Das ist aber im diffusionsdominierten Fall ($Pe_K < 2$ zumindest in der Grenzschicht) einerseits bezüglich der globalen Fehler, andererseits durch den höheren Aufwand von SUPG nicht günstig. Ein intuitives Kriterium ist, SUPG nur in den Dreiecken einzusetzen, wo lokal $Pe_K > 2$ gilt. Dies entspricht einem permanenten Einsatz von SUPG, wobei im diffusionsdominierten Fall $\tau_K = 0$ gesetzt wird. Wir haben damit bereits ein Kriterium gefunden, das einfaches Handling garantiert.

Experimentell zeigt sich, dass der selektive Einsatz von SUPG nicht in allen Belangen befriedigende Resultate liefert. Für das Modellproblem Rand-Grenzschicht-2D mit (16×16) -Startgitter und $V = 16$ zeigt sich: Für die ersten $\max\{0, \log_{10}(1/\varepsilon) - 2\}$ Iterationen lohnt sich der Einsatz von SUPG auf dem ganzen Gitter. Ab der darauffolgenden Iteration ist Standard-Galerkin die bessere Wahl. Meist weist die erste Standard-Galerkin-Lösung auf Teilen des Gebietes noch Oszillationen auf. Trotzdem lohnt es sich, bereits ohne SUPG zu lösen.

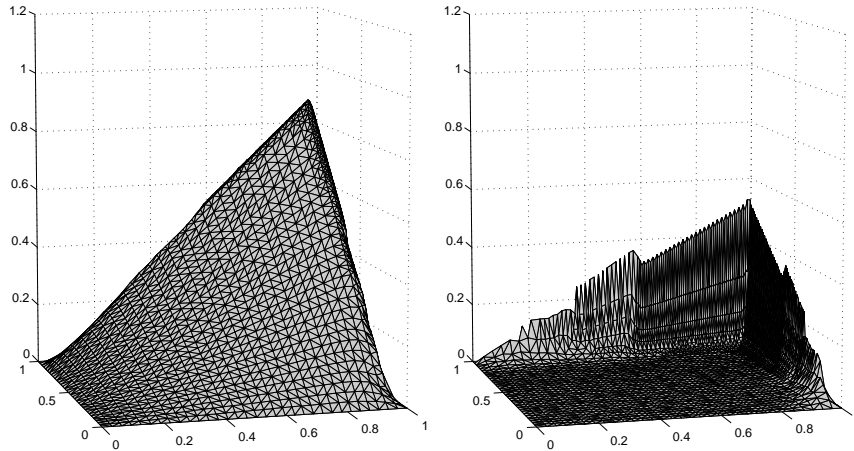


Abbildung 3.52: Diskrete Lösung und diskreter Fehler von SUPG auf angereichertem 32×32 -Gitter mit $\varepsilon = 1E - 3$. Die Gestalt der Lösung wird gut wiedergegeben. Der Fehlerplot zeigt, dass die Lösung in der Grenzschicht kleine Oszillationen aufweist.

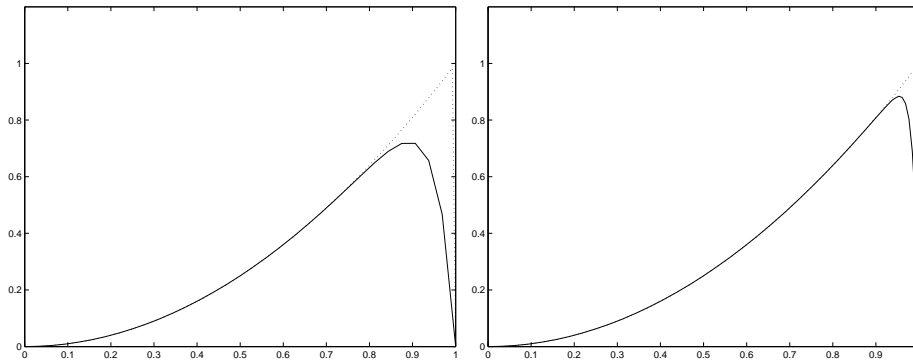


Abbildung 3.53: Spur bezüglich $x = y$ von SUPG auf uniformem 32×32 -Gitter mit 961 Freiheitsgraden und auf angereichertem 32×32 -Gitter mit mit 1521 Freiheitsgraden. Die zusätzlichen Freiheitsgrade in der Grenzschicht verbessern die Gestalt der Lösung. Damit verbessert sich in diesem konkreten Beispiel der globale L^2 -Fehler, nicht aber der globale H^1 -Fehler.

Wir zeigen die Wirkung der Methode noch an einem weiteren Modellproblem: *Skew Advection*. Wir lösen das Konvektions-Diffusionsproblem

$$-\varepsilon \Delta u + b \nabla u = 0 \quad \text{in } \Omega \in \mathbb{R}^2 \quad (3.21)$$

mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{b} = (1, 4)^T$ schräg zum Gitter. Für $y = 0$ seien die folgenden Randwertbedingungen vorgegeben:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{4} - \lambda] \\ \frac{x - \lambda - 1/4}{2\lambda}, & \text{falls } x \in [\frac{1}{4} - \lambda, \frac{1}{4} + \lambda] \\ 0, & \text{falls } x \in [\frac{1}{4} + \lambda, 1], \end{cases} \quad (3.22)$$

Dabei sei $0 < \lambda \ll 1$. Die Kante $x = 0$ sei eine homogene Neumann-Randkante. Die beiden übrigen Randkanten $y = 1$ und $x = 1$ seien homogene Dirichlet-Randkanten.

Dieses Modellproblem führt auf zwei Typen von Grenzschichten: Innerhalb von Ω bildet sich längs der Gerade $y = 4x - 1$ eine innere Grenzschicht (siehe Modellproblem *RotFlow* im nächsten Kapitel). Dazu haben wir nahe der Randkante $y = 1$ für $x < \frac{1}{2}$ ein Rand-Grenzschicht im Sinne des Rand-Grenzschicht-Modellproblems.

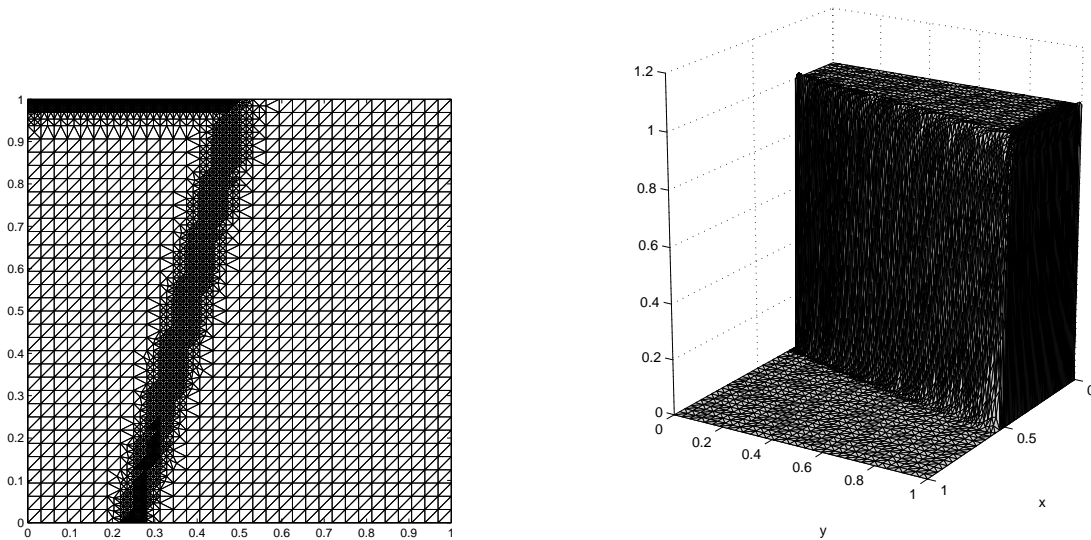


Abbildung 3.54: Gitter und diskrete Lösung des vorgestellten Problems auf adaptiv verfeinertem Gitter, wobei $\varepsilon = 1E - 3$. Beide Grenzschichttypen wurden automatisch lokalisiert und mit zusätzlichen Freiheitsgraden versehen. Das uniforme Gitter enthielt 961 Freiheitsgrade, das angereicherte Gitter 1778 Freiheitsgrade. Eine oszillationsfreie Lösung mit der Standard-Galerkin-Methode ist bei $\varepsilon = 1E - 3$ auf uniformem Gitter in der Testsituation bis rund 260'000 Freiheitsgrade nicht möglich.

Wir zeigen den Effekt der Methode auch für das neue Modellproblem auf einem groben Gitter. Dazu vergleichen wir Querschnittplots der Lösung auf uniformem 16×16 -Gitter mit

der Lösung auf adaptiv verfeinertem Gitter. Zentral ist das Verhalten der Lösungen in den Grenzschichten.

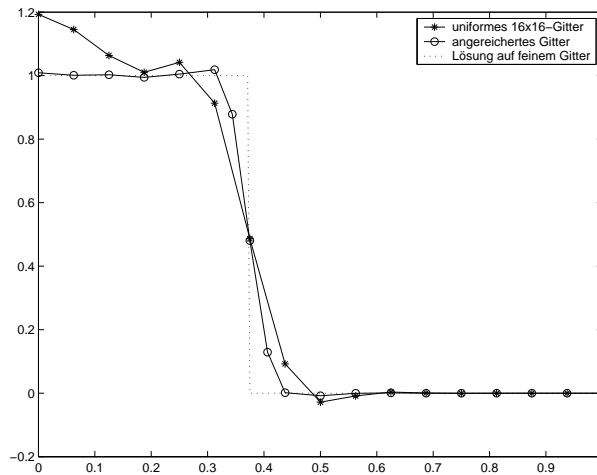


Abbildung 3.55: (Innere Grenzschicht) Spur der SUPG-Lösung bezüglich $y = 0.5$. Die Grenzschicht braucht offensichtlich noch mehr Freiheitsgrade, um die Gestalt der guten Lösung wiederzugeben. Im Vergleich zur Lösung auf dem uniformen Gitter lohnt sich das Anreichern erkennbar.

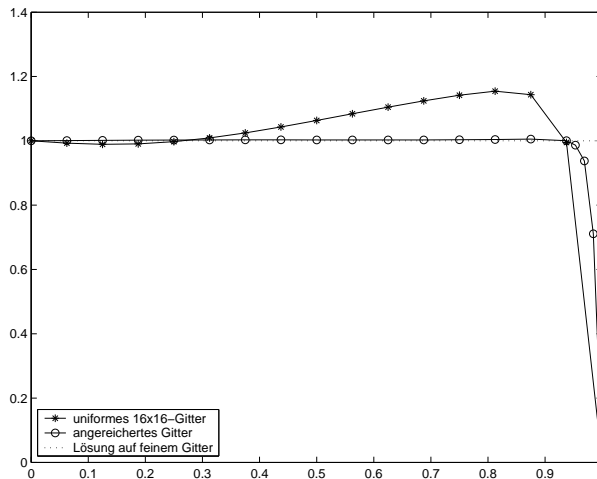


Abbildung 3.56: (Rand-Grenzschicht) Spur der SUPG-Lösung bezüglich $x = 0.125$. Die Lösung auf dem uniformen Gitter wird durch die adaptive Gitterfeinerung stark verbessert.

In den Vergleichen auf grobem Gitter wird die Notwendigkeit von Gitteranpassung deutlich. In einer Anwendung mit sehr kompliziertem Gebiet hat man bereits im Startgitter sehr viele Freiheitsgrade und kann das Gitter uniform nicht mehr oft verfeinern. Für solche Fälle sind a-posteriori Verfeinerungsstrategien sehr zu empfehlen. Nur so können die Grenzschichten einigermaßen aufgelöst werden.

Zusammenfassung: Der Algorithmus für die Konvergenztests

Sei ε fest vorgegeben. Wir starten mit einem (16x16)-Startgitter.

Iteration Jeder Iterationsschritt besteht aus zwei Teilen. Für $i = 1, 2, \dots$:

1. Falls

$$i \leq \max \{0, \log_{10}(1/\varepsilon) - 2\}, \quad (3.23)$$

verwenden wir SUPG mit τ_{Hughes} . Andernfalls verwenden wir Standard-Galerkin FEM.

2. Mit unserem Fehlerindikator, der auf dem Betrag des Gradienten der diskreten Lösung basiert, verfeinern wir die Dreiecke nach der Strategie von Abbildung (3.50) mit $V = 16$.

Bemerkung 3.12. Für die Konvergenztests wurden auch die Fehler auf größeren Gittern als 16x16 miteinbezogen. Die dritte Markierung von links zeigt die erste Lösung, die als Fehlerindikator benutzt wurde. Die vierte Markierung ist jeweils die erste Lösung auf a-posteriori verfeinertem Gitter.

Bemerkung 3.13. Von den verwendeten Methoden Standard-Galerkin und SUPG sind die theoretischen Konvergenzresultate bekannt. Damit kann man aber nicht auf das Konvergenzverhalten der a-posteriori Methode schliessen, was eindeutig als Nachteil des vorgestellten Verfahrens zu vermerken ist.

Bemerkung 3.14. In den Konvergenztests wurde die Gesamtzahl der Iterationen von der Speicher-Kapazität des Rechners begrenzt. In der Praxis wird die Iterationszahl entweder von der gewünschten Genauigkeit (dazu braucht man a-posteriori Fehlerschätzer als Abbruchkriterium) oder von der gewünschten Gestalt der Lösung bestimmt.

Im Fall eines komplizierten Startgitters mit sehr vielen Freiheitsgraden ist unter Umständen nur ein a-posteriori Verfeinerungsschritt möglich. Um vor allem in den Grenzschichten eine möglichst gute Lösung zu erreichen wird man V grösser wählen und nur einmal verfeinern.

Numerische Resultate der a-posteriori Methode in der globalen H^1 -Norm

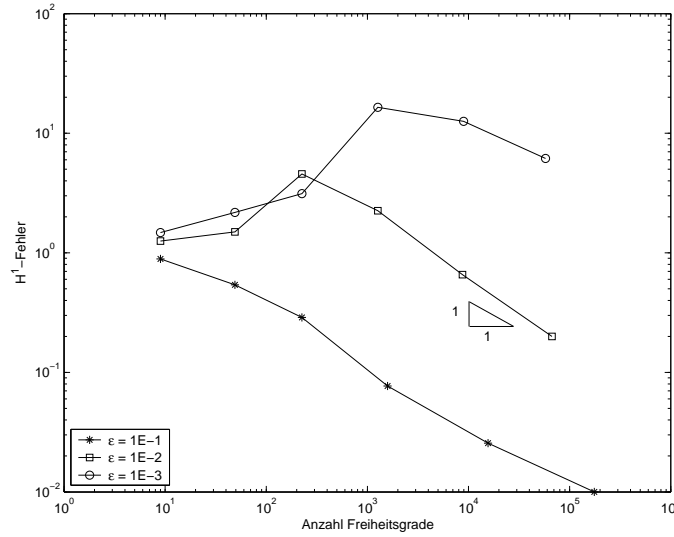


Abbildung 3.57: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D für moderate Parameter

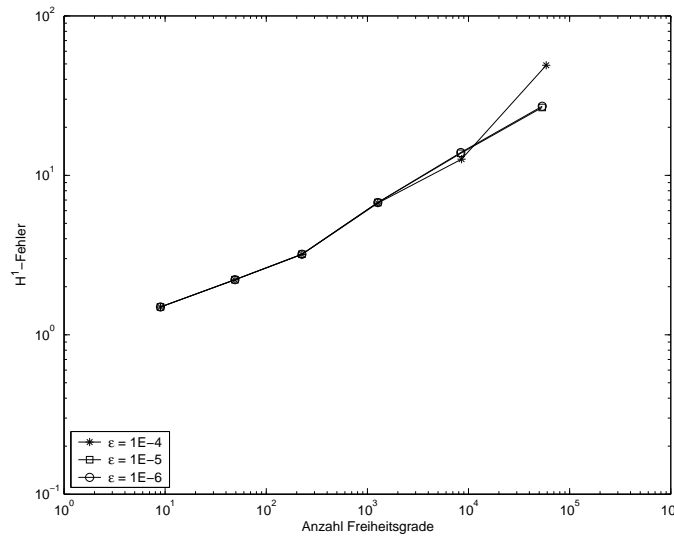


Abbildung 3.58: H^1 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D für extreme Parameter

Das H^1 -Fehlerverhalten der Upwind-Methoden ist erkennbar. Die Fehler fallen aber schneller in den Konvergenzbereich, was neben den angepassten Gittern auch mit dem Einsatz von Standard-Galerkin zusammenhängt. Die Fehlerraten sind im Konvergenzbereich stabil.

Numerische Resultate der a-posteriori Methode in der globalen L^2 -Norm

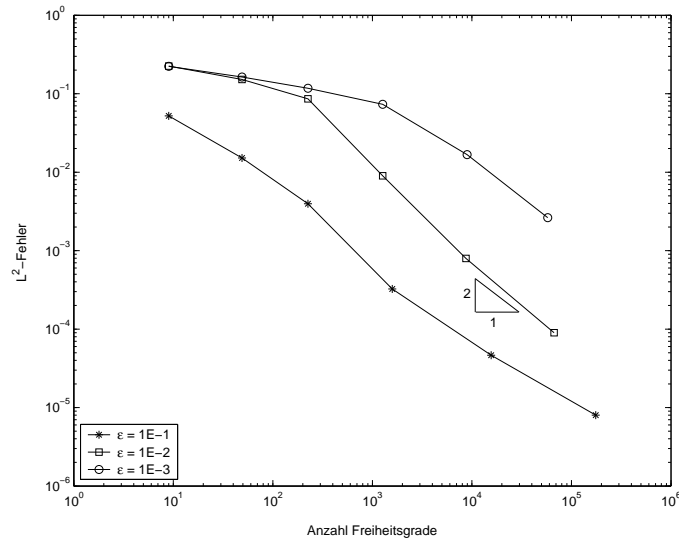


Abbildung 3.59: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D für moderate Parameter

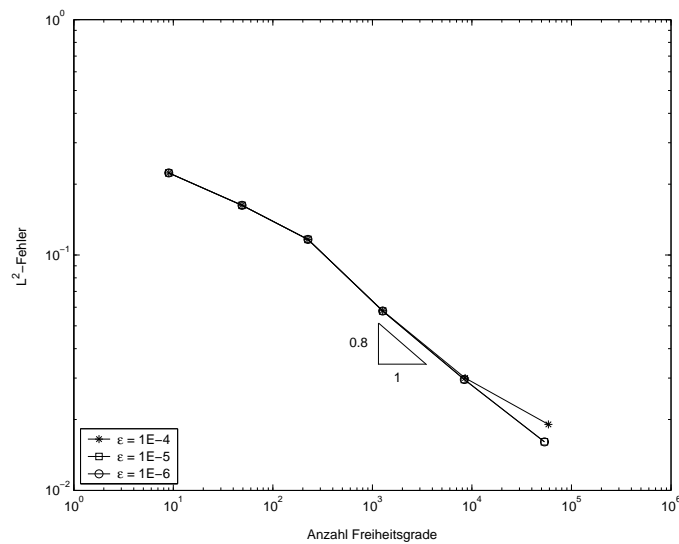


Abbildung 3.60: L^2 -Fehler von Rand-Grenzschicht-2D für extreme Parameter

Das Konvergenzverhalten in der L^2 -Norm der Methode zeigt auch ein verbessertes Upwind-Verhalten. Im konvektionsdominierten Fall sind die Fehlerraten etwas besser. Der quadratische Konvergenzbereich setzt früher ein.

Fazit: Die adaptive Verfeinerung in der Grenzschicht verbessert die Auflösung innerhalb der Grenzschicht und den L^2 -Fehler. Bezüglich des H^1 -Fehlers gibt es aber keine Verbesserungen verglichen mit SUPG.

Kapitel 4

Aufwand der Methoden

4.1 Rechenzeit

Um qualitative Vergleiche der Methoden durchführen zu können, untersuchen wir die Rechenzeit der Verfahren. Genauer wollen wir die Assemblierungszeiten und Total-CPU-Zeiten vergleichen, die bei gegebener Anzahl Freiheitsgrade benötigt werden. Wir erwarten

- Die Stabilisierung durch Addition zusätzlicher Terme ist teurer.
- Bei einer gegebenen schwachen Formulierung und hinreichend grosser Anzahl Freiheitsgrade wird die Assemblierungszeit proportional zur Anzahl Freiheitsgrade anwachsen.

Der Assemblierungsaufwand der Methoden, die das Gitter auflösen, stimmen bei fester Anzahl Freiheitsgrade mit demjenigen von Standard-Galerkin auf uniformem Gitter überein. Uns interessiert der Mehraufwand, den wir bei den Upwind-Methoden in Kauf nehmen müssen.

# Freiheitsgrade	Standard	SUPG	RFB	EF
49	28	78	47	94
225	99	187	172	343
961	382	827	750	1437
3969	1685	3590	3332	6043
16129	8738	16454	13944	24907
65025	33961	74940	60333	101130
261121	176274	270103	256625	393795
Faktor	1	1.532	1.456	2.124

Tabelle 4.1: Vergleich der Assemblierungszeiten. Die gemessenen Zeiten sind in Millisekunden angegeben.

# Freiheitsgrade	Standard	SUPG	RFB	EF
49	57	110	62	110
225	170	281	250	437
961	665	1186	1093	1858
3969	2988	5183	4809	7870
16129	14799	23835	2112	33168
65025	63093	109389	9546	138983
261121	332830	471545	440807	596044
Faktor	1	1.417	1.324	1.791

Tabelle 4.2: Vergleich der Total-CPU-Zeiten. Die gemessenen Zeiten sind in Millisekunden angegeben.

Die in Tabelle (4.1) zusammengestellten Assemblierungszeiten bestätigen die Erwartungen. Die beiden Methoden SUPG und RFB benötigen eine sehr ähnliche Assemblierungszeit, während die Auswertung der gewichteten Basisfunktionen der EF Methode offenbar schwerer ins Gewicht fällt. Zusammenfassend kann man bemerken, dass Upwind-Methoden bei gegebener Anzahl Freiheitsgrade ungefähr die anderthalbfache Rechenzeit benötigen, und die Methode der exponentiellen Basisfunktionen knapp die doppelte Rechenzeit benötigt.

Bemerkung 4.1 (Quadratur). Während des Assemblierungsvorgangs müssen Integrale berechnet werden. Dies geschieht durch Annäherung mit Quadraturformeln, was eine Störung der Finite-Elemente-Methode zur Folge hat. Ist die Genauigkeit des Quadraturverfahrens zu gering, kann die Konvergenzordnung beeinflusst werden. Der Aufwand der Assemblierung hängt linear vom Aufwand des Quadraturverfahrens ab. Daher lohnt es sich, eine möglichst einfache Formel zu verwenden, die keine Konvergenzveränderungen zur Folge hat. Meist ist bei linearen Elementen bereits die Kantenmittelpunktsregel gut genug. Auf Grund spezieller Funktionen auf der rechten Seite bei Rand-Grenzschicht-2D wurde bei allen Tests für alle Integrale eine 4-Punkt Gaussformel verwendet.

4.2 Implementierungsaufwand

Zunächst muss geklärt werden, wie der Implementierungsaufwand gemessen werden soll. Wir nehmen an, Standard-Galerkin stehe zur Verfügung. Weiter sei ein Paket zur Gitterverfeinerung gegeben. Den Aufwand, die verschiedenen Methoden unter diesen Umständen zu implementieren, wollen wir als Implementierungsaufwand vergleichen.

SUPG

Hier fällt der geringste Implementierungsaufwand an. Lediglich die Methode zur Element-Assemblierung muss ergänzt werden. Dabei kann die Methode zur elementweisen Assemblierung von Standard-Galerkin zuerst durchlaufen werden, und es bleiben lediglich die zusätzlichen Terme dazu zu addieren. Daneben braucht es eine Methode, die zu gegebenen Parametern den Wert von τ zurückgibt.

RFB

Auch bei RFB kommen zwei zusätzliche Terme zur Standard-Galerkin Methode dazu. Um diese (elementweise) zu berechnen, muss zu einem Punkt x im Element K der Einflusspunkt x^- berechnet werden. Effizienter Code verlangt hier keinen erheblichen Aufwand.

Exponentielle Basisfunktionen

Der Implementierungsaufwand der Methode mit exponentiellen Basisfunktionen ist erheblich höher. Bereits die Implementierung der neuen Basisfunktionen erfordert einige Kniffe und es müssen mehrere Funktionen ausgewertet werden. Dazu kommt die Implementierung einer Methode um die Fluxterme auszuwerten und die Berechnung von Randintegralen durch Quadratur.

Anisotrope Gitter

Am besten, man beschränkt sich darauf, ein passendes, grobes Startgitter einzulesen. Damit fällt kein zusätzlicher Implementierungsaufwand an. Es ist auch denkbar, zu einem Problem das zugehörige anisotrope Gitter zu erzeugen bevor man das Problem löst.

Adaptive Verfeinerung

Durch den Einsatz bestehender Pakete für die Bearbeitung des Gitters ist auch dieser Implementierungsaufwand sehr klein. Lediglich der a-posteriori Fehlerindikator muss implementiert werden. Natürlich kann diese Rechnung je nach Fehlerschätzer sehr aufwändig zu implementieren sein. In unserem Fall sind nur Gradienten linearer Funktionen zu berechnen.

Kapitel 5

Numerischer Vergleich der Methoden

In diesem Abschnitt vergleichen wir die verschiedenen Methoden. Zunächst vergleichen wir die absoluten Fehler der Methoden zu einer festen Anzahl Freiheitsgrade, wie wir sie im Kapitel über die Konvergenz berechnet haben. Wir betrachten zwei Modellprobleme:

- **Modellproblem A: Rand-Grenzschicht-2D.** Als Repräsentanten für Randschichten benutzen wir das Modellproblem A, das wir zur Konvergenzanalyse benutzt haben.
- **Modellproblem B: Rotating Flow** (innere Grenzschicht). Auch im Inneren des Gebietes können Grenzschichten auftreten. Wir führen zur Analyse das Modellproblem B *Rotating Flow* ein.

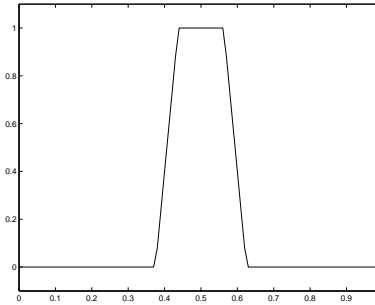
Sei $\Omega := [0, 1] \times [-1, 1]$. Das Modellproblem sei wieder durch die Gleichung

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u + b \cdot \nabla u &= f && \text{in } \Omega \\ u(x, y) &= 0 && \text{auf } \Gamma_{D,0} \\ u(x, y) &= \xi(y) && \text{auf } \Gamma_{D,\xi} \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned} \tag{5.1}$$

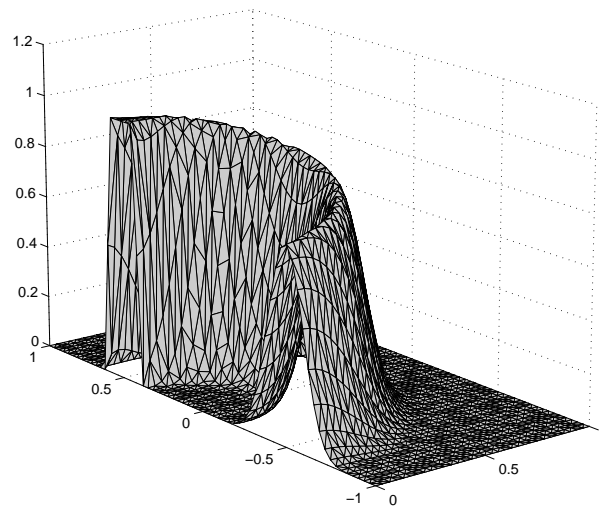
beschrieben, wobei $b = (y, -x)$ und $f = 0$. Auf der linken Randkante seien gemischte Randbedingungen gegeben. Es gelte $\Gamma_N := \{(0, y) \in \Omega \mid y < 0\}$, $\Gamma_{D,\xi} := \{(0, y) \in \Omega \mid y \geq 0\}$. Der restliche Rand sei homogener Dirichlet-Rand (alle Randkanten ausser der linken), also $\Gamma_{D,0} := \Gamma_\Omega \setminus (\Gamma_{D,\xi} \cup \Gamma_{D,0})$.

Bleibt die Funktion für den inhomogenen Rand $\Gamma_{D,\xi}$ vorzugeben:

$$\xi(y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } y \in [0, \frac{3}{8}) \\ 16y - 6, & \text{falls } y \in [\frac{3}{8}, \frac{7}{16}) \\ 1, & \text{falls } y \in [\frac{7}{16}, \frac{9}{16}) \\ -16y + 10, & \text{falls } y \in [\frac{9}{16}, \frac{5}{8}) \\ 0, & \text{falls } y \in [\frac{5}{8}, 1] \end{cases} \tag{5.2}$$

Abbildung 5.1: Die Funktion $\xi(y)$

Damit haben wir ein Modellproblem mit variabler Konvektion b . Dazu kommt die Besonderheit, dass auch für $\varepsilon = 0$ das Problem stetig lösbar ist. Das Modellproblem Rotating Flow ist regulär gestört.

Abbildung 5.2: Die exakte Lösung des Modellproblems Rotating Flow für $\varepsilon = 0.001$.

Die Oszillationen fallen im Fall von inneren Grenzschichten deutlich harmloser aus als bei Rand-Grenzschichten. Die Stabilisierungstechniken, insbesondere die Upwind-Methoden werden besonders in Frage zu stellen sein.

Es fallen bei diesem Modellproblem zwei Methoden weg. Einerseits ist eine a-priori Anpassung des Gitters schwierig. Dazu ist die Methode mit den exponentiellen Basisfunktionen für die variable Konvektion nicht geeignet. Ein weiterer Unterschied zum ersten Modellproblem kommt noch dazu, da wir die exakte Lösung des Problems nicht kennen. Die Fehlerberechnung wurde durch Vergleich mit Lösungen von Problemen auf feineren Gittern durchgeführt. Dadurch können die Unregelmässigkeiten in den Fehlerplots erklärt werden. Trotz der besseren Resultate von Standard-Galerkin wurde bei der a-posteriori Methode der Einsatz von SUPG genau so durchgeführt, wie in der Präsentation vorgeschlagen.

Wir beginnen das Kapitel zu Rotating Flow mit Spur-Plots, die Aufschluss über das Verhalten der Lösungen der Verfahren in der inneren Grenzschicht geben.

In den Tests betrachten wir ausschliesslich den konvektionsdominierten Fall $Pe > 2$. Im Fall $Pe < 2$ treten keine Oszillationen auf. Der Einsatz von problemangepassten Gittern ist sinnvoll, der Einsatz von Upwind-Techniken nicht. Bleiben wir also im interessanten Fall $Pe > 2$.

Bei den einzelnen Modellproblemen betrachten wir jeweils die zwei Fälle $\varepsilon = 1E - 3$ und $\varepsilon = 1E - 6$. Die Grafiken zeigen jeweils den Fehler in Abhängigkeit der Anzahl Freiheitsgrade. Die Fehler in Abhängigkeit der CPU-Zeiten ergeben praktisch die gleichen Aussagen, da die Upwind-Verfahren nur um eine Konstante länger brauchen. Bei der a-posteriori Verfeinerung kann man dazu die Zeit zum Markieren vernachlässigen.

5.1 Modellproblem A: Problem Rand-Grenzschicht-2D

H^1 -Fehler in Abhängigkeit der Anzahl Freiheitsgrade

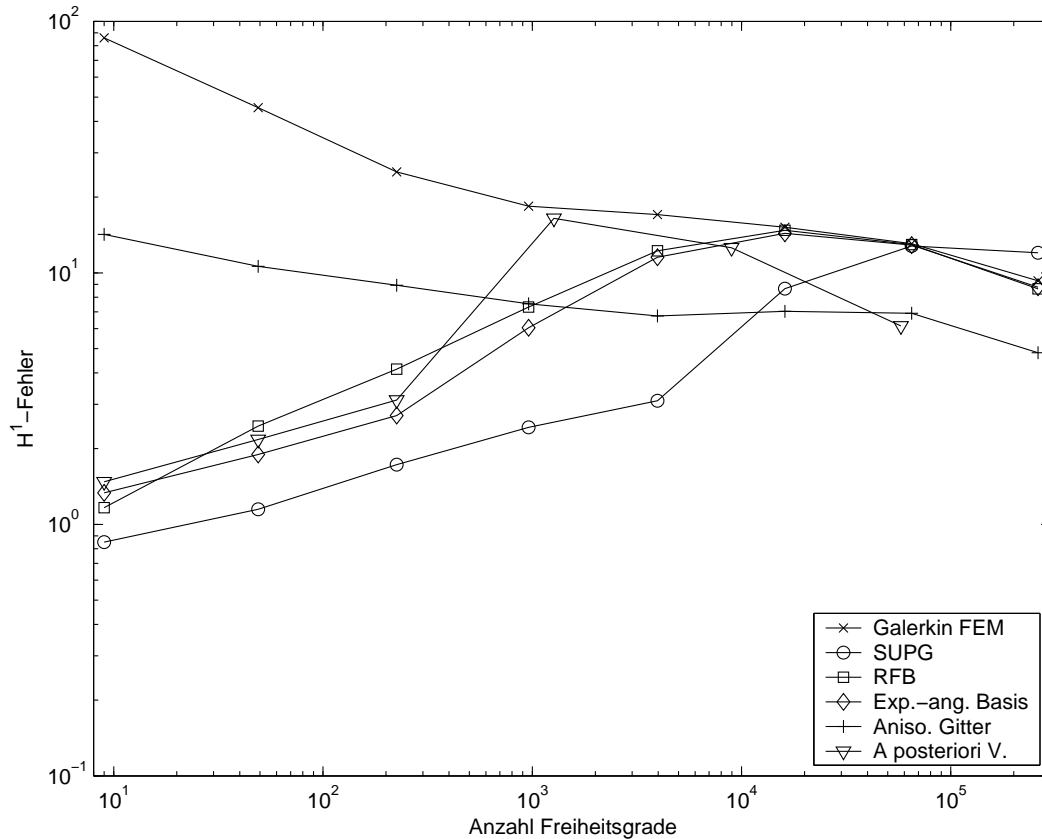


Abbildung 5.3: Vergleich der absoluten H^1 -Fehler $|u - u_S|_{H^1}$ beim Modellproblem A in Abhängigkeit der Anzahl Freiheitsgrade. ($\varepsilon = 1E - 3$)

Im stark konvektionsdominierten Fall bis 10^4 Freiheitsgrade liefert die H^1 -optimale Variante von SUPG die kleinsten H^1 -Fehler. Ab 10^4 Freiheitsgraden beginnen sich die Methoden mit Gitteranpassung durchzusetzen. Um 10^5 Freiheitsgrade ist $Pe = 2$ erreicht, und die Upwind-Methoden fallen in den Standard-Galerkin Bereich. Gitteranpassung ist dann die einzige Verbesserung. Wir erinnern daran, dass bei der Anwendung der a-posteriori Methode bei diesem Plot nicht das Ziel war, möglichst kleine Fehler bei 10^5 Freiheitsgraden zu erzielen, sondern ein gutes Konvergenzverhalten zu zeigen.

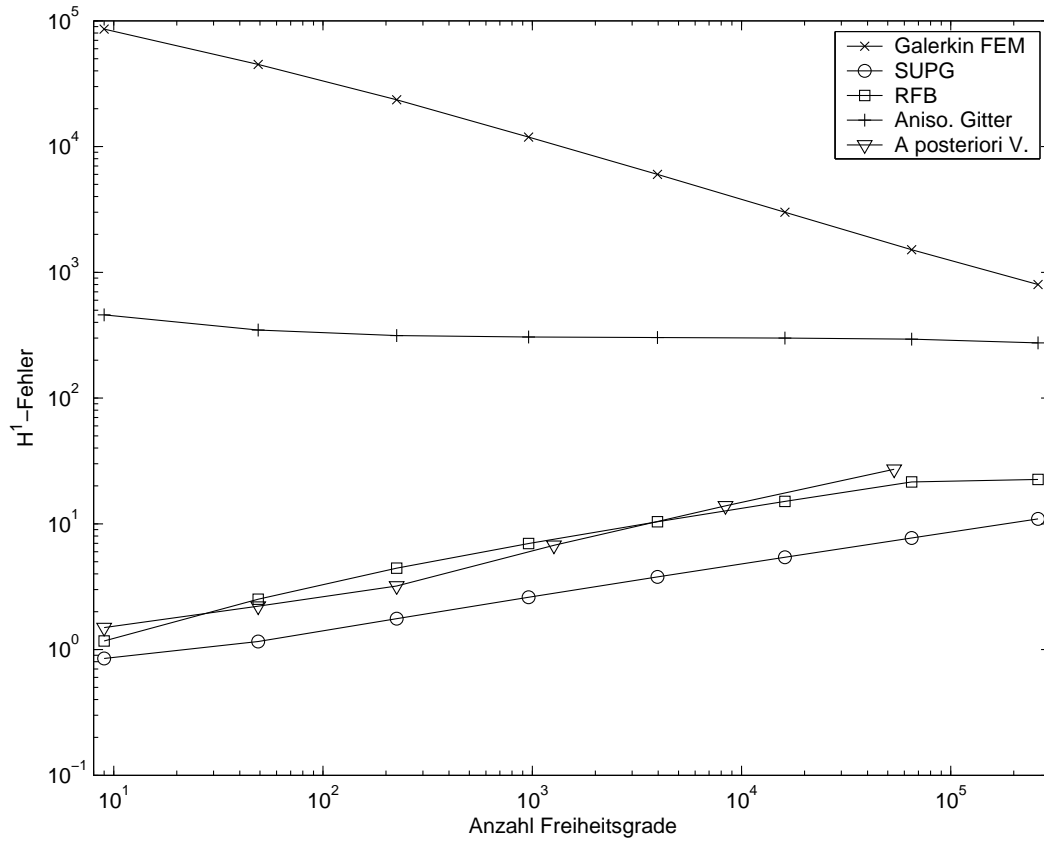


Abbildung 5.4: Vergleich der absoluten H^1 -Fehler $|u - u_S|_{H^1}$ beim Modellproblem A in Abhängigkeit der Anzahl Freiheitsgrade. ($\varepsilon = 1E - 6$)

Betrachten wir die H^1 -Fehler noch im extremen Fall $\varepsilon = 1E - 6$, der in der Praxis durchaus auftreten kann. Der gesamte Bereich der betrachteten Freiheitsgrade ist nun stark konvektionsdominiert. SUPG liefert im gesamten Bereich die kleinsten H^1 -Fehler. Die Upwind Methode RFB ist wenig schlechter. Wie bereits bei der Präsentation der a-posteriori Methode beobachtet, lohnt sich deren Einsatz im Bezug auf H^1 -Fehler gegenüber SUPG in diesem Fall nicht. Der auf Grund der auftretenden Oszillationen immens grössere H^1 -Fehler der Standard-Galerkin Methode lässt sich bei $\varepsilon = 1E - 6$ auch durch anisotrope Gitter nicht in den Bereich der Upwind-Methoden verbessern.

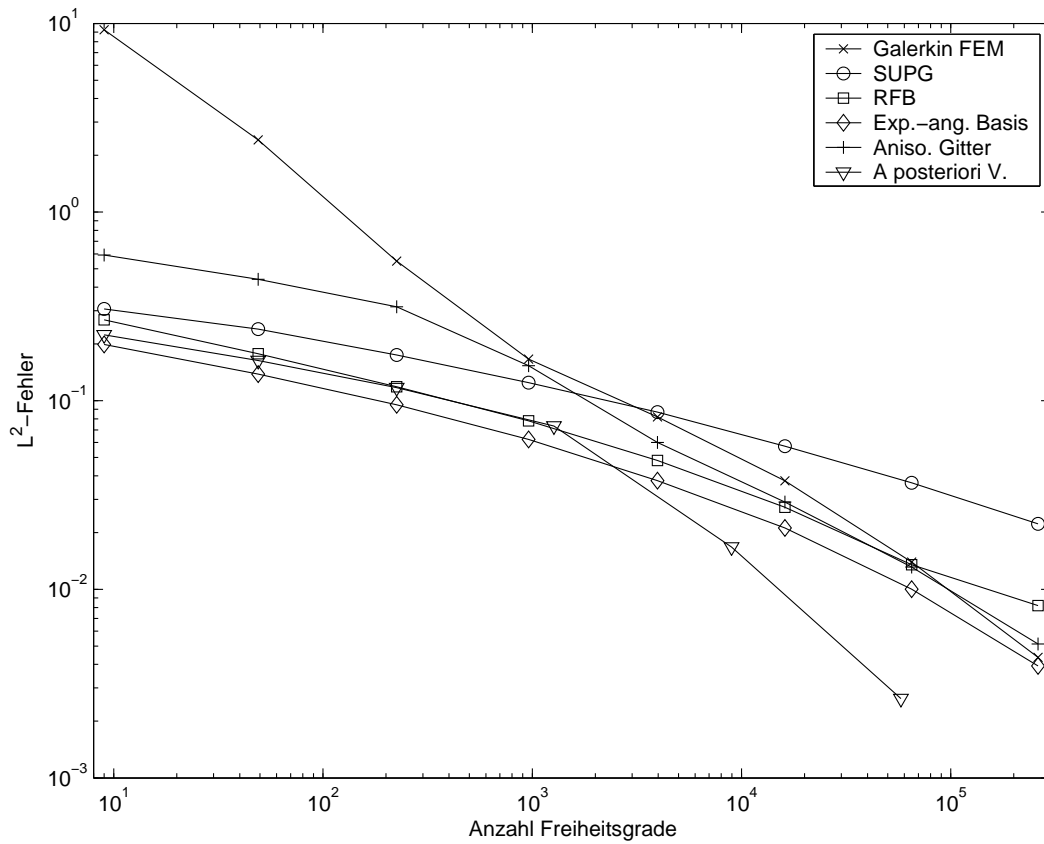
L^2 -Fehler in Abhängigkeit der Anzahl Freiheitsgrade

Abbildung 5.5: Vergleich der absoluten L^2 -Fehler beim Modellproblem A in Abhängigkeit der Anzahl Freiheitsgrade. ($\varepsilon = 1E - 3$)

Im gesamten Bereich bleibt die Methode der exponentiellen Basisfunktionen bezüglich L^2 -Fehler gegenüber den anderen Upwind-Methoden am besten. Gitteranpassung durch die a-posteriori Verfeinerung lohnt sich in diesem Fall deutlich. Die Anpassung durch das anisotrope Gitter bringt im gesamten Bereich gegenüber den Upwind-Methoden bezüglich des L^2 -Fehlers keine Verbesserung. Die SUPG-Variante RFB liefert die kleineren Fehler als SUPG mit dem in der Präsentation festgelegten H^1 -optimalen Parameter.

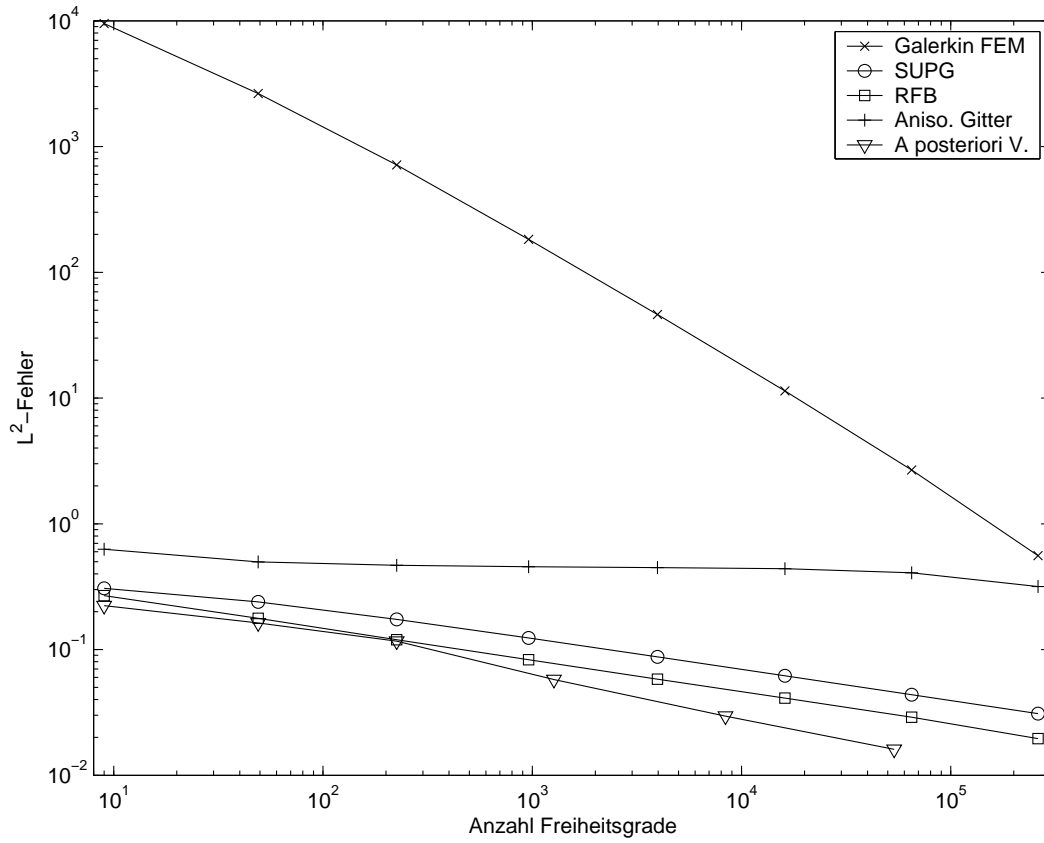


Abbildung 5.6: Vergleich der absoluten L^2 -Fehler beim Modellproblem A in Abhängigkeit der Anzahl Freiheitsgrade. ($\varepsilon = 1E - 6$)

Im extremen Fall $\varepsilon = 1E - 6$ ist der Einsatz der exponentiellen Basisfunktionen nicht mehr möglich. Auf uniformem Gitter weist die RFB-Methode im stark konvektionsdominierten Fall die kleinsten L^2 -Fehler auf. Gitteranpassung durch a-posteriori-Verfeinerung lohnt sich bezüglich L^2 -Fehler auch im extremen Fall. Durch die Oszillationen werden die L^2 -Fehler der Standard-Galerkin Methode auf uniformen Gittern unbrauchbar gross. Im Gegensatz zu den H^1 -Fehlern werden durch Einsatz anisotroper Gitter die L^2 -Fehler wesentlich verbessert. Im Vergleich zu den Upwind-Methoden lohnt sich deren Einsatz aber trotzdem nicht.

5.2 Modellproblem B: Rotating Flow

Fehlerverhalten in der inneren Grenzschicht bei $\varepsilon = 1E - 3$

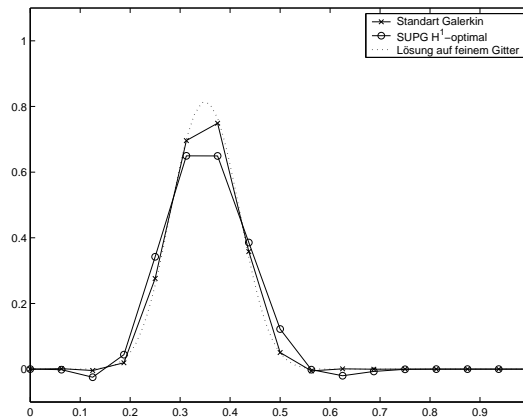


Abbildung 5.7: Spuren der Standard-Verfahren auf 16×32 -Gitter bezüglich $x = -y$ bei $\varepsilon = 1E - 3$.

Um die Grenzschicht aufzulösen, ist das Gitter viel zu grob. Die Standard-Galerkin Methode weist keine Oszillationen auf und ist viel näher an der pseudo-exakten Lösung als SUPG. SUPG verglättet einerseits den Hügel stark und zeigt andererseits vor und nach der Grenzschicht eine kleine Gegenbewegung.

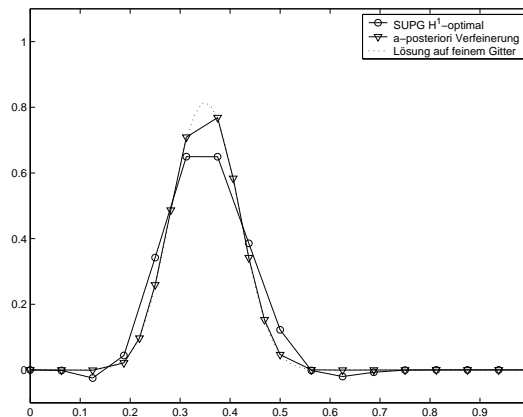


Abbildung 5.8: Vergleich der Spuren von SUPG auf 16×32 -Gitter mit der Lösung auf a-posteriori verfeinertem Gitter bezüglich $x = -y$ bei $\varepsilon = 1E - 3$.

Die zusätzlichen Freiheitsgrade in der Grenzschicht vermögen die Gegenbewegung zu eliminieren. Dazu wird die Lösung nicht mehr so stark verglättet.

Fehlerverhalten in der inneren Grenzschicht bei $\varepsilon = 1E - 6$

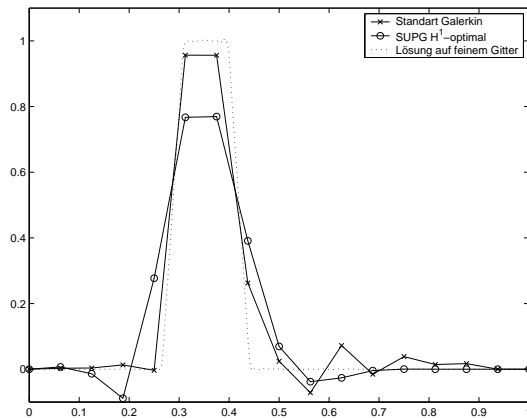


Abbildung 5.9: Spuren der Standard-Verfahren auf 16×32 -Gitter bezüglich $x = -y$ bei $\varepsilon = 1E - 6$.

Im extremen Fall $\varepsilon = 1E - 6$ treten beim Standard-Galerkin Verfahren Oszillationen auf. Die Lösung wird trotzdem in der Grenzschicht besser approximiert als von SUPG. Die Verglättung von SUPG ist gut sichtbar. Die Gegenbewegung ist deutlicher als im moderaten Fall.

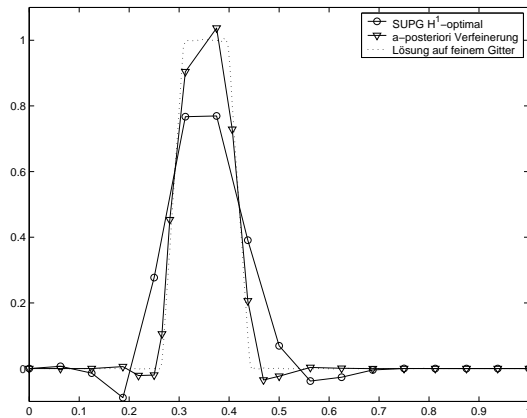
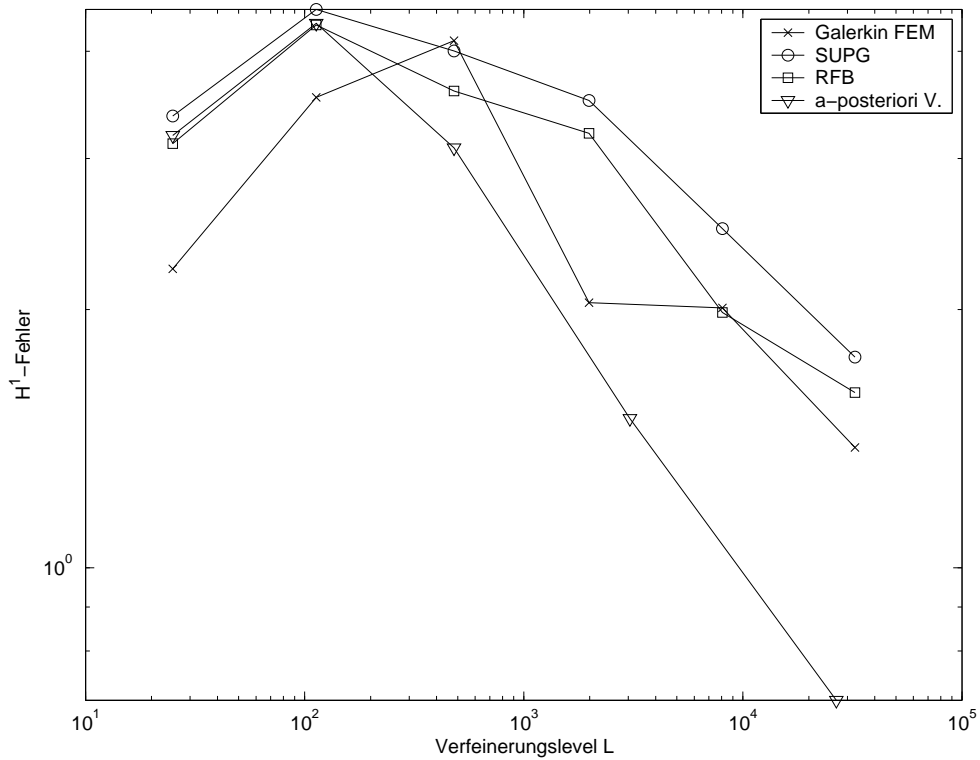


Abbildung 5.10: Vergleich der Spuren von SUPG auf 16×32 -Gitter mit der Lösung auf a-posteriori verfeinertem Gitter bezüglich $x = -y$ bei $\varepsilon = 1E - 6$.

Die a-posteriori Verfeinerung vermag die Lösung in der Grenzschicht zu verbessern. Die Gegenbewegung ist nicht ganz eliminiert.

H^1 -Fehler in Abhängigkeit der Anzahl FreiheitsgradeAbbildung 5.11: Vergleich der absoluten H^1 -Fehler beim Modellproblem B. ($\varepsilon = 1E - 3$)

Ohne den Vorteil des kleineren Aufwandes miteinzubringen, liefert die Standard-Galerkin Methode gegenüber den Upwind-Methoden im gesamten Bereich die kleinsten H^1 -Fehler. Dies ist im Vergleich zum Modellproblem A dadurch erklärbar, dass praktisch keine Oszillationen die Lösung der Standard-Galerkin Lösung negativ beeinflussen. Der Verglättungseffekt der beiden Upwind-Methoden bringt den sichtbaren Nachteil im H^1 -Fehler. RFB ist noch etwas besser als die stark verglättende SUPG Variante. Die Gitteranpassung durch die a-posteriori Verfeinerung verbessert Standard-Galerkin deutlich.

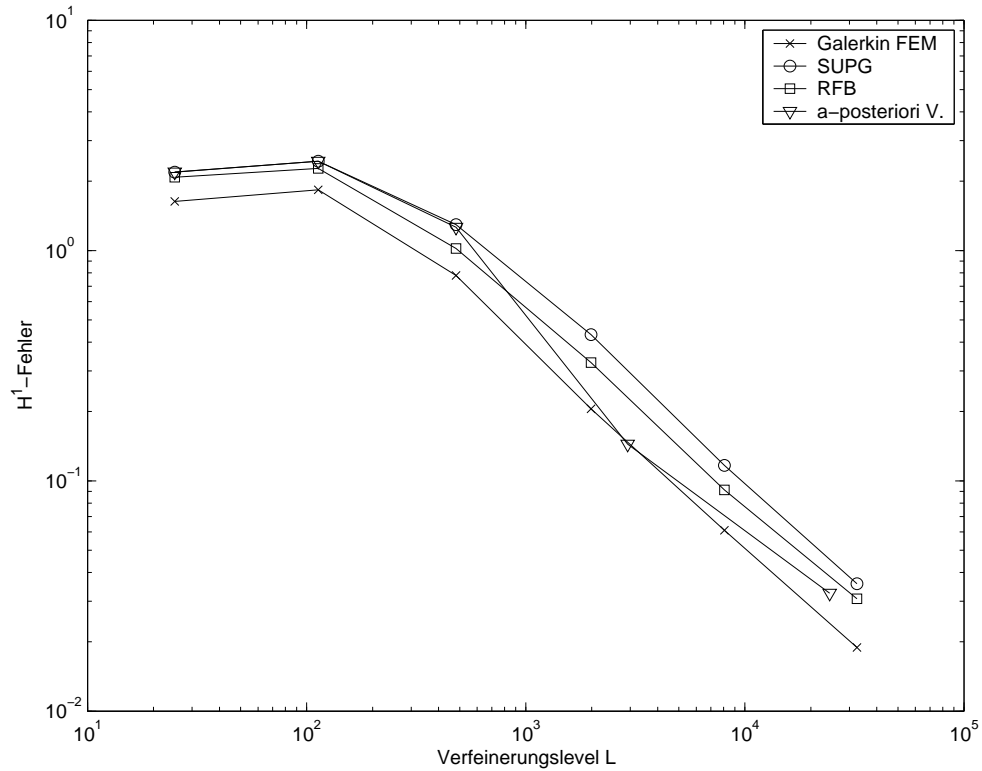
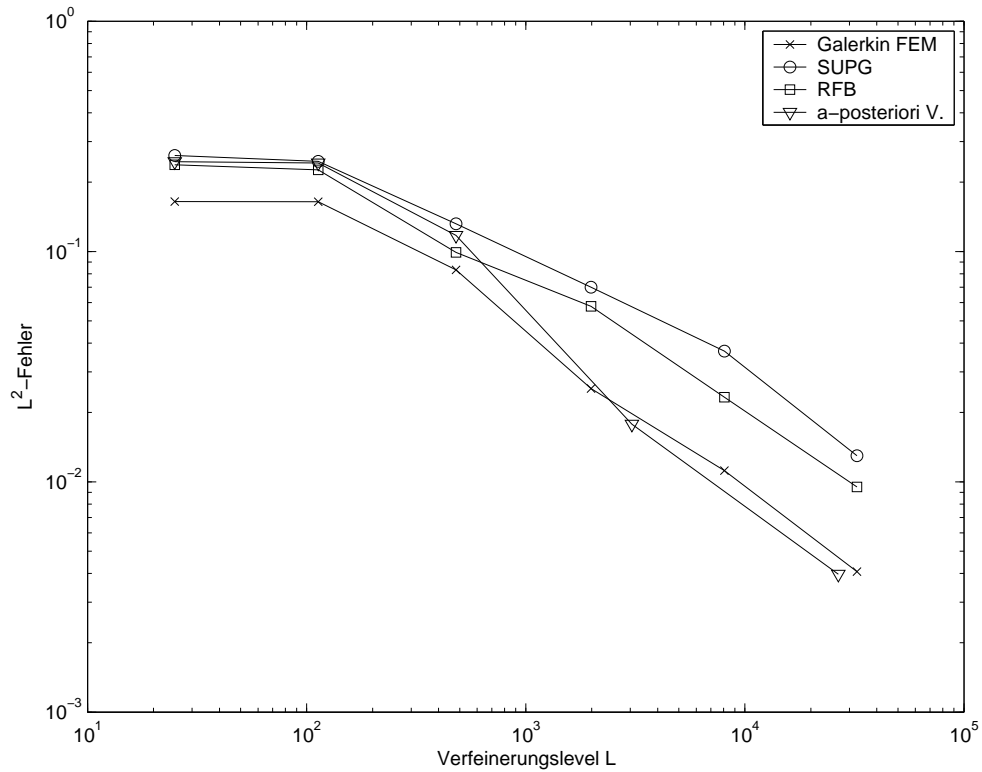


Abbildung 5.12: Vergleich der absoluten H^1 -Fehler beim Modellproblem B. ($\varepsilon = 1E - 6$)

Im extremen Fall $\varepsilon = 1E - 6$ werden bei Standard-Galerkin Oszillationen sichtbar (Abbildung 5.9). Offensichtlich fallen diese aber kaum ins Gewicht, da die Lösung in der Grenzschicht viel besser ist als die der Upwind-Methoden. Die auf Oszillationen anfälligen H^1 -Fehler bleiben auch in diesem Fall besser als die H^1 -Fehler der Upwind-Methoden, abgesehen von den Schwankungen. Im Gegensatz zum Fall $\varepsilon = 1E - 3$ lohnt sich die a-posteriori Gitteranpassung bei $\varepsilon = 1E - 6$ nicht mehr so deutlich. Eine Verbesserung zu SUPG ist deutlich, besser als die Standard-Galerkin Methode auf uniformem Gitter wird das a-posteriori Verfahren jedoch nicht.

L^2 -Fehler in Abhängigkeit der Anzahl FreiheitsgradeAbbildung 5.13: Vergleich der absoluten L^2 -Fehler beim Modellproblem B. ($\varepsilon = 1E - 3$)

Im Fall $\varepsilon = 1E - 3$ verhalten sich die L^2 -Fehler sehr ähnlich wie die H^1 -Fehler: Standard-Galerkin ist auf allen Gittern den Upwind-Methoden überlegen. Einzig das Verhalten der a-posteriori Methode fällt etwas besser aus. Ein Anpassen des Gitters ist sinnvoll.

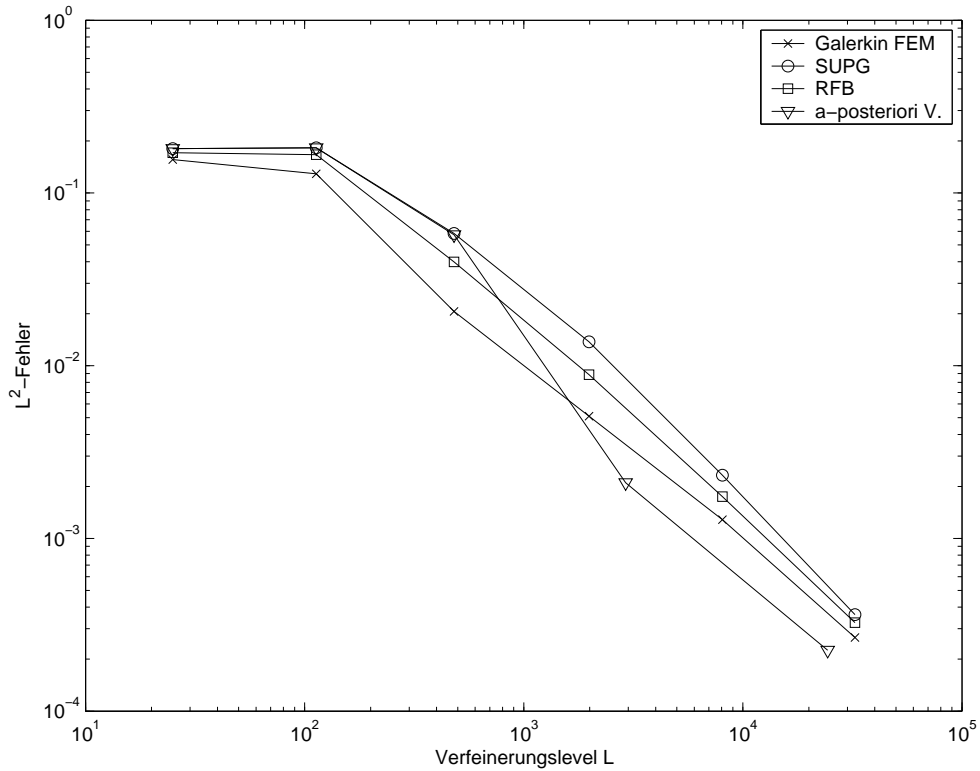


Abbildung 5.14: Vergleich der absoluten L^2 -Fehler beim Modellproblem B. ($\varepsilon = 1E - 6$)

Auch für $\varepsilon = 1E - 6$ gilt dieselbe Beobachtung: Upwind-Methoden weisen auf denselben uniformen Gittern die grösseren L^2 -Fehler auf als Standard-Galerkin. Deren Einsatz gekoppelt mit der a-posteriori Methode ist aber durchaus gerechtfertigt. Obwohl Standard-Galerkin keine grossen Oszillationen aufweist, zeigt sich experimentell, dass sich die a-posteriori Methode nur zusammen mit Upwind-Techniken lohnt.

Kapitel 6

Fazit

6.1 Zusammenfassung aller Eigenschaften

Bevor wir konkrete Empfehlungen herausarbeiten, fassen wir anhand der wichtigsten Kriterien die pro- und contra-Aspekte der Methoden zusammen.

Kriterium 6.1. Freie Parameter, Parameterabhängigkeit: *In der Formulierung einiger Methoden gibt es Parameter, deren a-priori Wahl nicht immer optimal möglich ist. Es wäre vorteilhaft, wenn sich der Anwender nicht um die Wahl von Parametern zu kümmern hat.*

Freie Parameter beinhaltet allen voran SUPG. Die Frage nach dem optimalen Stabilisierungsparameter τ zu einem gegebenen Problem ist noch immer offen. Auch zur Wahl der exponentiellen Basisfunktionen im gleichnamigen Verfahren gibt es verschiedene Ansätze. Unter den Upwind-Verfahren bleibt nur RFB ohne freie Parameter.

Bei anisotropen Gittern ist die beste Wahl der Grenzschichtbreite eine offene Frage.

Bei der a-posteriori Methode konnten wir die Parameter experimentell optimal wählen, was in der Praxis oft nicht möglich ist. Trotzdem scheinen die gewählten Größen mehr oder weniger universell zu sein.

Kriterium 6.2. Implementierungsaufwand: *Es sei Standard-Galerkin bereits implementiert und ein umfangreiches Paket zur Gittergeometrie vorhanden. Wie aufwändig ist nun die Implementierung der Verfahren? Wir fassen die Ergebnisse aus dem Abschnitt über den Aufwand der Verfahren kurz zusammen.*

Die Verfahren SUPG und RFB erweitern die Formulierung um weitere Terme. Sofern die elementweise Formulierung von Standard-Galerkin erweiterbar ist, bleibt der Aufwand klein. Das Verfahren der exponentiellen Basisfunktionen ist bezüglich Implementierungsaufwand das intensivste.

Anisotrope Gitter brauchen keinen zusätzlichen Aufwand, aber Expertise. Das Verfahren ist nicht im Blackbox-Stil anwendbar.

Für das a-posteriori Verfahren muss zusätzlich die Gittermarkierung implementiert werden.

Kriterium 6.3. Aufwand (CPU Zeit): *Inbegriffen in den verglichenen Zeiten ist die Assemblierung von Matrix und rechter Seite und die Lösung des Gleichungssystems.*

Die addierten Terme in den Formulierungen schlagen sich bei SUPG und RFB etwa im anderthalbfachen Rechenaufwand nieder. Die exponentiellen Basisfunktionen brauchen die doppelte Rechenzeit wie Standard-Galerkin.

Für feste Anzahl Freiheitsgrade bleibt der Aufwand für die anisotropen Gitter gleich.

Das a-posteriori Verfahren hat durch seine iterative Struktur einen Mehraufwand. Assemblierung und Lösen von Problemen auf Gittern in vorherigen Schritten fallen aber bei weiteren Iterationen nicht schwer ins Gewicht.

Kriterium 6.4. Konvergenz der globalen H^1 - und L^2 -Fehler: *Bei der Präsentation der Verfahren haben wir deren Fehlerverhalten in H^1 - und L^2 -Norm untersucht. Nahegelegenderweise müssen wir auch in der Zusammenfassung die Fälle konvektionsdominiert ($Pe > 2$) und diffusionsdominiert ($Pe < 2$) unterscheiden.*

Die Standard-Galerkin Methode weist in beiden Fällen in der H^1 -Norm lineares und in der L^2 -Norm quadratisches Fehlerverhalten auf. Im diffusionsdominierten Fall deckt sich dieses Verhalten mit dem von SUPG. RFB zeigt auf Grund der rein konvektionsdominierten Stabilisierung nur lineare Konvergenz in der L^2 -Norm. Im konvektionsdominierten Fall divergiert der H^1 -Fehler bei beiden Upwind-Verfahren. Der L^2 -Fehler konvergiert, aber die Konvergenzraten sinken auf 1/2. Auch das Verfahren der exponentiellen Basisfunktionen zeigt in allen Bereichen dasselbe Verhalten wie SUPG.

Bei Einsatz der anisotropen Gittern gehen die guten Konvergenzeigenschaften von Standard-Galerkin auf uniformen Gittern auf Grund der schlecht gewählten Grenzschichtbreite weitestgehend verloren.

Das Konvergenzverhalten von SUPG (oder Standard-Galerkin) lässt sich mit Hilfe der a-posteriori Methode dadurch optimieren, dass die Fehlerverbesserung in Grenzschicht und restlichem Gebiet besser ausgeglichen ist.

Kriterium 6.5. Robustheit bezüglich Gittergeometrie und Problemklasse: *Wir betrachten die Robustheit bezüglich spezieller, insbesondere nicht-uniformer Gitter. Wichtig ist aber vor allem, dass die Methode auf einer möglichst breiten Palette von verschiedenen Problemen universell anwendbar ist.*

Bei SUPG und RFB sind unstrukturierte Gitter noch weniger problematisch als bei Standard-Galerkin. Bezüglich Problemklasse sind diese Verfahren sehr robust, wie auch in den Tests zu Modellproblem B klar wurde. Die exponentiellen Basisfunktionen funktionieren auch auf unstrukturierten Gittern gut. Der Einsatz ist auf spezielle Probleme stark begrenzt: Bereits der Umgang mit inneren Grenzschichten ist nicht möglich.

Die Grenzschicht lässt sich im Allgemeinen nicht a-priori durch ein anisotropes Gitter lokalisieren. Insbesondere kann die gekrümmte innere Grenzschicht in Modellproblem B nicht aufgelöst werden.

Die Verfeinerungsstrategie der a-posteriori Methode ist zwar an ein nicht zu grobes Startgitter gebunden, ansonsten ist das Verfahren aber robust bezüglich der Problemklasse.

6.2 Zusammenfassende Bewertung der Verfahren:

- **Standard-Galerkin:**

- + Gutes Konvergenzverhalten unabhängig vom Diffusionsparameter ε .
- Besonders im Fall von Rand-Grenzschichten verschmutzen Oszillationen die Lösungen falls $Pe > 2$ gilt.

- **SUPG:**

- + In fast allen Fällen eliminiert SUPG alle Oszillationen.
- + Das Verfahren ist sehr robust bezüglich Gitter und Problemklasse.
- Die Wahl des optimalen Stabilisierungsparameters ist problemabhängig.
- Der Preis für das Eliminieren der Oszillationen ist eine starke Glättung der Lösung, insbesondere im Fall scharfer Rand-Grenzschichten.
- Im Fall $Pe > 2$ keine Konvergenz in der H^1 -Norm und nur Rate 1/2 in der L^2 -Norm.

- **RFB:**

- + Zeigt selbst im stark konvektionsdominierten Fall am besten das qualitative Lösungsverhalten, was mit den geringen L^2 -Fehlern zusammenhängt.
- + Das Verfahren beinhaltet keine freien Parameter.
- Das Verfahren eignet sich nur für den konvektionsdominierten Fall.
- Glättungseigenschaft wie SUPG.
- Schlechtes Konvergenzverhalten im konvektionsdominierten Fall wie SUPG.

- **EF:**

- + Auf festen Gittern erreicht das Verfahren in geeigneten Problemen die kleinsten Fehler.
- Die Problemklasse, für die das Verfahren gut funktioniert, ist sehr klein.
- Der Implementierungsaufwand ist hoch.
- Die Rechenzeit ist fast doppelt so gross wie jene von Standard-Galerkin.
- Schlechtes Konvergenzverhalten im konvektionsdominierten Fall wie SUPG.

- **Anisotrope Gitter:**

- + Bei einfacher Gittergeometrie oder einfachem Problem den uniformen Gittern vorzuziehen.
- + Kein zusätzlicher Aufwand.
- Problemklasse stark eingeschränkt (krummer Ränd, komplizierte Funktionen $b(x)$).
- Wenn die Schichtdicke nicht genau angepasst ist, was in einer Anwendung fast immer der Fall ist, können Oszillationen auftreten.

- **SUPG mit a-posteriori Verfeinerung:**

- + In fast allen Fällen treten keine Oszillationen auf.
- + Adaptives Lokalisieren und Auflösen der Grenzschicht.
- + Das Verfahren ist sehr robust bezüglich Gitter und Problemklasse.
- Qualitativ dasselbe schlechte Konvergenzverhalten wie SUPG.

Fazit: Keine der Methoden weist bei Problemen mit nichttrivialer Geometrie ein gutes Konvergenzverhalten in H^1 - und L^2 -Norm auf und zeigt gleichzeitig oszillationsfreie Lösungen.

6.3 Anleitung zur Verwendung der Verfahren

Wir lösen uns nun von den einfachen Modellproblemen. Für die Praxis sind komplexe Daten und komplexe Gebiete der Normalfall. Die Anforderungen an eine Lösung unterscheiden sich. Wie im vorherigen Abschnitt klar wurde, erfordern Rand-Grenzschichten den grösseren Aufwand. Deshalb beginnen wir die Anleitung jeweils mit dem Fall, dass nur innere Grenzschichten auftreten. Wir beleuchten drei Situationen.

Anforderung 6.6. Genauigkeit: *Man will zu einem gegebenen Problem mit gegebenen Ressourcen und begrenztem Zeitrahmen eine möglichst gute Lösung berechnen.*

Im Fall, dass ausschliesslich innere Grenzschichten auftreten ist Standard-Galerkin zu empfehlen. Ansonsten müsste SUPG und die Fehlerindikation implementiert werden. Der Gewinn durch die kleineren Fehler ist nicht erheblich.

Im allgemeinen Fall ist Gitteranpassung unbedingt zu empfehlen. Dazu ist ein Upwind-Verfahren notwendig. Hier lohnt sich der Implementierungsmehraufwand deutlich. In Rand-Grenzschichten braucht es zusätzliche Freiheitsgrade. Schliesslich hängt die Güte der Fehler auch sehr stark mit der Gestalt der Lösung in der Grenzschicht zusammen.

Anforderung 6.7. Präasymptotische Genauigkeitsanforderung: *Man will eine Lösung, die in kurzer Zeit berechnet werden kann und trotzdem die exakte Lösung auf dem gesamten Gebiet qualitativ gut annähert. Die Fehlergrössen sind zwar sekundär, aber die Lösung muss auch in den Grenzschichten genau sein, damit sie die Gestalt der exakten Lösung wiedergibt.*

Im Fall einfacher Gebiete kann auf eine adaptive Verfeinerung verzichtet werden. Auch falls nur innere Grenzschichten auftreten, lohnt sich die Implementierung nicht.

Allgemein ist für eine Lösung, die vor allem durch ihre Gestalt überzeugen muss, Gitteranpassung empfehlenswert. Wie bereits mehrfach erwähnt, steht die Gestalt der Lösung in den Grenzschichten im Vordergrund. Deshalb sollte auch dort möglichst gut verfeinert werden.

Anforderung 6.8. Robustheit: *Das Verfahren soll verschiedenste Probleme mit akzeptabler Genauigkeit lösen können.*

Eine robuste Methode mit gutem Konvergenzverhalten ist in diesem Fall wünschenswert. Auf uniformen Gittern empfehlen wir SUPG. Der Parameter τ ist je nach H^1 - oder L^2 -Fehlerinteresse zu wählen. Auch hier lohnt es sich, das Gitter in den Grenzschichten anzupassen. Ein gutes Verhalten der Fehler ist dann aber nicht mehr unbedingt gewährleistet.

Fazit: Bezüglich des H^1 -Fehlers gibt es keine Methode, die zu empfehlen ist. Ganz im Gegenteil: Alle stabilisierenden Methoden (SUPG, RFB, EF, SUPG mit Gitteranpassung) weisen im Fall $Pe > 2$ Divergenz auf. Es bleibt eine offene Frage, wie man den H^1 -Fehler durch Stabilisierungstechniken mit vernünftigem Aufwand verkleinern kann.

Kapitel 7

Anhang: Die Software

7.1 Installation

JDK

Als erstes muss ein Java Development Kit (JDK) installiert werden. Die Referenzimplementation findet man auf <http://java.sun.com/j2se/1.5.0/download.jsp> für Windows, Solaris und Linux. Moderne MacOS X Rechner sind bereits damit ausgestattet. Wir gehen ab jetzt davon aus, dass das JDK in das Verzeichnis `JDK_HOME` installiert wurde.

Java3D

Als nächstes muss Java3D für die Visualisierung im GUI installiert werden.

- **Windows, Solaris:** <http://java.sun.com/products/java-media/3D/download.html>
Es empfiehlt sich wohl, eine der SDK-Versionen zu nehmen. Für Windows existieren eine DirectX und eine OpenGL-Implementation.
- **Linux:** Man nehme die Blackdown-Implementation, die man z.B. unter <ftp://sunsite.cnlab-switch.ch/mirror/java-linux/java3d/> findet.
- **MacOS X:** <http://www.apple.com/downloads/macosx/apple/java3dandjavaadvancedimagingupdate.html>

Man folge den jeweiligen Installationsanweisungen. Mindestens unter Windows, Solaris und Linux müssen dann letztendlich einfach folgende Dateien bestehen:

- In `JDK_HOME/jre/lib/ext`: `j3daudio.jar`, `j3dcore.jar`, `j3dutils.jar` und `vecmath.jar`
- In `JDK_HOME/jre/bin`: `J3D.x`, `j3daudio.x` und `J3DUtills.x`

Optional: Libraries

Optional kann man von unserer Projektwebsite [28] die Libraries für Umfpack und/oder SuperLU herunterladen. Unter Windows müssen Sie auf dem Pfad sein. Man kann z.B. in

My Computer > Properties > Advanced > Environment Variables einen Ordner, in dem sich die dll's befinden, zur PATH-Variable hinzufügen. Oder die dll's sind beim Ausführen des Programms im aktuellen Verzeichnis.

Unter Unix/Linux müssen sie in `$LD_LIBRARY_PATH` ansprechbar sein. Man kann z.B. ein Verzeichnis `~/lib/` erstellen, dort die `.so`'s hineinkopieren und vor dem Ausführen des Programms in der Bash `export LD_LIBRARY_PATH=$LD_LIBRARY_PATH:~/lib` eintippen oder in die `~/bashrc` einfügen.

Vorlage benutzen unter Eclipse

Installation von Eclipse

Eclipse kann man von www.eclipse.org kostenlos downloaden. Der Rest der Anweisungen bezieht sich auf Version 3 von Eclipse. Man folge den üblichen Installationsanweisungen, so dass Eclipse unter `ECLIPSE_HOME` zu liegen kommt.

Vorlage herunterladen und ausführen

Von der Projekthomepage [28] muss man sich im Bereich *diploma thesis* die Datei `template_xx_yy.zip` herunterladen. Sie enthält ein fertiges Eclipse-Projekt. Um dies zu nutzen, entpacke man die Datei nach `ECLIPSE_HOME/workspace/` oder sonstwohin, sagen wir, nach `GRID_HOME`. Nun starte man Eclipse (wenn es nicht schon läuft). Wir müssen das Projekt importieren: *File > Import > Existing Project into Workspace > Next* Unter *Project contents* fügt man den Pfad des entpackten Ordners `GRID_HOME` ein. Dann betätigt man noch *Finish*, und das Projekt ist installiert!

Nun kann man unser Programm ausführen. Im Package Explorer auf der linken Seite klicke man mit der rechten Maustaste auf das neue Projekt, und wähle *Run > Run As > Java Application*. Nachdem alle möglichen Klassen gefunden wurden, ist *MainCDE* zu wählen. Das Programm startet. Um nicht jedesmal das Programm neu zu starten, wenn man etwas am Assembler geändert hat, kann das Programm im Debug-Modus starten. Wenn man das Programm erneut starten will, kann man einfach auf *Run Last Launched* (Ctrl + F11) oder *Debug Last Launched* (F11) klicken - die beiden stehen hinter dem grünen Play-Knopf bzw. dem Käfer. Sollte man inzwischen wieder ein anderes Programm gestartet haben, steht unsere Konfiguration im Menu unter dem Pfeil links neben dem jeweiligen Symbol bereit.

7.2 Features

Nach erfolgreicher Installation erscheint nach dem Programmstart die folgende Oberfläche.

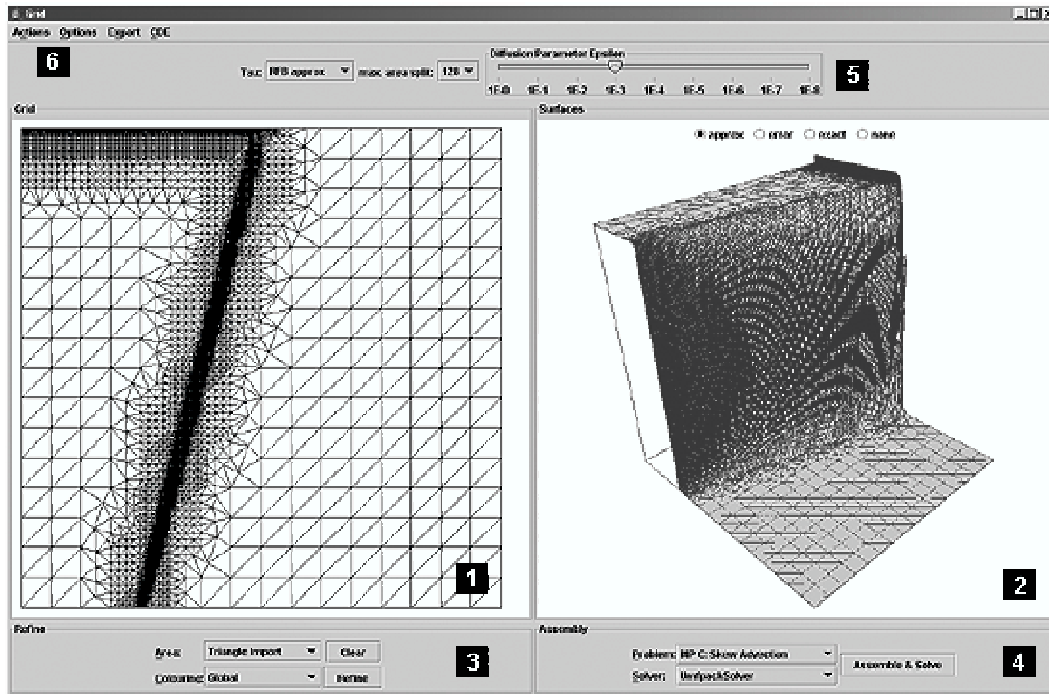


Abbildung 7.1: Die Benutzeroberfläche der Klasse MainCDE

1. **Das Gitter-Panel:** Hier wird das Gitter angezeigt. Durch drücken der rechten Maustaste auf das Gitter-Panel wird ein Fenster geöffnet.

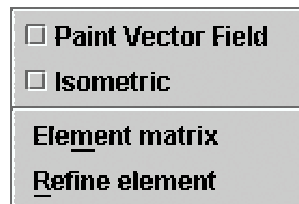


Abbildung 7.2: Das Gitter-Popup

- Paint Vector Field: Wird nicht gebraucht.
- Isometric: Skaliert das Gitter auf echte Verhältnisse.
- Element Matrix: Berechnet die Elementmatrix des gewählten Elements unter Einbezug von Randbedingungen und zeigt das Ergebnis in einem separaten Fenster.
- Refine: Verfeinert das Element rot und schliesst grün ab.

2. **Das Lösungs-Panel:** Hier wird der Plot der zuletzt berechneten Lösung angezeigt. Im Panel kann sich der Benutzer mit den Maustasten frei im Raum bewegen. In der rechten oberen Ecke des Panels kann auch zum Fehlerplot oder zur exakten Lösung umgeschaltet werden. Die exakte Lösung muss dazu entweder explizit angegeben worden sein oder man muss eine Overkill-Lösung geladen haben. Ansonsten wird die Nulllösung als exakte Lösung verwendet.
3. **Die Verfeinerung:** In der oberen Auswahl werden die Gitter aufgeführt. Durch die Auswahl eines neuen Problems wird diese Auswahl angepasst zum passenden Gitter des neuen Problems. In der unteren Auswahl werden Verfeinerungsstrategien aufgelistet. *Global* entspricht einer globalen roten Verfeinerung und ist die Standardeinstellung. Der refine-Button verfeinert nach der ausgewählten Strategie und der clear-Button stellt das Startgitter wieder her.
4. **Assemblierung und Lösen:** Die obere Auswahl stellt alle Problemstellungen zusammen. Haben zwei Probleme dasselbe Gitter als Startgitter wird auch ein verfeinertes Gitter nicht neu geladen. So können Lösungen verschiedener Probleme auf einem bestehenden, bereits verfeinerten Gitter bequem verglichen werden. In der solver-Auswahl findet man den Gauss-Solver und einen Iterativen Solver. Hat man auch die entsprechenden Libraries integriert, so erscheinen auch die direkten Löser UMFPack und SuperLU. Der AssembleAndSolve-Button löst das gewählte Problem schliesslich unter der ausgewählten Bedingungen.
5. **Konvektions-Diffusions Features:** Für die Konvektions-Diffusions-Probleme stehen die folgenden Features zur Verfügung:
 - Tau: In Verbindung mit einem Problem, das SUPG verwendet kann hier die Wahl des Stabilisationsparameters τ verändert werden.
 - Minimal area scale: Bei Verwendung des externen Verfeinerungstools Triangle kann hier die Verfeinerungstiefe des a-posteriori Gradientenmarkierers eingestellt werden. Die ausgewählte Zahl V bedeutet, dass das Dreieck mit dem höchsten Gradienten so stark verfeinert wird, dass die Fläche noch den V -ten Teil der ursprünglichen Fläche hat.
 - Wahl des Diffusionsparameters ε .
6. **Die Menuleiste:** Die Menuleiste hat drei Untermenüs:
 - **Actions:** Alle Optionen sind auch durch Buttons steuerbar und bereits erklärt.
 - **Options:** Der *refine report* und der *assemble and solve report*

Time	Time Quot.	#Triangles	#Edges	#Edges Quot.	#Nodes	#Nodes Quot.
0		8	16		9	
0	NaN	32	56	0.2857142...	25	0.36
0	NaN	128	208	0.2692307...	81	0.3086419...
15	0.0	512	800	0.26	289	0.2902768...
47	0.31914893...	2048	3136	0.2551020...	1089	0.2653810...
219	0.21461187...	8192	12416	0.2525773...	4225	0.2577514...
1047	0.20916905...	32768	49408	0.2512953...	16641	0.2538909...

Abbildung 7.3: Der refine-report gibt Auskunft über Anzahl Dreiecke, Kanten und Knoten des aktuellen Gitters und vergleicht aufeinanderfolgende Gitter.

Time	Assemble	Assemble ...	Dim	Dim Quot.	Export	External ...	Import	Solve
0	0		1		0	0	0	0
16	0	NaN	9	0.1111111...	0	0	0	0
47	31	0.0	49	0.1836734...	0	0	0	0
203	109	0.2844036...	225	0.2177777...	0	0	0	16
995	485	0.2247422...	961	0.2341311...	31	16	0	109
4501	2298	0.2110530...	3969	0.2421264...	172	47	16	500
20489	10268	0.2238021...	16129	0.2460784...	766	328	94	2360

Abbildung 7.4: Die linke Hälfte des assemble and solve report: Die Zeiten für die einzelnen Aufgaben sind hier gelistet und verglichen.

Max	Max Quot.	L2	L2 Quot.	H1	H1 Quot.
5.99649086764...		2.0350636499...		12.377822723...	
2.74768649143...	2.182378115675...	0.7543009172...	2.8979466726...	8.5183970803...	1.4530694725...
1.23093437773...	2.232195754000...	0.1997311173...	3.7765819735...	6.1989255249...	1.3741731572...
0.72608149898...	1.695311586183...	0.0823366413...	2.4257665527...	5.5663658877...	1.1136396079...
0.26052312504...	2.787013624433...	0.0303587408...	2.7121230632...	4.0875533633...	1.3617842735...
0.08322786525...	3.130239184295...	0.0090353698...	3.3599887163...	2.4096874303...	1.6963002387...
0.01878823956...	4.429785184666...	0.0023882344...	3.7832842192...	1.2683073579...	1.8999238750...

Abbildung 7.5: Die rechte Hälfte des assemble and solve report: Hier werden l_∞ -, L^2 - und H^1 -Fehler angezeigt. Dazu werden die Quotienten aufeinanderfolgender Fehler für die Konvergenzanalyse berechnet und dargestellt.

Die Option *Show Description* im *Options*-Menu zeigt eine Beschreibung des aktuellen Problems sofern hinterlegt. Da in unserem Fall der Name das Problem schon eindeutig charakterisiert, sind keine Beschreibungen hinterlegt.

- **Export:** Stellt Exportroutinen bereit um Objekte in gängigen Formaten abzuspeichern. Die Formate sind so gewählt, dass Visualisierungen mit Matlab möglichst einfach sind (vgl. Abschnitt Matlab).

- **Das CDE (convection-diffusion equation) Menu**

- Single Step: Führt eine Iteration (refine - assemble - solve) durch.
- Calc Series: Führt *refine - assemble - solve* sechs mal aus. Dies entspricht den Sequenzen, die im Abschnitt Konvergenz aufgeführt werden.
- Export 1D: Erzeugt ein einfaches File, das mit `visualize_projection.m` aus dem Matlab Paket dargestellt werden kann.
- Load Overkill: Ladet eine exportierte exakte Lösung auf dem aktuellen Gitter.
- Export to Triangle: Markiert die Dreiecke bezüglich ihren Gradienten und der ausgewählten Verfeinerungstiefe (vgl. Abschnitt 3.7) und exportiert das Gitter mit den Daten zur Verfeinerung nach *triangle* im Format von Triangle. Die Dateien heissen *output.node* (die Knoten), *output.ele* (die Dreiecke) und *output.area* (die Verfeinerungstiefen der einzelnen Dreiecke). Mit der Anweisung *triangle -gra output* verfeinert das Tool das Gitter mit Winkelbedingung. Genauere Informationen sind in [26] nachzulesen.
- Convert Grid: Nach der externen Verfeinerung von Triangle muss das Gitter wieder zurückkonvertiert werden.
- Update Edges: Für Probleme mit Neumann oder inhomogenem Dirichlet-Rand müssen die Kanten der von Triangle verfeinerten Gitter wieder mit den Kanteninformationen versehen werden.

7.3 Ein Problem nachrechnen

Wir untersuchen, ob die Fehler zu Modellproblem A auch auf einem anderen Gitter dasselbe Verhalten zeigen. Sei $\varepsilon = 0.01$. Dazu verfähre man wie folgt:

- Man wählt das Problem *MP A: Rand-Grenzschicht-2D* aus der Liste der Probleme aus.
- Danach ändert man das verlinkte Standardgitter zu *Quadrat quer*.
- Aus dem Panel mit den Konvektions-Diffusions Features wählen wir $ep = 0.01$ und starten mit *calc series* die Sequenz.
- Nach Abschluss der Rechnung rufen wir aus der Menuleiste den *assembleAndSolve report* auf und exportieren die Daten in ein File.
- In Matlab benutzen wir das File *visualizeData*, übergeben dazu das File und die Wahl L^2 oder H^1 und erhalten einen logarithmisierten Fehler-Plot unseres Problems.

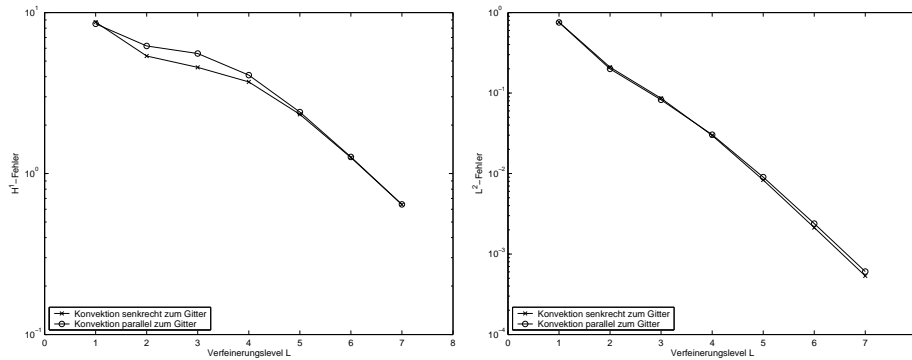


Abbildung 7.6: Die logarithmisierten Fehler von Standard-Galerkin auf zwei verschiedene Gittern: Der H^1 -Fehler zeigt im konvektionsdominierten Fall ein besseres Verhalten, falls das Gitter senkrecht zur Konvektionsrichtung ausgerichtet ist. Grosse Abweichungen liegen allerdings nicht vor. Der L^2 -Fehler ist nahezu identisch.

7.4 Matlab

Um die exportierten Daten zu visualisieren, stehen im *template.zip* von [28] unter `/matlab` auch Matlab m-Files zur Verfügung. In den einzelnen Files gibt es genaue erklarungen zu deren Funktion.

- `plot_mesh`: Zeigt ein Gitter an, das über *Export->Export Grid* von der Java Application exportiert wurde.
- `visualize_plot`: Zeigt einen exportierten 3D-Plot an.
- `visualize_three`: Zeigt einen logarithmisierten Fehlerplot von exportierten Daten aus dem *assembleAndSolve report* an.
- `visualize_projection`: Zeigt einen Spur-Plot an, der aus Daten den Exportoption *CDE -> Export 1D* entstand.

Die eindimensionalen Probleme wurden in Matlab gelöst. Die Sammlung der m-Files sind im Ordner `/fem` abgelegt.

7.5 Grenzen der Software

Die Software ist in der Anzahl der Freiheitsgrade auf dem Testrechner aus Speichergrnden auf rund 300'000 limitiert. Diese Probleme wurden in rund 10 Minuten gelöst.

In der Verfeinerung gibt es bei sehr feinen Gitter Probleme mit der Verfeinerung. Dazu ist die Verfeinerung auf rot-grün limitiert. Das waren Gründe, um das externe Tool Triangle [26] heranzuziehen.

7.6 Ausbau der Software

Nach Installation der Vorlage können auch eigene Probleme realisiert werden. Dies geschieht durch verfassen von Assembler-Klassen. Zur Programmierung einer solchen Klasse gibt es auf der Website ein Tutorial.

Diese Klasse kann dann nach Eintragen im File *res/asmblersCDE.txt* im DropDown Menu der Benutzeroberfläche angewählt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] O. Axelsson, E. Glushkov, N. Glushkova: PEtrov-Galerkin method with local Green's functions in singularly perturbed convection-diffusion problems. *Int. Journal of Numerical Analysis and Modelling*, Volume 2, No.2, 127-145.
- [2] O. Axelsson: Stability and error estimates of Galerkin finite element approximations for convection-diffusion equations. *IMA Journal of Numerical Analysis* 1 (1981), 329-345.
- [3] F. Brezzi, L. P. Franca, A. Russo: Application of the pseudo residual-free bubbles to the stabilization of convection-diffusion problems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg* 166 (1998) 51-63.
- [4] F. Brezzi, L. P. Franca, A. Russo: Further considerations on residual-free bubbles for advective-diffusive equations. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg* 166 (1998) 25-33.
- [5] F. Brezzi, T.J.R. Hughes, L.D. Marini, A. Russo, E.Süli: A priori error analysis of residual-free bubbles for advection-diffusion problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 36, No.6 (1999), 1933-1948.
- [6] F. Brezzi, L.D. Marini, A. Russo: On the choice of a stabilizing subgrid for convection-diffusion problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194 (2005) 127-148.
- [7] F. Brezzi, A. Russo: Choosing bubbles for advection-diffusion problems, *Meth. Models Meth. Appl. Sci.* 4 (1994) 571-587.
- [8] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes: Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 32 (1982) 199-259.
- [9] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes: Streamline upwind/Petrov-Galerkin methods for advection dominated flows, in: *Proceedings Third International Conference on Finite Element in Fluid Flows*, Banff, Canada, 1980.
- [10] A. El-Zein: Exponential finite elements for diffusion-advection problems. *Int. J. Numer. Meth. Engrg* 62 (2005), 2086-2103.

- [11] L.P. Franca, S.L. Frey, T.J.R Hughes: Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 95 (1992) 253-276.
- [12] L.P. Franca, A. Russo: Recovering SUPG using Petrov-Galerkin formulations enriched with adjoint residual-free bubbles. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 182 (2000), 333-339.
- [13] L. Formaggia, S. Micheletti, S. Perotto: Anisotropic mesh adaption in computational fluid dynamics: Application to the advection-diffusion-reaction and the Stokes problems. *Applied Numerical Mathematics* 51 (2004) 511-533.
- [14] E. Gomes Dutra do Carmo, G. Benitez Alvarez: A new stabilized finite element formulation for scalar convection-diffusion problems: the streamline and approximate upwind/Petrov-Galerkin method. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg* 192 (2003), 3379-3396.
- [15] T. J. R. Hughes, M. Mallet, A. Mizukami: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. Beyond SUPG. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg* 54 (1986) 341-355.
- [16] N. Kopteva: How accurate is the streamline-diffusion FEM inside characteristic (boundary and interior) layers? *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg* 193 (2004), 4875-4889.
- [17] X.-G. Li, C.K. Chan, S. Wang: The finite element method with weighted basis functions for singularly perturbed convection-diffusion problems. *Journal of Computational Physics* 195 (2004) 773-789.
- [18] T. Linss: Analysis of a Galerkin finite element method on a Bakhvalov-Shishkin mesh for a linear convection-diffusion problem. *IMA Journal of Numerical Analysis* 20 (2000), 621-632.
- [19] T. Linss: Anisotropic meshes and streamline-diffusion stabilization for convection-diffusion problems. *Commun. Numer. Meth. Engrg.* (in press)
- [20] T. Linss, M. Stynes: The SDFEM on Shishkin meshes for linear convection-diffusion problems. *Numer. Math.* (2001) 87: 457-484.
- [21] K. W. Morton: Numerical solution of convection-diffusion problems. *Applied Mathematics and Mathematical Computation*, 12. Chapman & Hall, London, 1996.
- [22] A. Papastravrou: Adaptive Finite Element Methoden für Konvektions-Diffusionsprobleme. Dissertation Ruhr-Universität Bochum, 1998.
- [23] A. Quarteroni, A. Valli: Numerical approximation of partial differential equations, chapter 8. Springer, Berlin, 1994.

- [24] H.-G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska: Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion and flow problems. Springer Series in Computational Mathematics, 24. Springer, Berlin, 1996.
- [25] G. Sangalli: Global and local error analysis for the residual-free bubbles method applied to advection-dominated problems. SIAM J.Numer Anal. Vol. 38, No 5 (2000), pp. 1496-1522.
- [26] J.R. Shewchuk: Triangle: A Two-Dimensional Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator, <http://www-2.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>. Computer Science Division, University of California at Berkeley, California 94720-1776.
- [27] G. I. Shishkin: Grid Approximation of Singularly Perturbated Elliptic and Parabolic Equations. Second doctoral thesis, Keldysh Institute, Moscow, 1990. In Russian.
- [28] P. Thomann, C. Wüst: E-FEM: Eine Java-Software zum Lösen und Visualisieren von zweidimensionalen partiellen Differentialgleichungen, <http://www.math.unizh.ch/compmath/grid/convdiff.html>. Universität Zürich und der ETH Zürich.
- [29] S. Wang, Z.-C. Li: An analysis of a conforming exponentially fitted finite element method for a convection-diffusion problem. Journal of Computational and Applied Mathematics 143 (2002) 291-310.