

Universität Zürich
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

**Dimensionsreduktion für dünne Gebiete:
A posteriori Fehlerschätzung für
komplizierte Geometrien und springende
Koeffizienten**

Diplomarbeit

von

Judith Brönnimann

ausgeführt unter der Leitung von

Prof. Dr. S. Sauter

und

Dr. A. Smolianski

am Institut für Mathematik der Universität Zürich

Zürich, Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Einführung in die Problemstellung	4
1 Problemstellung	4
2 Das reduzierte Problem	5
3 A posteriori Schätzung des Modellfehlers	7
2 Modellfehler auf komplizierten Gebieten	12
1 Formulierung für die Poissongleichung	12
2 Konstante rechte Seite, homogene Randbedingungen	16
2.1 Rechteckgebiet	16
2.2 Sinusgebiet	16
2.3 Keilgebiet	17
2.4 Polygonebiet	19
2.5 Vergleich Zackengebiet – Sinusgebiet	21
3 Zusammenfassung	22
4 Anhang: Zusätzliche Grafiken	23
3 Einfluss der rechten Seite f	25
1 Variables f bezüglich x-Koordinate	25
2 Variables f bezüglich y-Koordinate	27
2.1 Rechteckgebiet	27
2.2 Sinusgebiet	28
2.3 Keilgebiet	29
3 Zusammenfassung	30
4 Anhang: Grafiken und Tabellen	31
4 Inhomogene Neumann-Randbedingungen	34
1 Konstante rechte Seite	34
1.1 Konstante Neumann-Randbedingungen	34
1.2 Variable Neumann-Randbedingungen	36
1.3 Sinusgebiet	36
2 Variable rechte Seite	38
2.1 Konstante Randbedingungen	38
2.2 Variable Randbedingungen	39
3 Kombination aller Faktoren	41
3.1 Sinusgebiet	41
3.2 Rechteckgebiet	42
4 Schlussfolgerungen	44

5	Verbesserte Abschätzung	45
1	Herleitung von ψ_2	45
1.1	Funktionen höherer Ordnung	46
2	Numerische Beispiele	46
2.1	Beispiel 1	46
2.2	Beispiel 2	48
3	Zusammenfassung	48
6	Modellfehler für springende Koeffizienten	49
1	Problemstellung	49
2	Numerische Beispiele	51
2.1	Konstante rechte Seite	51
2.2	Variable rechte Seite	52
3	Zusammenfassung	53
7	Abschätzung des Diskretisierungsfehlers	55
1	Berechnung des Diskretisierungsfehlers	55
2	Numerische Beispiele	57
2.1	Gebiete mit konstanter Dicke d_0	57
2.2	Gebiet mit variabler Dicke	59
2.3	Variable rechte Seite bezüglich y	59
3	Zusammenfassung	60
8	Abschätzung des Gesamtfehlers	61
9	Schlussfolgerungen	65
	Literaturverzeichnis	66

Einleitung

Die Methode der Dimensionsreduktion ist in der Praxis sehr verbreitet und wird vor allem im Ingenieurwesen verwendet. Sie wird herbeigezogen, um Probleme auf sogenannten *dünnen Gebieten* zu lösen. Dünn bedeutet in diesem Fall, dass die Ausdehnung des physischen Gebietes in die eine Koordinatenrichtung sehr viel kleiner ist als in die anderen Richtungen. Dies liefert die Motivation, das originale höherdimensionale Problem durch ein niederdimensionales zu ersetzen, beispielsweise indem ein dreidimensionales Problem durch ein zweidimensionales Modell analysiert wird. Den dabei entstehenden Fehler bezeichnen wir als *Modellfehler*. Ziel ist es, einen zuverlässigen *a posteriori* Fehlerschätzer zu entwickeln, um diesen Fehler kontrollieren zu können.

In [1] und [2] wurde ein neuer funktionaler Ansatz zur Fehlerabschätzung vorgestellt und auf die Methode der Dimensionsreduktion angewandt. Es wurde gezeigt, dass der Fehlerschätzer in der Regel zuverlässig und effizient war, gleichzeitig auch flexibel genug um Fälle zu behandeln, in denen die rechte Seite f mit $d_0 \rightarrow 0$ unbeschränkt anstieg.

In der vorliegenden Arbeit werden diese Ergebnisse noch vertieft und der Fehlerschätzer an zusätzlichen Beispielen getestet. Insbesondere sind Gebiete mit nicht konstanter Dicke von Interesse und Probleme, in denen springende (unstetige) Koeffizienten auftreten. Daneben wird ausser dem Modellfehler auch eine Abschätzung des *Diskretisierungsfehlers* betrachtet.

Die numerischen Berechnungen erfolgen mit einem MATLAB-Programm. Der exakte Fehler, der als Referenz für den Fehlerschätzer dient, wird ebenfalls numerisch durch MATLAB berechnet, basierend auf einer sehr feinen Triangulierung des Gebietes Ω .

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 1 wird die Methode der Dimensionsreduktion erläutert und der *a posteriori* Fehlerschätzer hergeleitet. Kapitel 2 untersucht die Abschätzung des Modellfehlers im Hinblick auf verschiedene Gebietsgeometrien. Kapitel 3 und 4 erweitern diese Ergebnisse auf nicht triviale Funktionen f und inhomogene Neumann-Randbedingungen. In Kapitel 5 wird eine verbesserte Abschätzung vorgestellt. In Kapitel 6 geht es schliesslich um Probleme mit springenden Koeffizienten und wie der entwickelte Fehlerschätzer für solche Beispiele verwendet werden kann. Kapitel 7 widmet sich dem Diskretisierungsfehler und in Kapitel 8 folgt eine Abschätzung des Gesamtfehlers durch Kombination von Modell- und Diskretisierungsfehler. Schlussfolgerungen aus dieser Arbeit sind in Kapitel 9 aufgeführt.

Kapitel 1

Einführung in die Problemstellung

In den folgenden Abschnitten beschreiben wir die Methode der Dimensionsreduktion, die verwendeten Modellprobleme und die Herleitung des verwendeten Fehlerschätzers. In dieser Arbeit geht es um zweidimensionale elliptische Probleme auf einem Gebiet Ω , die auf ein eindimensionales Gebiet $\hat{\Omega}$ reduziert werden sollen. Analog zu [1], der die Abschätzung des Modellfehlers für die Dimensionsreduktion von drei auf zwei Dimensionen beschreibt, zeigen wir die Modellprobleme und die Herleitung des Fehlerschätzers für die Reduktion von zwei auf eine Dimension.

1 Problemstellung

Wir betrachten zweidimensionale Lipschitz-Gebiete, die gegeben sind durch

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \hat{\Omega}, d_{\ominus}(x) < y < d_{\oplus}(x)\}.$$

Hierbei ist $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}$ die orthogonale Projektion von Ω auf die x -Achse, d_{\oplus} und d_{\ominus} sind Lipschitz-stetige Funktionen, definiert auf $\hat{\Omega}$. Der Rand von $\hat{\Omega}$ ist $\hat{\Gamma}$. Die unteren und oberen Begrenzungsflächen von Ω werden mit

$$\begin{aligned}\Gamma_{\ominus} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \hat{\Omega}, y = d_{\ominus}(x)\}, \\ \Gamma_{\oplus} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \hat{\Omega}, y = d_{\oplus}(x)\}\end{aligned}$$

bezeichnet, die seitlichen Ränder mit Γ_0 :

$$\Gamma_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \hat{\Gamma}, d_{\ominus}(x) < y < d_{\oplus}(x)\}.$$

Von einem dünnen Gebiet ist die Rede, wenn der Durchmesser von Ω in horizontaler x -Richtung sehr viel grösser ist als der maximale Durchmesser in y -Richtung:

$$\text{diam } \hat{\Omega} \gg \max_{x \in \hat{\Omega}} d(x),$$

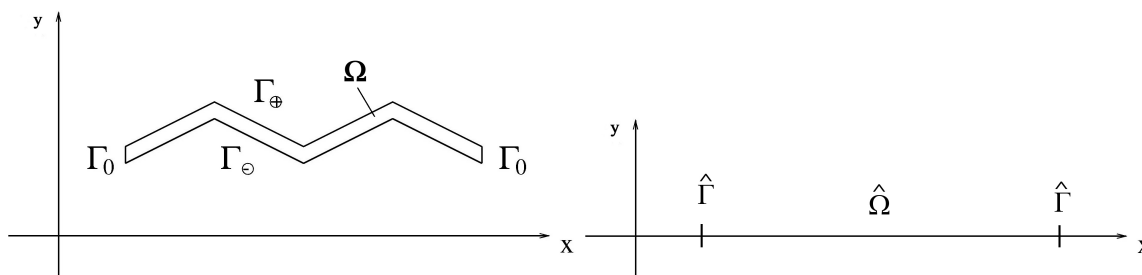


Abbildung 1.1: Skizze der Gebietsgeometrie

wobei $d = d_{\oplus} - d_{\ominus}$ die Dicke des Gebiets bezeichnet. Wir gehen davon aus, dass die Dicke immer grösser als Null ist, wir also kein degeneriertes Gebiet haben: $d(x) > 0$ für alle $x \in \hat{\Omega}$.

Auf Ω betrachten wir jetzt ein elliptisches Problem:

$$-\text{Div}(A\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0, \quad (1.2)$$

$$A\nabla u \cdot n_{\ominus} = F_{\ominus} \quad \text{auf } \Gamma_{\ominus}, \quad (1.3)$$

$$A\nabla u \cdot n_{\oplus} = F_{\oplus} \quad \text{auf } \Gamma_{\oplus}, \quad (1.4)$$

mit den gegebenen Daten: $f \in L_2(\Omega)$, $F_{\ominus} \in L_2(\Gamma_{\ominus})$, $F_{\oplus} \in L_2(\Gamma_{\oplus})$. Die äusseren Normalenvektoren an Γ_{\ominus} bzw. Γ_{\oplus} sind n_{\ominus} und n_{\oplus} .

Die (2×2) -Matrix $A = (a_{ij}(x, y))_{i,j=\overline{1,2}}$ mit Komponenten aus $L_{\infty}(\Omega)$ ist symmetrisch und positiv definit, d.h. es existieren Konstanten $0 < c < C < \infty$, so dass

$$c|\xi|^2 \leq A(x, y)\xi \cdot \xi \leq C|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \text{fast überall in } \Omega.$$

Der Raum der zulässigen Funktionen ist definiert durch

$$V_0 := \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ auf } \Gamma_0\}. \quad (1.5)$$

Damit können wir die schwache Formulierung des Problems (1.1) – (1.4) aufstellen:

Problem (P): Finde $u \in V_0$, so dass

$$\int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla w \, dy \, dx = \int_{\Omega} f w \, dy \, dx + \int_{\Gamma_{\oplus}} F_{\oplus} w \, ds + \int_{\Gamma_{\ominus}} F_{\ominus} w \, ds \quad \forall w \in V_0. \quad (\text{P})$$

Wir setzen $F_{\ominus}(x) := F_{\ominus}(x, d_{\ominus}(x))$, $F_{\oplus}(x) := F_{\oplus}(x, d_{\oplus}(x))$ für alle $x \in \hat{\Omega}$. Zum Schluss definieren wir die *Energienorm* durch

$$\|v\| := \left(\int_{\Omega} A(x, y) \nabla v \cdot \nabla v \, dy \, dx \right)^{1/2} \quad \forall v \in V_0. \quad (1.6)$$

2 Das reduzierte Problem

Da das Gebiet dünn ist, ist folgende Annahme naheliegend:

$$\text{Die exakte Lösung } u \text{ ist fast konstant in Richtung der } y\text{-Koordinate.} \quad (1.7)$$

Das liefert die Motivation für das sogenannte *reduzierte Modell nullter Ordnung* für das ursprüngliche Problem (P). Das Modell ist sehr beliebt aufgrund seiner Einfachheit und der reinen niederdimensionalen Formulierung, im Gegensatz zu Modellen höherer Ordnung.

Mit (1.7) kann man erwarten, dass die exakte Lösung u gut approximiert wird durch Funktionen aus dem Unterraum

$$\widehat{V}_0 := \{v \in V_0 \mid \exists \hat{v} \in H_0^1(\hat{\Omega}) \text{ so dass } v(x, y) = \hat{v}(x) \text{ für fast alle } (x, y) \in \Omega\}. \quad (1.8)$$

Somit kann jede Funktion aus \widehat{V}_0 mit einer entsprechenden Funktion $\hat{v} \in H_0^1(\hat{\Omega})$ identifiziert werden (und umgekehrt, denn für jedes $\hat{v} \in H_0^1(\hat{\Omega})$ kann man $v \in \widehat{V}_0 \subset V_0$ rekonstruieren durch konstantes Fortsetzen wie in der Definition von \widehat{V}_0). Dann führt die Projektion von u mit der Energienorm auf den Unterraum \widehat{V}_0 zum *reduzierten Problem*:

Problem (\hat{P}): Finde $\hat{u} \in \widehat{V}_0$, so dass

$$\int_{\Omega} A \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{w} \, dy \, dx = \int_{\Omega} f \hat{w} \, dy \, dx + \int_{\Gamma_{\oplus}} F_{\oplus} \hat{w} \, ds + \int_{\Gamma_{\ominus}} F_{\ominus} \hat{w} \, ds \quad \forall \hat{w} \in \widehat{V}_0. \quad (\hat{P})$$

Nun können wir den Fehler der Dimensionsreduktion (den *Modellfehler*) definieren als die Differenz

$$e := u - \hat{u} \quad (1.9)$$

zwischen der Lösung u des ursprünglichen Problems (P) und \hat{u} des reduzierten Problems (\hat{P}).

Bemerkung 2.1 Wir halten fest, dass die zweite Komponente des Vektors $\nabla \hat{u}$ Null ist (da \hat{u} nicht von y abhängt) und deshalb wird der Vektor manchmal als reellwertige Funktion bzw. als Skalar betrachtet, wenn keine Verwechslung möglich ist.

Um zu sehen, dass das reduzierte Problem (\hat{P}) tatsächlich ein eindimensionales Problem ist, definieren wir die Operation ($\tilde{\cdot}$) als Mittelung in y -Richtung:

$$\forall g \in L_1(\Omega) : \quad \tilde{g}(x) := \frac{1}{d(x)} \int_{d_{\ominus}(x)}^{d_{\oplus}(x)} g(x, y) \, dy \quad \text{für fast alle } x \in \hat{\Omega}. \quad (1.10)$$

Es gilt

$$\int_{\Gamma_{\ominus}} F_{\ominus} \hat{w} \, ds = \int_{\hat{\Omega}} F_{\ominus}(x) \hat{w}(x) \sqrt{1 + |\nabla d_{\ominus}(x)|^2} \, dx \quad (1.11)$$

(analog für $\int_{\Gamma_{\oplus}} F_{\oplus} \hat{w} \, ds$), somit können wir Problem (\hat{P}) wie folgt schreiben:

Problem (Q): Finde $\hat{u} \in \widehat{V}_0$, so dass

$$\int_{\hat{\Omega}} d(x) \tilde{A}_p(x) \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{w} \, dx = \int_{\hat{\Omega}} d(x) \hat{f}(x) \hat{w} \, dx \quad \forall \hat{w} \in \widehat{V}_0. \quad (Q)$$

Die Notation $A_p(x, y)$ stellt die Reduktion von A um eine Dimension dar, den “ebenen” Teil von A . Da A eine (2×2) -Matrix ist, ist in unserem Fall $A_p(x, y) = a_{11}(x, y)$. Somit ist $\tilde{A}_p(x)$ der gemittelte Koeffizient $\tilde{a}_{11}(x) = \frac{1}{d(x)} \int_{d_{\ominus}}^{d_{\oplus}} a_{11}(x, y) \, dy$. Weiter ist

$$\hat{f}(x) = \tilde{f}(x) + \frac{F_{\oplus} \sqrt{1 + |\nabla d_{\oplus}|^2} + F_{\ominus} \sqrt{1 + |\nabla d_{\ominus}|^2}}{d(x)}. \quad (1.12)$$

Problem (Q) ist nun ein eindimensionales elliptisches Problem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen:

$$-\operatorname{div}(d(x) \tilde{A}_p(x) \nabla \hat{u}) = d(x) \hat{f}(x) \quad \text{in } \hat{\Omega} \quad (1.13)$$

$$\hat{u} = 0 \quad \text{auf } \hat{\Gamma} \quad (1.14)$$

Bemerkung 2.2 Wir unterscheiden zwischen dem zweidimensionalen Divergenzoperator $\operatorname{Div}(\cdot)$ und dem eindimensionalen Operator $\operatorname{div}(\cdot)$. Für eindimensionale Funktionen mag die Notation etwas umständlich erscheinen, da $\operatorname{div}(\cdot)$ und $\nabla(\cdot)$ einfach der Ableitung nach x entsprechen. Mit dieser Schreibweise lässt sich aber die Herleitung analog für höhere Dimensionen verwenden, ohne dass neue Begriffe gebraucht werden.

3 A posteriori Schätzung des Modellfehlers

Um den Fehler der Dimensionsreduktion zu kontrollieren, benützen wir den Fehlerschätzer, der in [2] hergeleitet wurde und wenden ihn auf das originale zweidimensionale Problem (P) an.

Der Fehlerschätzer hat folgende Form:

Für alle $\gamma > 0$, $\delta > 0$ und $y^* \in H_*(\Omega, \text{Div})$ gilt

$$\| \|u - v\| \|^2 \leq (1 + \gamma) M_1^2 + (1 + \frac{1}{\gamma})(1 + \delta) C_\Omega^2 M_2^2 + (1 + \frac{1}{\gamma})(1 + \frac{1}{\delta}) C_\Gamma^2 (1 + C_\Omega^2) M_3^2, \quad (1.15)$$

wobei v eine beliebige Funktion aus dem Energieraum V_0 ist und M_1^2 , M_2^2 , M_3^2 Funktionale sind, die von y^* abhängen. C_Ω ist die Konstante aus der Friedrichs-Ungleichung:

$$C_\Omega^{-2} = \inf_{w \in V_0 \setminus \{0\}} \frac{\| \|w\| \|^2}{\|w\|_{L_2(\Omega)}^2},$$

C_Γ ist die Konstante aus der Spur-Ungleichung:

$$C_\Gamma^2 = \sup_{w \in V_0 \setminus \{0\}} \frac{\|w\|_{L_2(\Gamma_\oplus)}^2 + \|w\|_{L_2(\Gamma_\ominus)}^2}{\| \|w\| \|^2 + \|w\|_{L_2(\Omega)}^2}.$$

Der Raum $H_*(\Omega, \text{Div})$ ist definiert als

$$H_*(\Omega, \text{Div}) := \{y^* \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \text{Div } y^* \in L_2(\Omega), y^* \cdot n_\ominus \in L_2(\Gamma_\ominus), y^* \cdot n_\oplus \in L_2(\Gamma_\oplus)\}.$$

Die Funktionale M_1^2 , M_2^2 , M_3^2 sind gegeben durch

$$M_1^2 := \int_\Omega (\nabla v - A^{-1} y^*) \cdot (A \nabla v - y^*) \, dy \, dx \quad (1.16)$$

$$M_2^2 := \|\text{Div } y^* + f\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (1.17)$$

$$M_3^2 := \|F_\ominus - y^* \cdot n_\ominus\|_{L_2(\Gamma_\ominus)}^2 + \|F_\oplus - y^* \cdot n_\oplus\|_{L_2(\Gamma_\oplus)}^2 \quad (1.18)$$

Bemerkung 3.1 Der Fehlerschätzer M liefert eine sichere obere Schranke für den exakten Fehler, wenn $y^* \in H_*(\Omega, \text{Div})$ gilt. Zusätzlich ist M *asymptotisch exakt*, d. h. M nähert sich dem exakten Fehler $\|\nabla(u - v)\|_{L_2}$ wenn $y^* \rightarrow \nabla u$ in $H_*(\Omega, \text{Div})$ (siehe dazu [2]).

Ist y^* bereits eine gute Näherung für ∇u , wird der Term $C_\Omega \|\text{Div } y^* + f\|_{L_2}$ durch $\|\nabla v - y^*\|_{L_2}$ dominiert, und es ist zu erwarten, dass der Effektivitätsindex $\frac{M}{\| \|u - v\| \|}$ nahe bei 1 bleibt, also M den Fehler auch nicht zu sehr überschätzt.

Da Abschätzung (1.15) für jede Näherungslösung v aus V_0 gilt und die Lösung des reduzierten Problems $\hat{u} \in \widehat{V}_0 \subset V_0$ ist, können wir einfach \hat{u} in (1.15) einsetzen, um eine obere Schranke für den Modellfehler zu erhalten. Es sei betont, dass die Abschätzung für alle positiven Zahlen γ und δ und für jede vektorwertige Funktion y^* aus $H_*(\Omega, \text{Div})$ gültig ist.

Die beste Wahl für y^* wäre der exakte Fluss $A \nabla u$ (dann würden M_2 und M_3 verschwinden und M_1 würde uns den exakten Fehler in der Energienorm angeben), doch das macht keinen Sinn, da u und somit ∇u nicht bekannt sind. Wir müssen uns an eine berechenbare Grösse halten, welche die unbekannt Lösung u nicht benötigt.

Wir approximieren den Fluss durch

$$y^* = \tilde{A}_p \nabla \hat{u} + \tau^* \quad \text{mit } \tau^* = \{0, \psi(x, y)\}^T \quad (1.19)$$

mit ψ als eine Hilfsfunktion aus $L_2(\Omega)$, so dass $\frac{\partial \psi}{\partial y} \in L_2(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Gamma_\ominus)$ und $\psi \in L_2(\Gamma_\oplus)$ ist. Die konkrete Form von ψ wird später gegeben; ihre Bedeutung wird klar im Falle der Poisson-Gleichung ($A = \mathbf{I}$), wo ψ offensichtlich die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial y}$ der exakten Lösung in y -Richtung

approximieren sollte. Mit (1.13) ist es einfach einzusehen, dass y^* aus (1.19) zu $H_*(\Omega, \text{Div})$ gehört.

Bemerkung 3.2 Nach Bemerkung 3.1 besitzt M die Eigenschaft der asymptotischen Exaktheit. Wenn wir aber y^* wie in (1.19) wählen kann diese Eigenschaft verloren gehen, da der einzige verbleibende Freiheitsgrad die Funktion ψ ist und der approximierte Fluss $\tilde{A}_p \nabla \hat{u}$ nicht unbedingt den exakten Fluss $A \nabla u$ genau genug abbildet. Wenn wir jedoch die ersten beiden Komponenten von y^* nicht fixierten, würde die Approximation die Minimierung der rechten Seite von (1.15) erfordern, und das wäre äquivalent zur Lösung eines dreidimensionalen Problems. Unser Ziel ist jedoch, solche höherdimensionalen Operationen in der Berechnung des Fehlerschätzers zu vermeiden. Die Berechnung sollte nicht aufwändiger sein als das Lösen des reduzierten Problems. In den meisten Situationen ist aber $\tilde{A}_p \nabla \hat{u}$ eine gute Näherung für den “ebenen” Teil des exakten Flusses und, wie in [1] gezeigt wurde, ist der Fehlerschätzer mit y^* wie in (1.19) effizient und flexibel genug.

Umformen der Terme M_1, M_2, M_3 : Um Abschätzung (1.15) in eine bessere Form zu bringen, führen wir folgende Notation ein:

$$\begin{aligned} B &:= A^{-1} \quad (B(x, y) = (b_{ij}(x, y))_{i,j=\overline{1,2}}) \\ B_p &:= b_{11}(x, y). \end{aligned}$$

Es gilt $B = B^T$. Mit $v = \hat{u}$ wird M_1^2 somit zu

$$M_1^2 = \int_{\Omega} (\nabla \hat{u} - B y^*) \cdot (A \nabla \hat{u} - y^*) \, dy \, dx = \int_{\Omega} (A \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{u} - 2 y^* \cdot \nabla \hat{u} + B y^* \cdot y^*) \, dy \, dx. \quad (1.20)$$

Für den ersten Term in (1.20) erhält man sofort

$$\int_{\Omega} A \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{u} \, dy \, dx = \int_{\tilde{\Omega}} d(x) \tilde{A}_p(x) \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{u} \, dx. \quad (1.21)$$

Der zweite Term in (1.20) kann ebenfalls umgeformt werden, wenn man beachtet

$$y^* \cdot \nabla \hat{u} = (\tilde{A}_p \nabla \hat{u} + \tau^*) \cdot \nabla \hat{u} = \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{u},$$

da die zweite Komponente von $\nabla \hat{u}$ gleich null ist. Somit gilt

$$\int_{\Omega} y^* \cdot \nabla \hat{u} \, dy \, dx = \int_{\tilde{\Omega}} d(x) \tilde{A}_p(x) \nabla \hat{u} \cdot \nabla \hat{u} \, dx. \quad (1.22)$$

Für den dritten Term in (1.20) erhalten wir

$$\begin{aligned} B y^* \cdot y^* &= B(\tilde{A}_p \nabla \hat{u} + \tau^*) \cdot (\tilde{A}_p \nabla \hat{u} + \tau^*) \\ &= B \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u} + B \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \cdot \tau^* + B \tau^* \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u} + B \tau^* \cdot \tau^* \\ &= B_p \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u} + 2(b_{21} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u}) \psi + b_{22} \psi^2. \end{aligned}$$

Das führt zu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} B y^* \cdot y^* \, dy \, dx &= \int_{\tilde{\Omega}} d(x) \tilde{B}_p \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \, dx + \\ &\quad \int_{\Omega} b_{22} \psi(x, y)^2 + 2(b_{21} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u}) \psi(x, y) \, dy \, dx. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Wenn wir jetzt (1.21), (1.22) und (1.23) in (1.20) einsetzen erhalten wir

$$M_1^2 = \int_{\hat{\Omega}} d(x)(\tilde{B}_p \tilde{A}_p - 1) \nabla \hat{u} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \, dx + \int_{\Omega} (b_{22} \psi(x, y)^2 + 2(b_{21} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u}) \psi(x, y)) \, dx. \quad (1.24)$$

Es ist interessant zu bemerken, dass das erste Integral in (1.24) den Fehler durch die Mittelung der Koeffizienten von $A(x, y)$ repräsentiert. Dies wird schnell ersichtlich im Falle einer Diagonalmatrix A , d. h. wenn $a_{21} = 0$ (dann ist $B_p = A_p^{-1}$ und ohne die Mittelung würde das Integral identisch zu null).

Das Funktional M_2^2 aus (1.15) kann ebenfalls umgeformt werden, wenn y^* wie in (1.19) gewählt wird. Zuerst bemerken wir, dass gilt:

$$\text{Div } y^* = \text{div } \tilde{A}_p \nabla \hat{u} + \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (1.25)$$

Aus (1.13) können wir nun herleiten:

$$\text{div } \tilde{A}_p \nabla \hat{u} = -\hat{f} - \frac{\nabla d}{d} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u}. \quad (1.26)$$

Somit ist

$$M_2^2 = \left\| f - \tilde{f} - \frac{F_{\oplus} \sqrt{1 + |\nabla d_{\oplus}|^2} + F_{\ominus} \sqrt{1 + |\nabla d_{\ominus}|^2}}{d} - \frac{\nabla d}{d} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (1.27)$$

Der Term M_3^2 bekommt mit y^* folgende Gestalt:

$$M_3^2 = \|F_{\ominus} - \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \cdot n_{\ominus} - \psi n_{\ominus 2}\|_{L_2(\Gamma_{\ominus})}^2 + \|F_{\oplus} - \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \cdot n_{\oplus} - \psi n_{\oplus 2}\|_{L_2(\Gamma_{\oplus})}^2, \quad (1.28)$$

wobei $\tilde{A}_p \nabla \hat{u}$ als ein Vektor in \mathbb{R}^2 betrachtet wird, dessen zweite Komponente Null ist, und

$$n_{\ominus 2} = \frac{-1}{\sqrt{1 + |\nabla d_{\ominus}|^2}}, \quad n_{\oplus 2} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla d_{\oplus}|^2}}$$

sind die zweiten Komponenten der Normalenvektoren n_{\ominus} und n_{\oplus} .

Nun kann der allgemeine a posteriori Fehlerschätzer für die Dimensionsreduktion vollständig geschrieben werden, indem man (1.24), (1.27) und (1.28) in (1.15) einsetzt.

Die Funktion $\psi(x, y)$

In unserem Fehlerschätzer haben wir nun immer noch die Freiheit, eine passende Funktion ψ zu wählen. Die einfachste Methode ist, ψ so zu wählen, dass der Term M_3 (das Residuum der Neumann-Randbedingungen) gerade Null ergibt. Um das zu erreichen schreiben wir die L_2 -Normen über Γ_{\ominus} , Γ_{\oplus} in (1.28) als Integrale über $\hat{\Omega}$:

$$\|F_{\ominus} - \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \cdot n_{\ominus} - \psi n_{\ominus 2}\|_{L_2(\Gamma_{\ominus})}^2 = \int_{\hat{\Omega}} (F_{\ominus}(x) - \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \cdot n_{\ominus} - \psi(x, d_{\ominus}(x)) n_{\ominus 2})^2 \sqrt{1 + |\nabla d_{\ominus}|^2}$$

(analog für $L_2(\Gamma_{\oplus})$). Wir definieren die Funktionen G_{\ominus} und G_{\oplus} durch

$$G_{\ominus, \oplus} := F_{\ominus, \oplus} - \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \cdot n_{\ominus, \oplus}$$

und setzen

$$\psi_1(x, y) := \alpha(x)y + \beta(x), \quad (1.29)$$

wobei die Funktionen α und $\beta \in L_2(\hat{\Omega})$ so gewählt sind, dass gilt

$$\psi_1 n_{\oplus 2} = G_{\oplus} \text{ bei } y = d_{\oplus}, \quad \psi_1 n_{\ominus 2} = G_{\ominus} \text{ bei } y = d_{\ominus}. \quad (1.30)$$

Da $n_{\oplus 2}$, $n_{\ominus 2}$ zu $L_{\infty}(\hat{\Omega})$ gehören und in $\hat{\Omega}$ nicht Null sein können, sind die Funktionen α und β eindeutig definiert durch die obenstehenden Bedingungen, nämlich:

$$\alpha = \frac{1}{d} \left(\frac{G_{\oplus}}{n_{\oplus 2}} - \frac{G_{\ominus}}{n_{\ominus 2}} \right) \quad (1.31)$$

$$\beta = \frac{1}{d} \left(\frac{G_{\ominus}}{n_{\ominus 2}} d_{\oplus} - \frac{G_{\oplus}}{n_{\oplus 2}} d_{\ominus} \right) \quad (1.32)$$

Offensichtlich gehören die Funktion ψ_1 und ihre Ableitung in y -Richtung zu $L_2(\Omega)$. Zusätzlich gehört ψ_1 zu $L_2(\Gamma_{\ominus})$ und $L_2(\Gamma_{\oplus})$ (da $\psi_1|_{y=d_{\oplus, \ominus}} \in L_2(\hat{\Omega})$), und M_3 wird exakt Null.

Bemerkung 3.3 Man kann auch eine quadratische Funktion ψ_2 betrachten (d.h. quadratisch bezüglich y):

$$\psi_2(x, y) = \psi_1(x, y) + \eta(x)(y - d_{\oplus}(x))(y - d_{\ominus}(x)) \quad (1.33)$$

mit η als beliebige Funktion aus $L_2(\hat{\Omega})$. Wenn wir ψ_2 anstatt ψ in (1.28) einsetzen wird M_3 ebenfalls null, da für $y = d_{\oplus}$ und $y = d_{\ominus}$ (vergl. (1.30)) ein Faktor verschwindet. Wir werden Beispielen begegnen, in denen ψ_1 nicht ausreichend ist und ψ_2 verwendet werden sollte. In analoger Weise kann man Funktionen $\{\psi_m\}$ konstruieren, $m = 3, 4, \dots$, die jeweils M_3 zum Verschwinden bringen und es erlauben, die dritte Komponente von $A\nabla u$ mit grösserer Genauigkeit zu approximieren (siehe Kapitel 5).

Nachdem wir die Funktion ψ so gewählt haben, dass $M_3 = 0$ ist, erhalten wir für den Fehlerschätzer in der Energienorm folgende Formel:

$$\| \|u - \hat{u}\| \|^2 \leq (1 + \gamma)M_1^2 + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)C_{\Omega}^2 M_2^2 \quad (1.34)$$

wobei γ eine beliebige positive Zahl ist. C_{Ω} ist die Friedrichskonstante und M_1^2 , M_2^2 sind gegeben durch (1.24) und (1.27). Minimieren wir die rechte Seite von (1.34) bezüglich des Parameters γ , erhalten wir folgende Abschätzung für den Modellfehler in der Energienorm:

$$\| \|u - \hat{u}\| \leq M := M_1 + C_{\Omega} M_2. \quad (1.35)$$

Bemerkung 3.4 (Friedrichskonstante) Die Konstante C_{Ω} stammt aus der Friedrichsgleichung und muss in der Regel numerisch berechnet werden. Die Konstante hängt nur von der Geometrie des Gebietes Ω ab und kann mittels $1/\sqrt{\lambda}$ abgeschätzt werden, wobei λ der kleinste Eigenwert des elliptischen Operators $-\text{Div}(A\nabla \cdot)$ ist (ergänzt mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf Γ_0 und homogenen Neumann-Randbedingungen auf $\Gamma_{\oplus, \ominus}$). Eine einfachere, wenn auch gröbere Abschätzung für C_{Ω} besteht in $(\text{diam } \hat{\Omega})/c$, wobei c eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert der Matrix $A(x, y)$ in Ω ist.

Man beachte, dass C_{Ω} den Term M_2 multipliziert, der von höherer Ordnung ist als der Term M_1 (wir werden dies in den Beispielen noch genauer sehen). Somit ist die Majorante M nicht empfindlich auf ein allfälliges Überschätzen von C_{Ω} .

Bemerkung 3.5 Die Lipschitz-Stetigkeit der Funktionen $d_{\ominus}(x)$ und $d_{\oplus}(x)$ wurde in (1.11) zur Umformung des Randintegrals ausgenützt. Denn mit dieser Voraussetzung lässt sich immer eine Konstante c finden, so dass die Gradienten ∇d_{\oplus} und ∇d_{\ominus} beschränkt sind. Es ist zwar möglich, mit der hergeleiteten Abschätzung auch Fälle zu betrachten, in denen $d_{\ominus}(x)$ oder $d_{\oplus}(x)$ nicht mehr Lipschitz-stetig sind (siehe Diskussion des L-Gebietes auf S. 20). Die Ergebnisse sollten allerdings als Einzelfälle betrachtet werden.

Es können auch Situationen vorliegen, in denen die oberen und unteren Begrenzungsflächen durch allgemeine parametrisierte Funktionen gegeben sind (beispielsweise Kreise mit verschiedenen Radien r). In solchen Fällen können wir uns auf eine parametrisierte Mittelebene zurückziehen, ohne die gegebenen Eigenschaften zu verlieren. Eine Untersuchung solcher Beispiele würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Kapitel 2

Abschätzung des Modellfehlers auf komplizierten Gebieten

Mit dem in Kapitel 1 hergeleiteten Fehlerschätzer M soll nun der *Modellfehler* für die Methode der Dimensionsreduktion abgeleitet werden. In diesem Kapitel wird untersucht, wie sich der Modellfehler für komplizierte Gebietsgeometrien verhält, insbesondere für Gebiete mit variabler Dicke. Darauf aufbauend werden in den folgenden Kapiteln weitere Faktoren wie Randbedingungen und nicht konstante Funktionen f hinzugefügt.

Vorerst beschränken wir uns auf den Fall der Poissongleichung, Probleme mit springenden Koeffizienten werden später in Kapitel 6 betrachtet. In Abschnitt 1 wird die Form des Fehlerschätzers konkret für die Poissongleichung und ψ_1 angegeben, anschliessend werden die betrachteten Gebiete und Methoden vorgestellt. In Abschnitt 2 folgen die numerischen Beispiele für verschiedene Gebietsgeometrien und Abschnitt 3 enthält eine Zusammenfassung der Ergebnisse. Abschnitt 4 dient als Anhang, der zusätzliche Plots zu den Beispielen beinhaltet.

1 Formulierung für die Poissongleichung

Ziel ist die Abschätzung des Modellfehlers der Dimensionsreduktion durch die Majorante M :

$$\|u - \hat{u}\| \leq M := M_1 + C_\Omega M_2. \quad (2.1)$$

Wir betrachten den Fall der Poissongleichung:

Problem (P): $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \hat{\Omega}, d_\ominus(x) < y < d_\oplus(x)\}$ und $\hat{\Omega} = (0, 1)$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{bei } x = 0, 1 \\ \nabla u \cdot n_{\oplus, \ominus} &= F_{\oplus, \ominus} && \text{bei } y = d_{\oplus, \ominus} \end{aligned}$$

d. h. A ist die (2×2) -Einheitsmatrix. Dadurch ergeben sich Vereinfachungen bei der Berechnung der Terme M_1 und M_2 . Mit $\psi_1(x, y) = \alpha(x)y + \beta(x)$ (siehe 1.29) können wir M_1 und M_2 folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} M_1^2 &= \int_{\Omega} \psi_1^2 dy dx \\ &= \int_{\hat{\Omega}} \alpha^2 \frac{1}{3} (d_\oplus^3 - d_\ominus^3) + \alpha\beta(d_\oplus^2 - d_\ominus^2) + \beta^2(d_\oplus - d_\ominus) dx \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$M_2^2 = \int_{\Omega} (f - \tilde{f})^2 dy dx. \quad (2.3)$$

Hierbei folgt (2.3) aus (1.27) unter der Berücksichtigung, dass sich die mittleren Terme aufheben. Die Funktionen α und β sind gegeben durch

$$\alpha(x) := \frac{1}{d(x)} \left[F_{\oplus} \sqrt{1 + |\nabla d_{\oplus}(x)|^2} + F_{\ominus} \sqrt{1 + |\nabla d_{\ominus}(x)|^2} + \nabla \hat{u} \cdot \nabla d(x) \right], \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \beta(x) := \frac{1}{d(x)} \left[d_{\oplus} \left(-F_{\ominus} \sqrt{1 + |\nabla d_{\ominus}(x)|^2} + \nabla \hat{u} \cdot \nabla d_{\ominus} \right) \right. \\ \left. - d_{\ominus} \left(F_{\oplus} \sqrt{1 + |\nabla d_{\oplus}(x)|^2} + \nabla \hat{u} \cdot \nabla d_{\oplus} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dabei ist \hat{u} die Lösung des reduzierten Problems:

Problem (Q):

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (d(x) \nabla \hat{u}) &= d(x) \hat{f}(x) && \text{in } \hat{\Omega} = (0, 1) \\ \hat{u} &= 0 && \text{bei } x = 0, 1 \end{aligned}$$

Für \tilde{f} , \hat{f} gelten die gleichen Bezeichnungen wie in Kapitel 1:

$$\hat{f}(x) = \tilde{f}(x) + \frac{F_{\oplus} \sqrt{1 + |\nabla d_{\oplus}|^2} + F_{\ominus} \sqrt{1 + |\nabla d_{\ominus}|^2}}{d(x)}, \quad (2.6)$$

und $\tilde{f}(x)$ ist die in y -Richtung gemittelte rechte Seite.

Bemerkung 1.1 Bei Betrachtung der Ausdrücke (2.2) – (2.5) stellen wir drei wesentliche Einflussfaktoren fest:

- Die Gebietsgeometrie durch $\nabla d(x)$, $\nabla d_{\oplus}(x)$, $\nabla d_{\ominus}(x)$,
- die Neumann-Randbedingungen durch F_{\oplus} , F_{\ominus} ,
- die Funktion f durch den Ausdruck $(f - \tilde{f})$.

Die Gebietsgeometrie und die Randbedingungen treten in M_1 auf, M_2 misst den Fehler, der durch die Mittelung von f in y -Richtung entsteht. Die konkreten Auswirkungen auf das Verhalten der Majorante M ist Gegenstand der Untersuchung in diesem und den folgenden Kapiteln.

Spezialfall: Gebiete mit konstanter Dicke, homogene Randbedingungen

Betrachten wir den Spezialfall von Gebieten mit konstanter Dicke d_0 und homogenen Neumann-Randbedingungen können wir bereits erste Aussagen über das erwartete Verhalten von M machen. In M_1 vereinfacht sich $(d_{\oplus} - d_{\ominus})$ zu d_0 , das überall ausgeklammert und vor das Integral gezogen werden kann. Somit ist M_1 von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ wenn die Dicke des Gebiets gegen null geht. Dies gilt für homogene wie auch für kompatible (siehe Kap. 4) Randbedingungen. Mit beliebigen Randbedingungen F_{\oplus} , F_{\ominus} muss das jedoch nicht der Fall sein, da $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ von d_0 abhängen.

Wenn $f \in L_{\infty}(\Omega)$ gilt, dann ist der zweite Term M_2 von gleicher Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ und damit konvergiert der ganze Schätzer M gegen null mit $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ für $d_0 \rightarrow 0$. Ist allerdings $f \in C^1(\Omega)$, so ist M_2 von höherer Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$ als M_1 (nachzuweisen durch einfache Taylorentwicklung in y -Richtung).

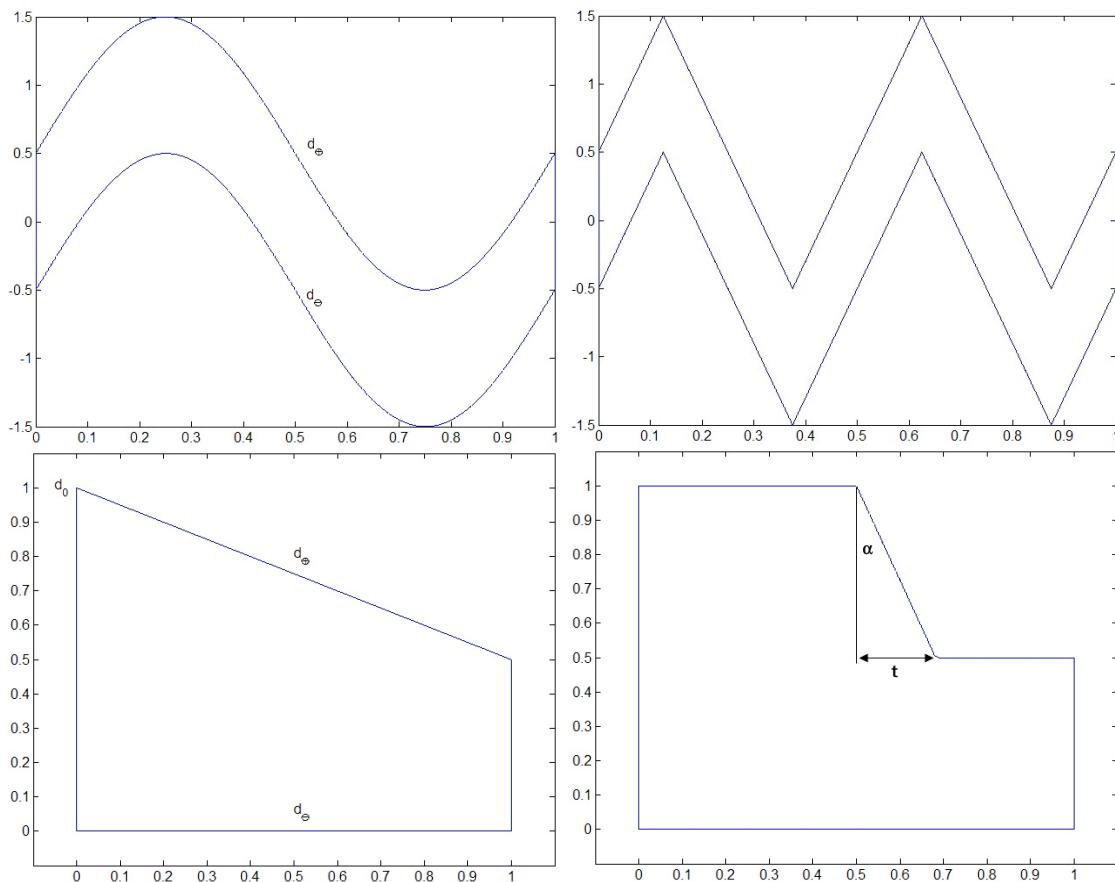


Abbildung 2.1: Verschiedene Gebietsformen: (oben links) Sinusgebiet, (oben rechts) Zackengebiet, (unten links) Keilgebiet, (unten rechts) Polygon.

Betrachtete Gebietsformen von Ω

Das Gebiet $\hat{\Omega}$ ist definiert als das Einheitsintervall $(0,1)$. Die verschiedenen Formen von Ω erhalten wir, indem wir jeweils die Funktionen $d_+(x)$ und $d_-(x)$ über $\hat{\Omega}$ angeben. In den Beispielen werden hauptsächlich folgende Gebiete untersucht:

1. Rechteckgebiet: Entspricht einer ebenen Platte mit geraden Flächen, die Dicke des Gebiets ist in ganz $\hat{\Omega}$ konstant. Wir setzen $d_- = 0$, $d_+ = d_0$, wobei $d_0 = \text{const} > 0$ die Gebietsdicke bezeichnet.
2. Sinusgebiet: Auch ein Gebiet mit konstanter Dicke, wobei die Ober- und Untergrenze durch parallele Sinusfunktionen gegeben sind. Es gilt $d_{\pm}(x) = \sin(2\pi x) \pm \frac{d_0}{2}$. Als Variante wird auch $d_{\pm}(x) = \sin(4\pi x) \pm \frac{d_0}{2}$ verwendet.
3. Zackengebiet: Basiert auf der zweiten Variante des Sinusgebietes, allerdings wird zwischen den Extremalstellen linear interpoliert. Es gilt $\nabla d_{\pm} = \pm 8$.
4. Keilgebiet: Gebiet mit nicht konstanter Dicke, die Obergrenze d_+ besteht aus einer affinen linearen Funktion. Wir setzen $d_- = 0$, $d_+(x) = \frac{-d_0}{2}x + d_0$.
5. Polygon: Gebiet mit einer einspringenden Ecke in Abhängigkeit eines Winkels α . Wir setzen am Anfang eine horizontale Gerade auf Höhe d_0 , am Ende bei $d_0/2$. Dazwischen

fällt das Gebiet mit einem Winkel α ab. Von Interesse sind vor allem kleine Winkel α , denn das bedeutet, dass auf diesem Gebietsabschnitt $|\nabla d(x)|$ gross ist.

Lokale Fehlerverteilung

Das 1d-Problem (Q) wird mit finiten Elementen diskretisiert, die auf einer Zerlegung von $\hat{\Omega}$ in eine Anzahl n Intervalle basieren. Eine Stärke des Schätzers M ist, dass er uns nicht nur eine globale, sondern auch eine *lokale* Fehlerverteilung liefert. Da M_1 und M_2 aus Integralen bestehen, können wir diese Funktionen auch elementweise für jedes Intervall aus $\hat{\Omega}$ berechnen. Das ermöglicht uns, Plots der lokalen Fehlerverteilung zu generieren, denen man entnehmen kann, wo der Fehler lokal besonders gross oder besonders klein wird. Diese Grafiken liefern uns eine Diskussionsgrundlage zur Frage, wo und wie wir das Modell lokal verbessern können (*Modelladaptivität*).

Bemerkung 1.2 Es sei betont, dass es in diesem Kapitel nur um den Modellfehler geht. Wir nehmen an, dass der bei der Diskretisierung von (Q) entstehende Diskretisierungsfehler im Verhältnis zum Modellfehler vernachlässigbar klein ist, wenn wir das Gebiet $\hat{\Omega}$ fein genug zerlegen. Der Diskretisierungsfehler wird später in Kapitel 7 betrachtet.

Effektivitätsindex

Grundsätzlich würde es genügen, das Problem (Q) zu lösen, beispielsweise mit einer Finite-Elemente-Methode. Daraus erhält man die reduzierte Lösung \hat{u} und kann damit die Majorante M berechnen. Darüber hinaus möchte man jedoch auch wissen, wie effektiv M tatsächlich ist. Dazu wird M mit dem exakten analytischen Fehler $|||e|||$ verglichen. Der *Effektivitätsindex* ist definiert durch

$$\text{eff} = \frac{M}{|||e|||}.$$

Um $|||e|||$ bestimmen zu können, sind weitere Schritte notwendig:

Zuerst benötigt man die kontinuierliche zweidimensionale Lösung von (P). Diese erhält man, indem entweder ein Beispiel gewählt wird, bei dem die Lösung analytisch bekannt ist, oder man löst das Problem (P) wiederum mit finiten Elementen.

Ist u analytisch bekannt, kann $|||e|||$ direkt durch $\|\nabla(u - \hat{u})\|_{L_2(\Omega)}$ berechnet werden. Liegt u als zweidimensionale FE-Lösung vor, setzt man \hat{u} auf Ω konstant fort und kann somit den Fehler $e = u - \hat{u}$ auf allen Punkten der Triangulierung von Ω bestimmen. Die Energienorm erhält man durch $(e^T \cdot K \cdot e)^{1/2}$, wobei K für die Systemmatrix steht, die beim Berechnen der zweidimensionalen Lösung generiert wird. Zu beachten ist, dass man auf diese Weise einen *globalen* Wert für $|||e|||$ erhält, nicht einen lokalen. Somit ist auch *eff* eine globale Grösse.

Idealerweise wäre *eff* = 1, dann würde M den exakten Fehler wiedergeben. Das wird allerdings nur in Ausnahmefällen möglich sein. Aus Bemerkung 3.2 wissen wir, dass M nicht mehr asymptotisch exakt sein muss, *eff* also nicht unbedingt mit $d_0 \rightarrow 0$ gegen 1 strebt. Wir werden numerische Experimente durchführen und die Qualität der Majorante M für Modellprobleme systematisch zu studieren.

2 Konstante rechte Seite, homogene Randbedingungen

Um den Einfluss der Gebietsgeometrie auf den Modellfehler zu untersuchen, werden die anderen Daten (f , F_\oplus , F_\ominus) bewusst möglichst einfach gewählt. Wir geben uns auf Γ_\ominus und Γ_\oplus homogene Neumann-Randbedingungen F_\ominus , F_\oplus vor sowie eine konstante rechte Seite $f > 0$:

$$f = 2, \quad F_\oplus = F_\ominus = 0.$$

Da wir im ganzen Abschnitt das gleiche Beispiel verwenden und nur das Gebiet Ω verändern, erlaubt uns dies, den Einfluss der Gebietsgeometrie systematisch zu studieren.

Ein Ergebnis können wir gleich vorziehen: Weil f nicht von y abhängt, gilt $\tilde{f} = f$ und somit ist M_2 in allen Fällen exakt Null:

$$M_2 = 0.$$

Konvergenz: In erster Linie wollen wir das Verhalten von M_1 in Abhängigkeit der Gebietsdicke d_0 untersuchen. Die Konvergenzraten sollen wenn möglich nicht nur experimentell, sondern auch analytisch aus den Termen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ hergeleitet werden.

Notation: In den Beispielen wird u meistens mit $u_{2d}(x, y)$ bezeichnet (Lösung des originalen 2d-Problems) und \hat{u} mit $u_{1d}(x)$ (Lösung des reduzierten 1d-Problems).

Weitere Grafiken zu den Beispielen befinden sich in Abschnitt 4, hauptsächlich Darstellungen von u_{2d} und u_{1d} .

2.1 Rechteckgebiet

Wir beginnen mit dem einfachsten möglichen Fall, dem Rechteckgebiet. Für (P) mit rechter Seite $f = 2$ und homogenen Neumann-Randbedingungen ist auf dem Einheitsquadrat die analytische Lösung bekannt:

$$u_{2d}(x, y) = -x^2 + x.$$

Ebenso gilt für das reduzierte Problem (Q)

$$u_{1d}(x) = -x^2 + x.$$

Da somit die reduzierte 1d-Lösung genau der 2d-Lösung entspricht, ist der exakte Fehler gleich null. Unser Schätzer M liefert das gleiche, korrekte Ergebnis: Da für das Rechteckgebiet $\nabla d(x) = \nabla d_\oplus(x) = \nabla d_\ominus(x) = 0$ gilt, werden die Terme $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ identisch zu null und somit auch M_1 und M_2 :

$$M_1 = M_2 = 0.$$

Das gilt im Übrigen für alle Werte von d_0 .

2.2 Sinusgebiet

Auf dem Sinusgebiet unterscheidet sich die zweidimensionale Lösung wesentlich vom vorherigen Beispiel. Sie ist keineswegs konstant in y -Richtung, sondern zeigt deutliche Abweichungen an den Extremalstellen des Gebietes. Abbildung 2.6 in Abschnitt 4 zeigt die entsprechende Grafik. Die reduzierte Lösung u_{1d} ist davon nicht betroffen. Für alle Gebiete mit konstanter Dicke d_0 entspricht die Lösung exakt der Funktion $u_{1d}(x) = -x^2 + x$, denn in Problem (Q) tritt nur die Gebietsdicke $d(x)$ auf und nicht die konkrete Form von Ω .

In Tabelle 2.1 sind links die globalen Werte für M_1 und den exakten Fehler in der Energienorm aufgelistet. Man beachte, dass sich der Effektivitätsindex eff wie $1 + \mathcal{O}(d_0)$ verhält.

Analytische Untersuchung: Wir wollen das Verhalten des Fehlers bezüglich d_0 auch analytisch untersuchen. Da $\nabla d(x) = 0$ gilt, ist $\alpha(x) = 0$. M_1 vereinfacht sich somit zu

$$M_1^2 = \int_{\hat{\Omega}} \beta^2 \cdot d_0 \, dx \quad \text{mit } \beta = \nabla u_{1d} \cdot 2\pi \cos(2\pi x),$$

also ist zu erwarten, dass sich M_1 wie $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ verhält. Dies entspricht der Aussage in Abschnitt 1 für Gebiete mit konstanter Dicke. Die numerischen Resultate bestätigen diese Erwartung.

Abbildung 2.2 zeigt links eine Grafik der lokalen Fehlerverteilung. Wir sehen, dass der Fehler an den Rändern von $\hat{\Omega}$ relativ gross wird, während er in einem Bereich zwischen 0.2 und 0.8 hinreichend klein bleibt. Der detaillierte Verlauf der Kurve lässt sich leicht begründen, indem man $\nabla u_{1d} = -2x + 1$ und $\nabla d_{\oplus, \ominus}(x) = 2\pi \cos(2\pi x)$ in $\beta(x)$ einsetzt.

Abbildung 2.3 zeigt einen Vergleich der Konvergenzraten von M_1 auf dem Sinus- und dem Keilgebiet. Durch die logarithmische Skala können wir aus der Steigung (bzw. dem Gefälle) der Gerade genau den Exponenten bezüglich d_0 ablesen. Die gepunktete Linie entspricht dem Sinusgebiet. Wir sehen, wie M_1 mit $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ kleiner wird für $d_0 \rightarrow 0$.

2.3 Keilgebiet

Dieses Gebiet liefert häufig interessante Ergebnisse, weil die Dicke nicht konstant ist und somit Terme, die $\nabla d(x)$ enthalten, nicht wegfallen. In unserem Fall ist $d_{\oplus}(x) = -\frac{d_0}{2}x + d_0$, also gilt $\nabla d(x) = -\frac{d_0}{2}$.

Grafiken der zwei- und eindimensionalen Lösungen befinden sich in Abbildung 2.7. Man beachte, dass die reduzierte Lösung u_{1d} aufgrund der variablen Gebietsdicke nun nicht mehr der Funktion $-x^2 + x$ entspricht. Das Maximum von u_{1d} verschiebt sich im Vergleich leicht nach rechts und nach oben. Auch die zweidimensionale Lösung verläuft nicht konstant in y -Richtung, sondern wölbt sich leicht zur Schräge hin.

Die Werte für M_1 und den exakten Fehler sind in der rechten Hälfte von Tabelle 2.1 aufgeführt. Die einzelnen Zahlen fallen wesentlich kleiner aus als beim vorherigen Beispiel. Aber sowohl beim Sinusgebiet als auch beim Keilgebiet verhält sich eff wie $1 + \mathcal{O}(d_0)$. Mit der Majorante M können wir also auch auf Gebieten nicht konstanter Dicke zuverlässig arbeiten. Die lokale Fehlerverteilung ist in Grafik 2.2 rechts abgebildet.

Analytische Untersuchung: Wir stellen fest, dass wegen $d_{\ominus} = \nabla d_{\ominus} = 0$ auch $\beta(x) = 0$ gilt. M_1 verkürzt sich zu

$$\begin{aligned} M_1^2 &= \int_{\hat{\Omega}} \alpha^2 \frac{1}{3} d_{\oplus}^3 \, dx \quad \text{mit } \alpha(x) = \frac{-\nabla u_{1d} \cdot d_0}{2 d_{\oplus}(x)} \\ &= \int_{\hat{\Omega}} (\nabla u_{1d})^2 \frac{d_0^2}{12} d_{\oplus}(x) \, dx. \end{aligned}$$

Somit ist M_1 von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$, also von höherer Ordnung als in den vorherigen Beispielen. Auch in Abbildung 2.3 ist die höhere Konvergenzordnung klar ersichtlich.

Bemerkung: In einer zweiten Versuchsreihe wurde $d_{\oplus}(x) = -\frac{d_0}{10}x + d_0$ gesetzt, somit gilt $\nabla d(x) = -\frac{d_0}{10}$. Am grundsätzlichen Verhalten von M ändert sich allerdings nichts, da nur ein konstanter Faktor verändert wird. M_1 ist immer noch von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$. Es wird an dieser Stelle vermutet, dass für eine wesentliche Änderung des Konvergenzverhaltens $\nabla d(x)$ eine Funktion von x sein sollte. Das wäre beispielsweise dann der Fall, wenn $d_{\oplus}(x)$ eine quadratische Funktion in x ist. Im Rahmen dieser Arbeit kann aber auf diesen Aspekt nicht näher eingegangen werden.

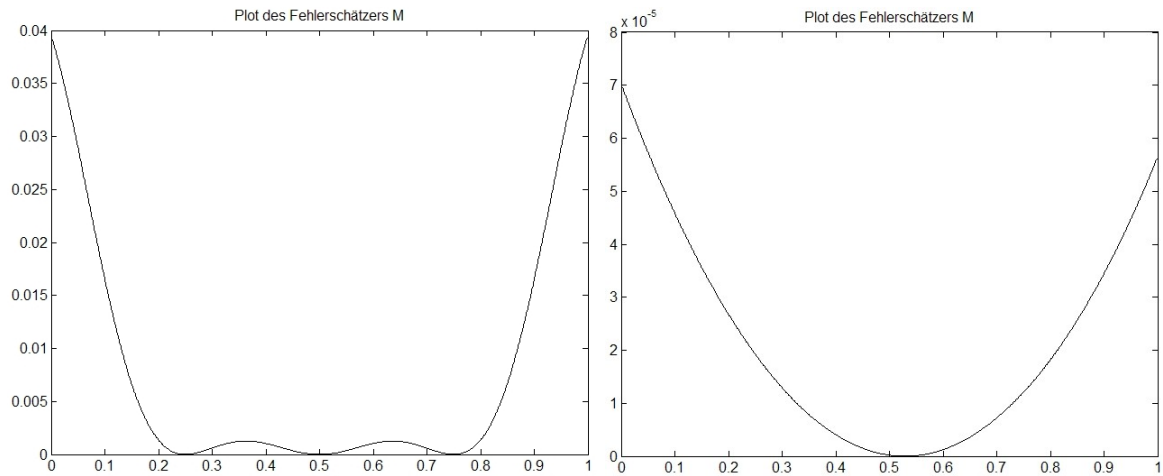


Abbildung 2.2: Lokale Fehlerverteilung für $d_0 = 1$, (links) Sinusgebiet, (rechts) Keilgebiet.

	Sinusgebiet			Keilgebiet		
d_0	M_1	$\ e\ $	$M/\ e\ $	M_1	$\ e\ $	$M/\ e\ $
1	2.7531	1.2821	2.147	0.1449	0.0738	1.965
0.1	0.8706	0.8356	1.042	0.0046	0.0043	1.075
0.01	0.2753	0.2741	1.005	$1.449e-4$	$1.421e-4$	1.020
0.001	0.08706	0.08701	1.001	$4.582e-6$	$4.545e-6$	1.008

Tabelle 2.1: Globale Werte für M und den exakten Fehler in der Energienorm auf dem Sinus- und dem Keilgebiet.

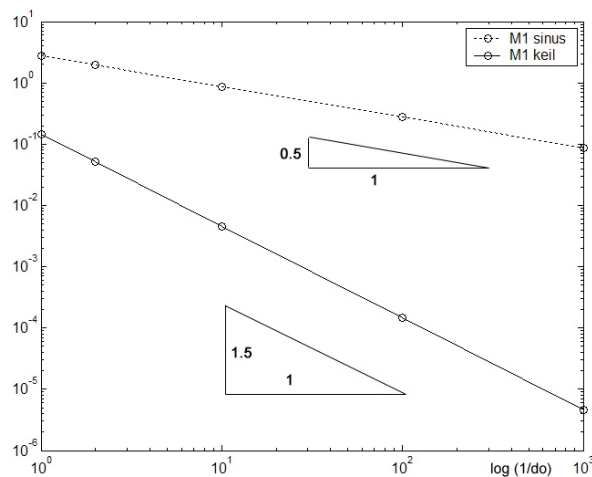


Abbildung 2.3: Konvergenz von M_1 auf dem Sinusgebiet (gepunktete Linie) und dem Keilgebiet (durchgezogene Linie). Beachte die unterschiedlichen Konvergenzraten von $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ auf dem Sinusgebiet und $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$ auf dem Keilgebiet.

2.4 Polygonebiet

Das Polygonebiet setzt sich stückweise zusammen aus zwei Rechteckgebieten am Anfang und am Ende sowie einem Keilgebiet in der Mitte, definiert durch den Winkel α . Untersucht wird das Fehlerverhalten in Abhängigkeit von α . Je kleiner der Winkel, desto steiler das Gefälle und desto grösser $|\nabla d(x)|$. Durch das stückweise Zusammensetzen des Gebietes liegt die Vermutung nahe, dass das lokale Verhalten von M diese Tatsachen wiedergeben kann. Wir werden sehen wie weit sich die Vermutung bestätigt.

Die Grafiken zu u_{1d} und u_{2d} sind in Abbildung 2.8 im Anhang aufgeführt. Da hier – wie beim Keilgebiet – die Gebietsdicke nicht konstant ist, unterscheidet sich die reduzierte Lösung u_{1d} von der Funktion $-x^2 + x$. Ebenso hat u_{2d} eine sehr unregelmässige Form.

α	Dicke	M_1	$ e $	eff
20°	[1,0.5]	0.1130	0.0534	2.117
	[0.5,0.25]	0.0271	0.0132	2.062
	[0.1,0.05]	0.00105	$5.152e-4$	2.039
	[0.05,0.025]	$2.592e-4$	$1.357e-4$	1.910
	[0.01,0.005]	$1.008e-5$	$9.292e-5$	-
10°	[1,0.5]	0.0756	0.0255	2.967
	[0.5,0.25]	0.0185	0.00649	2.854
	[0.1,0.05]	$7.216e-4$	$2.779e-4$	2.596
	[0.05,0.025]	$1.802e-4$	$8.369e-5$	2.153
	[0.01,0.005]	$7.546e-6$	$1.196e-4$	-
5°	[1,0.5]	0.0521	0.0126	4.147
	[0.5,0.25]	0.0129	0.0032	3.998
	[0.1,0.05]	$5.146e-4$	$1.633e-4$	3.150
	[0.05,0.025]	$1.254e-4$	$1.968e-4$	-
	[0.01,0.005]	$4.633e-6$	-	-

Abbildung 2.4 zeigt links die Grafik der lokalen Fehlerverteilung für $\alpha = 20^\circ$. Die Tatsache, dass das Polygonebiet stückweise aus zwei bereits bekannten Gebieten zusammengesetzt ist, hat sich auch auf das lokale Verhalten von M ausgewirkt. Auf den ebenen Gebietsabschnitten ist M exakt null, wie es auch beim Rechteckgebiet der Fall war. Auf dem schrägen Teilgebiet

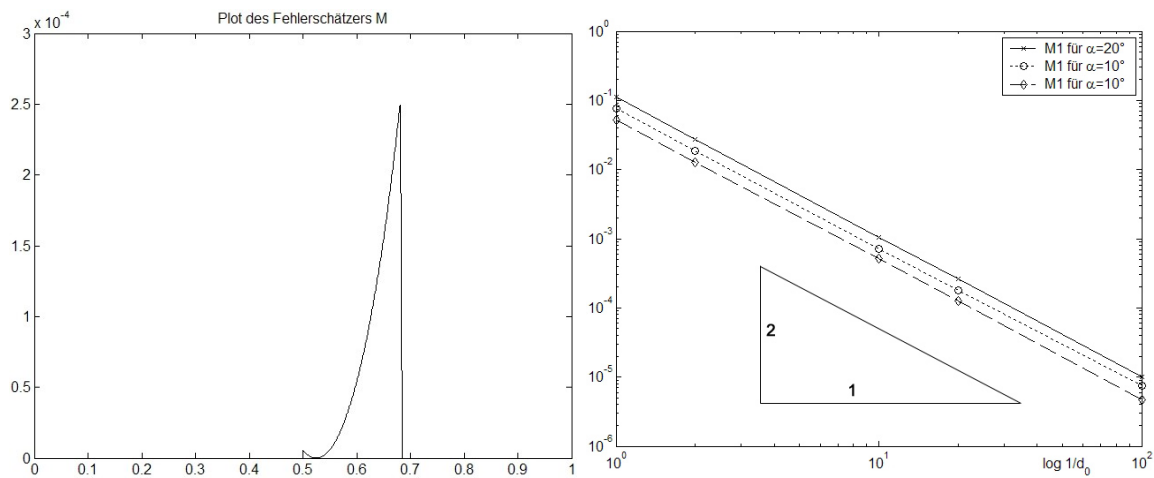


Abbildung 2.4: Polygonebiet: Links der Fehlerschätzer für $d_0 = 1$, $\alpha = 20^\circ$. Rechts ein Vergleich der Konvergenzraten von M_1 für verschiedene Werte von $\alpha = 20^\circ, 10^\circ, 5^\circ$.

ist $M > 0$ und verhält sich genau so wie auf dem Keilgebiet. Die Spitze ist ein Ausschnitt der Kurve, wie sie für ein Keilgebiet mit entsprechendem $|\nabla d(x)|$ entstehen würde. Für kleinere α wird die ausschlagende Spitze immer schmaler und steiler, ebenso für abnehmendes d_0 .

Es ist zu beachten, dass mit kleiner werdendem α die dem Winkel gegenüberliegende Strecke t ebenfalls kleiner wird und somit auch die Anzahl Intervalle, auf denen M einen Wert grösser Null annimmt. Deshalb sollte bei der Berechnung eine hohe Auflösung verwendet werden, für die Zerlegung von $\hat{\Omega}$ ebenso wie für die Triangulierung von Ω , um die einspringende Ecke richtig zu erfassen.

Die Konvergenzrate von M_1 ist mit $\mathcal{O}(d_0^2)$ nochmals eine Ordnung höher als in den vorigen Beispielen. Für den Abschnitt auf dem Keilgebiet würde zwar ein Verhalten der Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$ erwartet, da aber gleichzeitig das entsprechende Teilgebiet immer kleiner wird, nimmt M_1 mit einer stärkeren Rate ab. Abbildung 2.4 zeigt rechts eine logarithmische Grafik von M_1 für verschiedene Winkel α .

Der Grund für die fehlenden Einträge in der Tabelle liegt an der numerischen Berechnung von $\|e\|$ durch Matlab. Auf den ebenen Gebieten wurde $\|e\|$ zwar klein, aber nicht Null, was sich bei dünnen Gebieten (etwa $d_0 < 0.1$) aufsummierte, so dass der Fehler schliesslich grösser als M wurde. Die Berechnung von M ist davon nicht betroffen, weil dazu nur das reduzierte Problem gelöst werden muss. M kann ohne Schwierigkeiten auch für sehr kleine d_0 bestimmt werden.

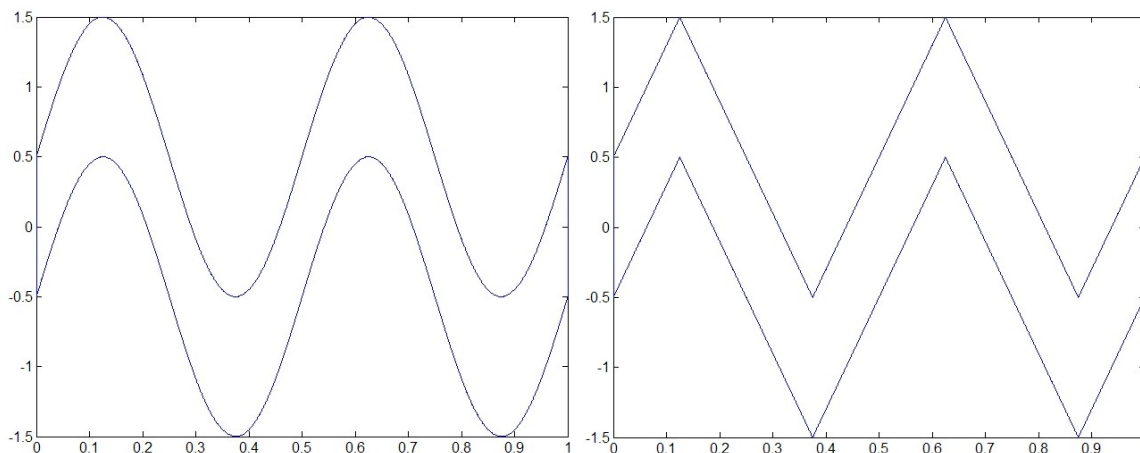
Fazit: M zu berechnen ist problemlos. Es ist die Berechnung der vollen zweidimensionalen Lösung, die aufwändig wird. Mit der Methode der Dimensionsreduktion versucht man gerade das zu vermeiden.

Spezialfall L-Gebiet: Als Extremfall kann $\alpha = 0^\circ$ gewählt werden, dann erhalten wir ein sogenanntes L-Gebiet. Der Fall $\alpha = 0^\circ$ ist jedoch durch die Theorie nicht explizit abgedeckt. Numerische Versuche haben gezeigt, dass sich in diesem Fall die Resultate des Rechteckgebietes wiederholen, also $M_1 = M_2 = 0$. Auch gilt $u_{1d}(x) = -x^2 + x$, obwohl die Gebietsdicke nicht konstant ist.

Die Sprungstelle von d_0 liegt exakt an der Intervallgrenze eines Teilintervalles von $\hat{\Omega}$ und wird daher durch die finiten Elemente nicht abgebildet. Somit entspricht das L-Gebiet zwei Rechteckgebieten mit unterschiedlichen d_0 und zeigt auch die entsprechenden Resultate. Wir werden daher nicht weiter auf diesen Spezialfall eingehen.

2.5 Vergleich Zackengebiet – Sinusgebiet

Hier vergleichen wir zwei Gebiete mit starken Amplituden direkt miteinander: Einerseits eine Variante des Sinusgebietes mit $d_{\oplus,\ominus}(x) = \sin(4\pi x) \pm \frac{d_0}{2}$, andererseits das Zackengebiet. Die Gebietsgeometrien sind unten abgebildet.



Da die Gebiete eine konstante Dicke d_0 haben, resultiert als reduzierte Lösung in beiden Fällen $u_{1d}(x) = -x^2 + x$. Allerdings unterscheiden sich die zweidimensionalen Lösungen u_{2d} , die entsprechenden Abbildungen sind in Abschnitt 4 zu finden.

Der Tabelle 2.2 können wir im direkten Vergleich die globalen Werte für M_1 und $|||e|||$ entnehmen. Dünnere Gebiete als $d_0 = 0.01$ zu vergleichen wurde schwierig. Wie beim Polygonegebiet ist das Berechnen von M kein Problem, das Verhalten der Zahlenwerte ist auch für kleine d_0 stabil. Die Berechnung von $|||e|||$ scheiterte allerdings daran, dass Matlab diese sehr dünnen, aufwändigen Gebiete nicht mehr korrekt triangulieren konnte.

Abbildung 2.5 zeigt die lokale Fehlerverteilung für beide Gebiete. Der Unterschied in den Plots ist auffällig. Im folgenden begründen wir das analytisch:

Analytische Untersuchung: Für beide Gebiete gilt $\alpha(x) = 0$, da $\nabla d(x) = 0$. Betrachten wir zuerst das Sinusgebiet. Es gilt

$$d_{\oplus,\ominus}(x) = \sin(4\pi x) \pm \frac{d_0}{2} \quad \text{also} \quad \nabla d_{\oplus,\ominus} = 4\pi \cdot \cos(4\pi x).$$

Setzen wir d_{\oplus} , d_{\ominus} und $\nabla d_{\oplus,\ominus}$ in $\beta(x)$ ein, erhalten wir

$$\beta(x) = \nabla u_{1d} \cdot 4\pi \cos(4\pi x)$$

und weiter

$$M_1^2 = \int_{\hat{\Omega}} \beta^2 \cdot d_0.$$

	Sinusgebiet			Zackengebiet		
d_0	M_1	$ e $	eff	M_1	$ e $	eff
1	5.227	2.856	1.830	4.619	2.445	1.888
0.1	1.653	1.606	1.029	1.460	1.403	1.041
0.01	0.522	0.5205	1.004	0.462	0.456	1.004
0.001	0.165	-	-	0.146	-	-

Tabelle 2.2: Globale Werte für M_1 und $|||e|||$, Vergleich von Sinusgebiet und Zackengebiet.

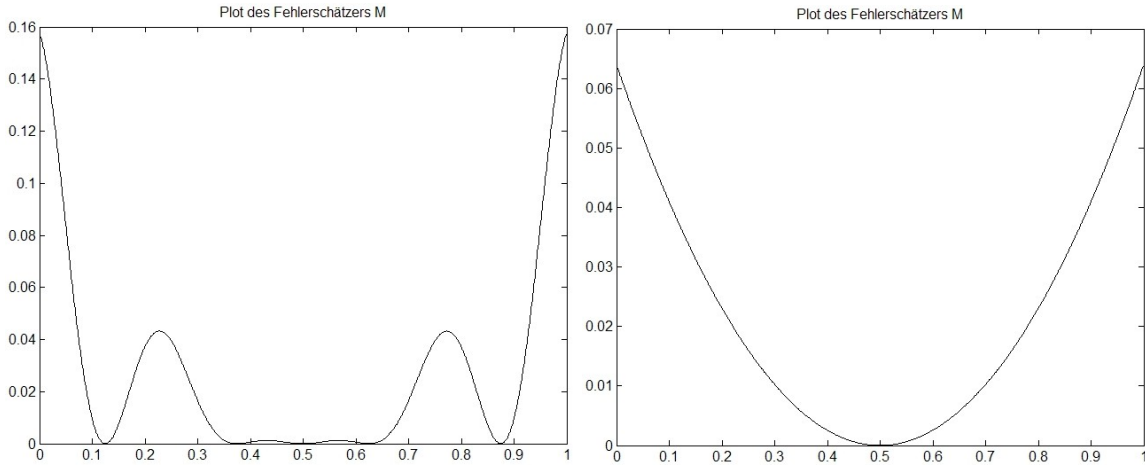


Abbildung 2.5: Fehlerschätzer für $d = 1$: (links) Sinusgebiet, (rechts) Zackengebiet.

Das ergibt die Kurve in Abbildung 2.5 links, die als gestauchte Cosinusfunktion erkennbar ist. Ausserdem ist damit nachgewiesen, dass sich M_1 wie $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ verhält für $d_0 \rightarrow 0$.

Beim Zackengebiet gilt jeweils $\nabla d_{\oplus, \ominus} = \pm 8$. Setzt man dies in $\beta(x)$ ein, erhält man

$$\beta(x) = \pm 8 \cdot \nabla u_{1d}.$$

Somit bildet M_1 den Gradienten $(\nabla u_{1d})^2$ ab, was die Form der Kurve in Abbildung 2.5 rechts erklärt. Für das Zackengebiet gilt ebenfalls $M_1 = \mathcal{O}(d_0^{1/2})$. Der Effektivitätsindex verhält sich für beide Gebiete wie $1 + \mathcal{O}(d_0)$.

3 Zusammenfassung

Vorausgesetzt wurden homogene Neumann-Randbedingungen $F_{\oplus} = F_{\ominus} = 0$. Da die rechte Seite f eine Konstante ist, gilt $M_2 = 0$ und $M = M_1$.

Für die verschiedenen Formen von Ω zeigt sich der Einfluss der Gebietsgeometrie hauptsächlich in den Termen $\nabla d(x)$, ∇d_{\oplus} , ∇d_{\ominus} , des weiteren auch direkt durch die Funktionen $d_{\oplus}(x)$, $d_{\ominus}(x)$. Beim Rechteckgebiet haben wir festgestellt, dass $\nabla d(x)$, ∇d_{\oplus} , ∇d_{\ominus} alle exakt null sind, und zusammen mit homogenen Neumann-Randbedingungen $F_{\oplus} = F_{\ominus} = 0$ ergab sich $M_1 = 0$ für alle d_0 .

Für das Sinusgebiet gilt zwar auch $\nabla d(x) = 0$, aber $\nabla d_{\oplus}(x)$, $\nabla d_{\ominus}(x)$ sind nicht trivial. Mit der konstanten Gebietsdicke d_0 führte dies für M_1 zu einer Konvergenzordnung von $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$. Das gleiche galt für die Gebietsvariante mit $d_{\oplus, \ominus}(x) = \sin(4\pi x) \pm \frac{d_0}{2}$.

Auf dem Keilgebiet, dessen Dicke nicht konstant ist, ergab sich für M_1 eine höhere Konvergenzordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$. Noch höher war der Wert auf dem Polygonegebiet, da sich mit dem Winkel α auch der entsprechende Gebietsabschnitt von $\hat{\Omega}$ verringerte. Daher war dort M_1 von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^2)$.

Der Effektivitätsindex lag in den meisten Fällen in der Nähe von 1, für dünne Polygonegebiete lag er zwischen den Werten 2 und 4.

Wichtig wird nun in den folgenden Kapiteln der Vergleich mit dem Verhalten von M_2 sein.

4 Anhang: Zusätzliche Grafiken

Sinusgebiet

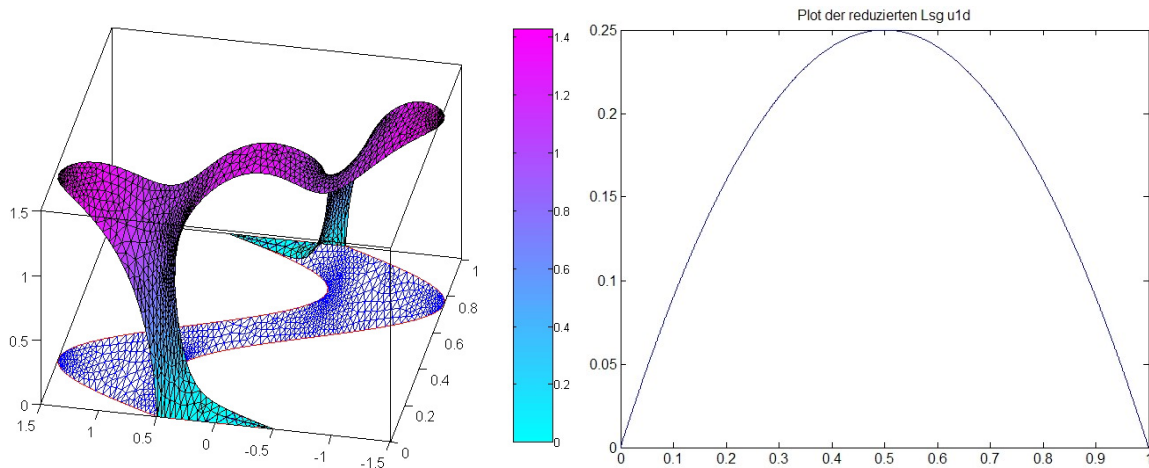


Abbildung 2.6: (Links) zweidimensionale Lösung $u_{2d}(x, y)$. (Rechts) die reduzierte Lösung entspricht genau der Funktion $u_{1d}(x) = -x^2 + x$.

Keilgebiet

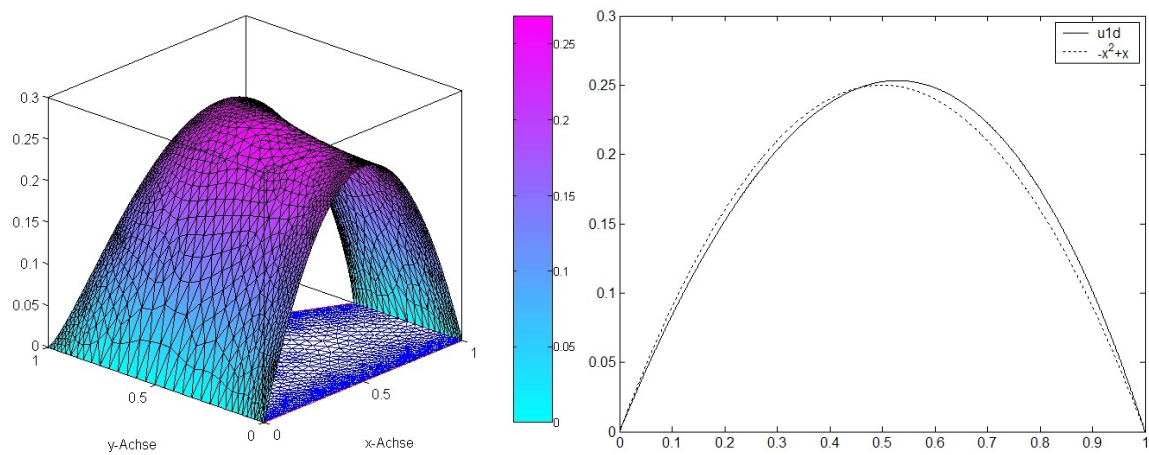


Abbildung 2.7: (Links) zweidimensionale Lösung $u_{2d}(x, y)$. (Rechts) $u_{1d}(x)$ im Vergleich zur Funktion $-x^2 + x$ (gepunktete Linie).

Polygonebiet

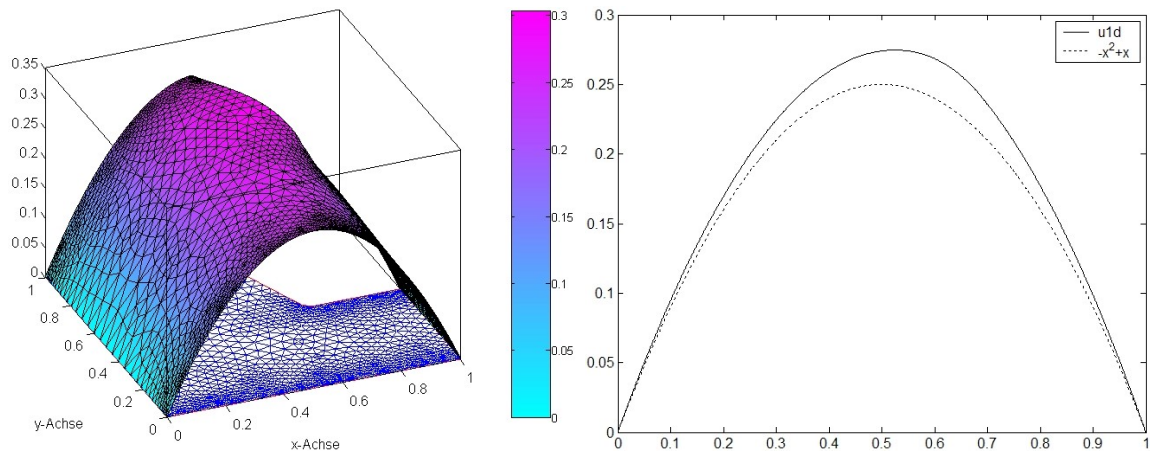


Abbildung 2.8: (Links) zweidimensionale Lösung $u_{2d}(x, y)$. (Rechts) $u_{1d}(x)$ im Vergleich zur Funktion $-x^2 + x$ (gepunktete Linie).

Vergleich Zackengebiet – Sinusgebiet

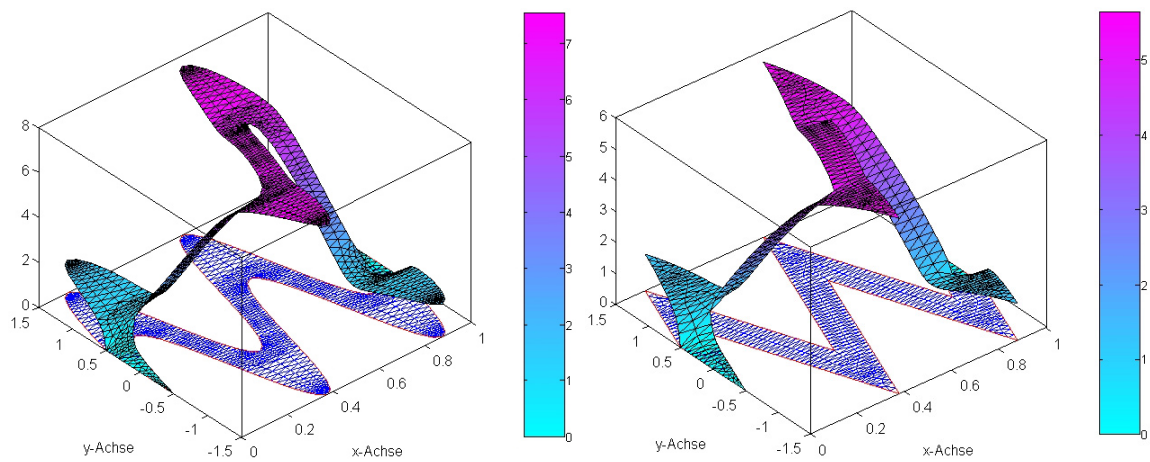


Abbildung 2.9: Darstellung von $u_{2d}(x, y)$ auf dem Sinusgebiet (links), und auf dem Zackengebiet (rechts).

Kapitel 3

Einfluss der rechten Seite f

Nachdem im vorherigen Kapitel der Einfluss der Gebietsgeometrie untersucht wurde, geht es nun um die rechte Seite f . Weiterhin gelten homogene Neumann-Randbedingungen:

$$F_{\oplus} = F_{\ominus} = 0.$$

Wichtig wird insbesondere Abschnitt 2 sein, wenn f von y abhängt und der Term M_2 hinzukommt. Wir werden erste Fälle antreffen, in denen die Funktion ψ_1 nicht mehr ausreicht und der Effektivitätsindex unbeschränkt anwächst. Solche Beispiele sollen dann in Kapitel 5 mit einer verbesserten Abschätzung behandelt werden.

1 Variables f bezüglich x -Koordinate

Gegeben sei f als eine Funktion von x :

$$f(x) = x^2.$$

A priori ist somit wieder $f = \tilde{f}$ und M_2 wird exakt Null:

$$M_2 = 0.$$

Für das Rechteckgebiet kann die analytische Lösung angegeben werden:

$$u_{2d}(x, y) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12}x.$$

Auf allen Gebieten mit konstanter Dicke d_0 gilt für die reduzierte Lösung: $u_{1d}(x) = u_{2d}(x, y)$. Dieses Beispiel unterscheidet sich von Kapitel 2 nur darin, dass f nicht mehr konstant ist, sondern eine explizite Funktion von x . Die lokale Fehlerverteilung passt sich zwar der veränderten Funktion an (Beispiel in Abb. 3.1 rechts), die Konvergenzraten von M mit $d_0 \rightarrow 0$ bleiben jedoch für alle Gebietsgeometrien gleich wie im vorigen Kapitel. Eine entsprechende Wertetabelle befindet sich auf der nächsten Seite. Somit können die Ergebnisse aus Kapitel 2 analog übertragen werden und seien hier in zusammengefasster Form aufgeführt.

Rechteckgebiet: Da $u_{1d} = u_{2d}$ gilt, sind $M_1 = M_2 = 0 \quad \forall d_0$.

Sinusgebiet: $M_1 = \mathcal{O}(d_0^{1/2})$, eff verhält sich wie $1 + \mathcal{O}(d_0)$.

Keilgebiet: $M_1 = \mathcal{O}(d_0^{3/2})$, eff verhält sich wie $1 + \mathcal{O}(d_0)$.

Wir beschränken uns hier auf diese drei Gebietsformen, da sie die wichtigsten Merkmale bezüglich Form und Dicke vertreten.

Diese Konvergenzresultate können für beliebige Funktionen $f \in L_\infty(\Omega)$ erweitert werden. Solange f unabhängig von y ist, resultieren auf den erwähnten Gebieten immer die gleichen Werte. Massgebend für das Verhalten des Modellfehlers bzw. des Schätzers M ist also weniger die Form von f bezüglich x , sondern vielmehr bezüglich y , denn die Dimensionsreduktion geschieht in der vertikalen y -Koordinate. Wesentlich ist dazu der zweite Term der Majorante M , denn M_2 misst den Fehler, der durch die Mittelung von f in y -Richtung entsteht. Solange aber f nur von x abhängt, ist M_2 null.

Von Interesse können auch die jeweiligen lokalen Fehlerverteilungen sowie die Gestalt der ein- und zweidimensionalen Lösungen u_{1d} und u_{2d} sein. In dieser Arbeit untersuchen wir aber in erster Linie das Konvergenzverhalten von M für $d_0 \rightarrow 0$, daher beschränken wir uns auf dieses eine Beispiel einer Funktion $f(x)$.

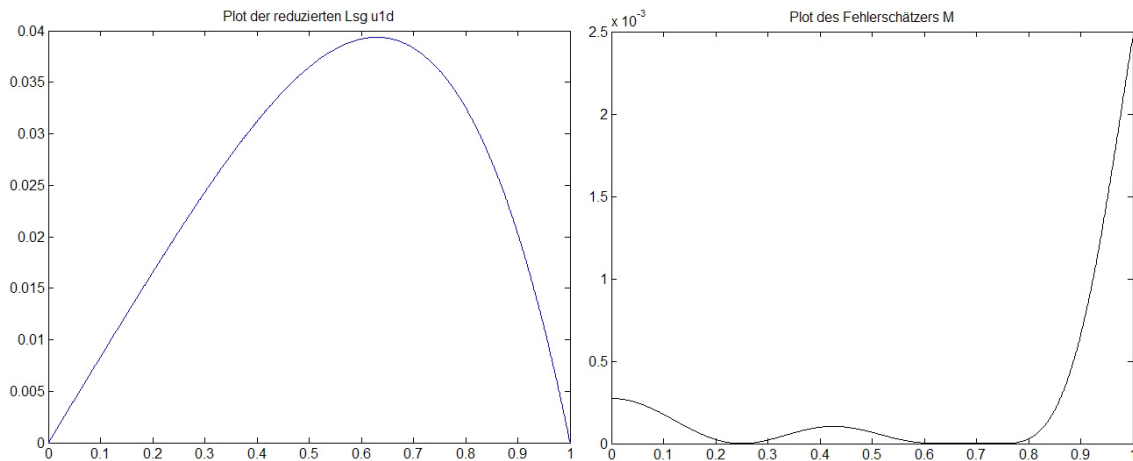


Abbildung 3.1: (Links) Reduzierte Lösung $u_{1d} = -\frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{12} x$. (Rechts) Als Beispiel die lokale Verteilung der Majorante M für das Sinusgebiet.

d_0	Sinusgebiet			Keilgebiet		
	M_1	$\ e\ $	eff	M_1	$\ e\ $	eff
1	0.4781	0.2316	2.065	0.0221	0.0138	1.600
0.1	0.1512	0.1443	1.048	$6.983e-4$	$6.625e-4$	1.054
0.01	0.0478	0.0475	1.007	$2.208e-5$	$2.202e-5$	1.003
0.001	0.01512	0.01508	1.002	$6.984e-7$	$6.984e-7$	1.000

2 Variables f bezüglich y -Koordinate

Nachdem bislang M_1 im Vordergrund stand, interessiert uns jetzt das Beispiel einer Funktion f , die von y abhängt, da hier M_2 sicher nicht Null ist. Gegeben sei f durch

$$f(y) = y^m$$

mit $m = 1, 2, 3, \dots$. Wir untersuchen, wie sich M_2 für verschiedene Werte von m verhält.

2.1 Rechteckgebiet

Wie aus Kapitel 2 bekannt, gilt für das Rechteckgebiet

$$M_1 = 0.$$

Somit bleibt nur der Term $M_2 = \|f - \tilde{f}\|_{L_2(\Omega)}$. Tabelle 3.1 enthält die Resultate für $f = y$, weitere Tabellen mit Werten für $f = y^2$, $f = y^3$ sind im Anhang zu finden.

Als erstes halten wir fest, dass sich die Konvergenzordnung von M_2 mit $d_0 \rightarrow 0$ proportional zum Parameter m verhält. Wie in Abbildung 3.2 rechts grafisch dargestellt, resultieren für verschiedene m folgende Konvergenzraten:

$$\begin{aligned} m = 1 : \quad M_2 &= \mathcal{O}(d_0^{3/2}), \\ m = 2 : \quad M_2 &= \mathcal{O}(d_0^{5/2}), \\ m = 3 : \quad M_2 &= \mathcal{O}(d_0^{7/2}). \end{aligned}$$

Diese Liste lässt sich analog für höhere Werte von m fortsetzen:

$$f = y^m : \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{\frac{2m+1}{2}}).$$

In Kapitel 2 wurde auf Seite 13 erwähnt, dass für glatte Funktionen $f \in C^1(\Omega)$ der Term M_2 von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$ ist. Für den Spezialfall des Rechteckgebietes sehen wir, dass sich das sogar noch verbessern lässt, indem mit wachsendem m auch M_2 von höherer Ordnung ist. Zur lokalen Fehlerverteilung (Abbildung 3.2 links) lässt sich lediglich bemerken, dass M_2 für alle m über ganz $\hat{\Omega}$ konstant bleibt, was aufgrund der regelmässigen Form des Gebietes auch zu erwarten ist.

Das Problem besteht nun darin, dass der exakte Fehler $\|e\|$ von noch höherer Ordnung als M_2 ist. Das heisst, M liefert zwar immer noch eine obere Schranke für den exakten Fehler, überschätzt ihn aber um ein vielfaches, um das zehnfache oder sogar hundertfache. Mit abnehmender Gebietsdicke verstärkt sich dies sogar. Daher wächst der Effektivitätsindex unbeschränkt an und die Abschätzung ist nicht brauchbar, da sie Werte ganz anderer Grössenordnungen liefert als jene des exakten Fehlers.

d_0	M_2	$\ e\ $	eff
1	0.2887	0.0589	4.901
0.1	0.0091	$2.791e-4$	32.709
0.01	$2.887e-4$	$8.966e-7$	$3.220e+2$
0.001	$9.128e-6$	$2.975e-9$	$3.068e+3$

Tabelle 3.1: Globale Werte für M_2 und $\|e\|$ auf dem Rechteckgebiet für $f = y$ ($M_1 = 0$).

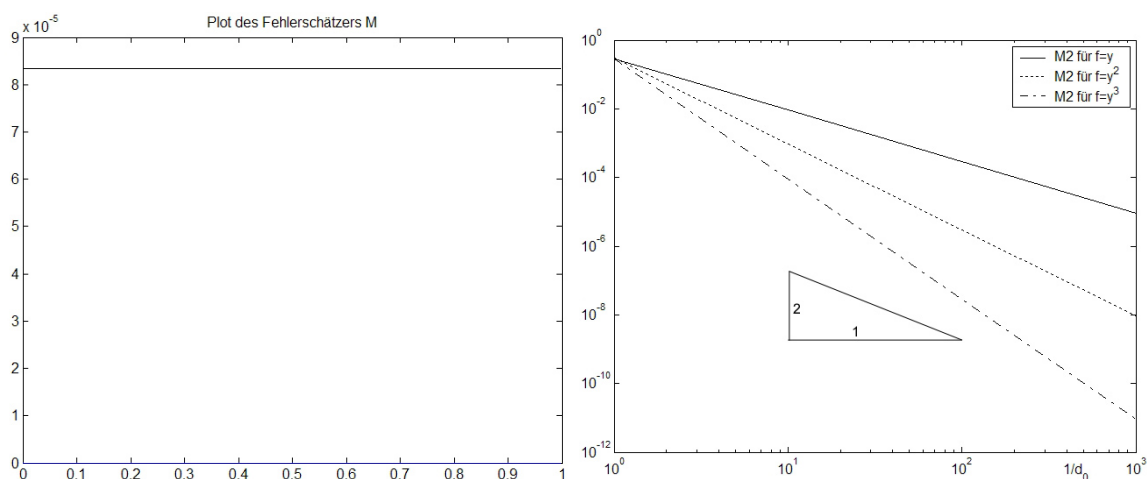


Abbildung 3.2: Lokale Fehlerverteilung für Rechteckgebiet, $f = y$ (links), Vergleich der Konvergenzraten von M_2 für $m = 1, 2, 3$ (rechts).

Die Ursache des Scheiterns liegt in der Wahl der Funktion ψ_1 , die $\frac{\partial u}{\partial y}$ approximieren soll. Zur Veranschaulichung betrachten wir den Fall $m = 1$, also $-\Delta u = f = y$. Da der Operator Δu eine zweite Ableitung nach y enthält, muss die erste Ableitung von u eine quadratische Funktion in y sein. Diese kann aber nicht adäquat durch die lineare Funktion $\psi_1(x, y)$ dargestellt werden. Für $m > 1$ vergrößert sich dieser Fehler zusätzlich.

Die Situation kann korrigiert werden, indem $\psi = \psi_2$ gewählt wird (siehe Bemerkung 3.3 in Kapitel 1). Dieses und andere Beispiele werden in Kapitel 5 behandelt.

2.2 Sinusgebiet

Auf dem Sinusgebiet präsentiert sich die Situation wesentlich anders. Erstmals können wir in diesem Beispiel beide Terme M_1 , M_2 und ihr Verhalten analysieren. Die Zahlenwerte für $f = y$ sind in Tabelle 3.2 enthalten, weitere Tabellen mit $f = y^2, y^3$ befinden sich im Anhang. Im Vergleich zum Rechteckgebiet sind mehrere wesentliche Unterschiede festzustellen:

1. Der Term M_2 ist für alle m von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$. Im Gegensatz zum Rechteckgebiet, wo für höhere Werte von m auch die Ordnung von M_2 anstieg, bleibt sie hier für alle m gleich.
2. M_1 hängt, wie aus Kapitel 2 bekannt, im wesentlichen nur von der Gebietsgeometrie ab und ist für alle m von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$. Das heisst, M_1 dominiert in allen Fällen über M_2 . Eine Konsequenz davon ist Punkt 3.
3. Der Effektivitätsindex verhält sich wie $1 + \mathcal{O}(d_0)$.

d_0	M_1	M_2	M	$\ e\ $	eff
1	0.6124	0.2887	0.9010	0.4724	1.907
0.1	0.1936	0.00913	0.2027	0.1896	1.069
0.01	0.0612	$2.887e-4$	0.0615	0.0611	1.007
0.001	0.0194	$9.129e-6$	0.0194	0.0193	1.001

Tabelle 3.2: Zahlenwerte auf dem Sinusgebiet für $f = y$.

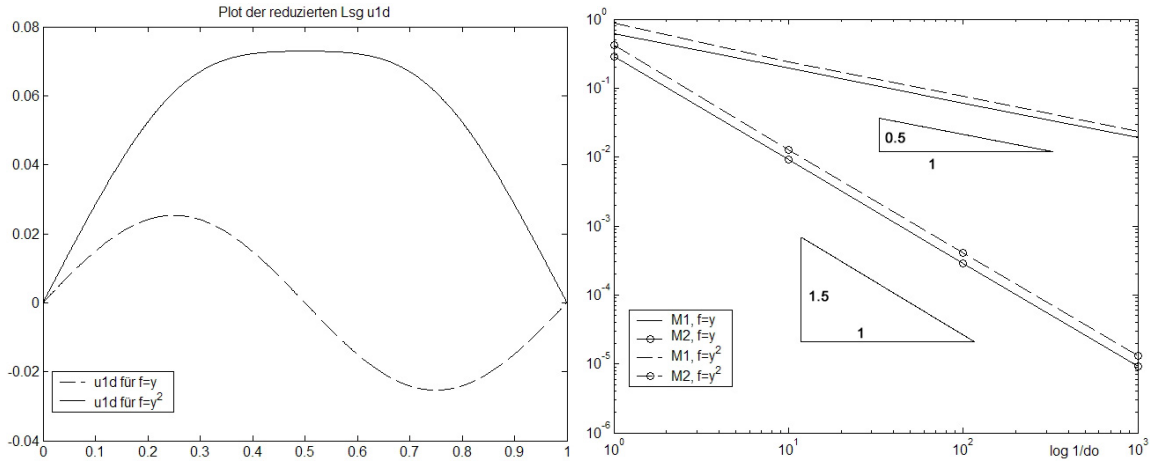


Abbildung 3.3: (Links) Unterschiedliche Formen von u_{1d} für gerades und ungerades m auf dem Sinusgebiet. (Rechts) Konvergenz von M_1 und M_2 mit $d_0 \rightarrow 0$.

Somit reicht auf dem Sinusgebiet die Funktion $\psi_1(x, y)$ wieder aus. Wir erhalten mit unserem Fehlerschätzer $M = M_1 + C_\Omega M_2$ eine zuverlässige Majorante, die zudem sehr effektiv ist. Indem wir lediglich die Gebietsgeometrie veränderten, haben wir ein Beispiel mit deutlich anderen Eigenschaften konstruiert. Massgebend ist dabei der dominierende Einfluss von M_1 . Da sich $\|e\|$ in den meisten Fällen ähnlich verhält wie M_1 , führt eine höhere Ordnung von M_2 dazu, dass der Effektivitätsindex eff gegen 1 konvergiert mit $d_0 \rightarrow 0$.

Abhängig davon, ob m gerade oder ungerade ist, haben die zwei- und eindimensionalen Lösungen u_{2d} und u_{1d} sehr unterschiedliche Gestalt, beachte dazu auch die Abbildungen 3.5 im Anhang dieses Kapitels. Für gerade m bleiben u_{2d} und u_{1d} stets positiv, für ungerades m nehmen sie auch negative Werte an, beispielsweise hat u_{1d} für $m = 1$ die Form einer Sinuskurve. Abbildung 3.3 zeigt links einen Vergleich der verschiedenen u_{1d} . Die lokalen Fehlerverteilungen sind im Anhang zu finden. Die rechte Grafik in 3.3 zeigt in logarithmischer Skala die Konvergenzraten von M_1 und M_2 . Es gilt jeweils: $M_1 = \mathcal{O}(d_0^{1/2})$, $M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2})$.

2.3 Keilgebiet

Die zweidimensionale Lösung u_{2d} und die reduzierte Lösung u_{1d} sind in Abbildung 3.7 abgebildet. Als erstes stellen wir in diesem Beispiel fest, dass der Effektivitätsindex eff wieder unbeschränkt wächst, die Majorante M den exakten Fehler also mit abnehmender Gebietsdicke d_0 massiv überschätzt (siehe Tabelle 3.3, weitere Tabellen für $f = y^2, y^3$ im Anhang dieses Kapitels). Der Grund dafür ist im Verhältnis zwischen M_1 und M_2 zu suchen: Wie beim Rechteckgebiet ist M_2 von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{\frac{2m+1}{2}})$. Der Term M_1 ist zwar für alle m und alle d_0 grösser als Null, bleibt aber immer eine oder mehrere Größenordnungen unter den Werten von M_2 . Ausserdem ist M_1 für alle m von höherer Ordnung als M_2 :

$$\begin{aligned} m = 1 : \quad & M_1 = \mathcal{O}(d_0^{5/2}), \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2}) \\ m = 2 : \quad & M_1 = \mathcal{O}(d_0^{7/2}), \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{5/2}) \\ m = 3 : \quad & M_1 = \mathcal{O}(d_0^{9/2}), \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{7/2}). \end{aligned}$$

Somit ist in allen Fällen der M_2 -Term dominierend, was zu einem unbeschränkten Wachstum von eff führt. Analog zum Rechteckgebiet kann die Abschätzung durch das Verwenden von ψ_2

verbessert werden (siehe Kapitel 5).

d_0	M_1	M_2	M	$\ e\ $	eff
1	0.0276	0.1976	0.2253	0.0368	6.117
0.1	$8.749e-5$	0.00625	0.00634	$1.492e-4$	42.469
0.01	$2.766e-7$	$1.976e-4$	$1.979e-4$	$4.559e-7$	$4.341e+2$
0.001	$8.749e-10$	$6.250e-6$	$6.251e-6$	$1.622e-9$	$3.854e+3$

Tabelle 3.3: Zahlenwerte für $f = y$ auf dem Keilgebiet.

3 Zusammenfassung

Hier gilt immer noch $F_{\oplus} = F_{\ominus} = 0$. Solange die rechte Seite f unabhängig von y ist, gilt $M_2 = 0$ und wir erhalten die gleichen Konvergenzresultate wie im vorigen Kapitel: Auf dem Rechteckgebiet gilt $M_1 = M_2 = 0$ für alle d_0 , auf dem Sinusgebiet ist M_1 von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ und auf dem Keilgebiet von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$. Für eff gilt: $eff = 1 + \mathcal{O}(d_0)$. Massgebend ist also weniger die Form von f bezüglich x , sondern bezüglich y , denn wir reduzieren die Dimension in Richtung der y -Koordinate.

Hängt f von y ab, so kommt der Term $M_2 = \|f - \tilde{f}\|_{L_2(\Omega)}$ hinzu. Wir haben festgestellt, dass das Verhältnis zwischen M_1 und M_2 entscheidend dafür ist, ob die ganze Abschätzung brauchbare Resultate liefert. Solange M_1 über M_2 dominiert, verhält sich der Effektivitätsindex wie $1 + \mathcal{O}(d_0)$ mit $d_0 \rightarrow 0$. Dominiert jedoch M_2 explodiert der Effektivitätsindex geradezu.

Die untersuchten Gebiete haben dazu sehr unterschiedliche Ergebnisse geliefert: Während auf dem Rechteck- und dem Keilgebiet jeweils M_2 dominierte und die Funktion ψ_1 sich als unzureichend erwies, war beim Sinusgebiet der Einfluss der Gebietsgeometrie auf M_1 stärker als der Einfluss von f auf M_2 . Somit konvergierte eff wieder gegen 1 mit $d_0 \rightarrow 0$. Da für glatte $f \in C^1(\Omega)$ M_2 mindestens von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$ oder höher ist, können wir für das Sinusgebiet davon ausgehen, dass ψ_1 immer ausreichen wird.

4 Anhang: Grafiken und Tabellen

Rechteckgebiet

Wertetabelle für $f = y^2, y^3$ ($M_1 = 0$):

d_0	M_2	$ e $	eff	M_2	$ e $	eff
	$f = y^2$			$f = y^3$		
1	0.2981	0.0597	4.997	0.2828	0.0546	5.184
0.1	$9.428e-4$	$2.813e-5$	33.513	$8.844e-5$	$2.549e-6$	35.092
0.01	$2.981e-6$	$9.368e-9$	$3.183e+2$	$2.828e-8$	$8.965e-11$	$3.155e+2$
0.001	$9.428e-9$	$8.443e-12$	$1.117e+3$	$8.944e-12$	$7.350e-14$	$7.350e+3$

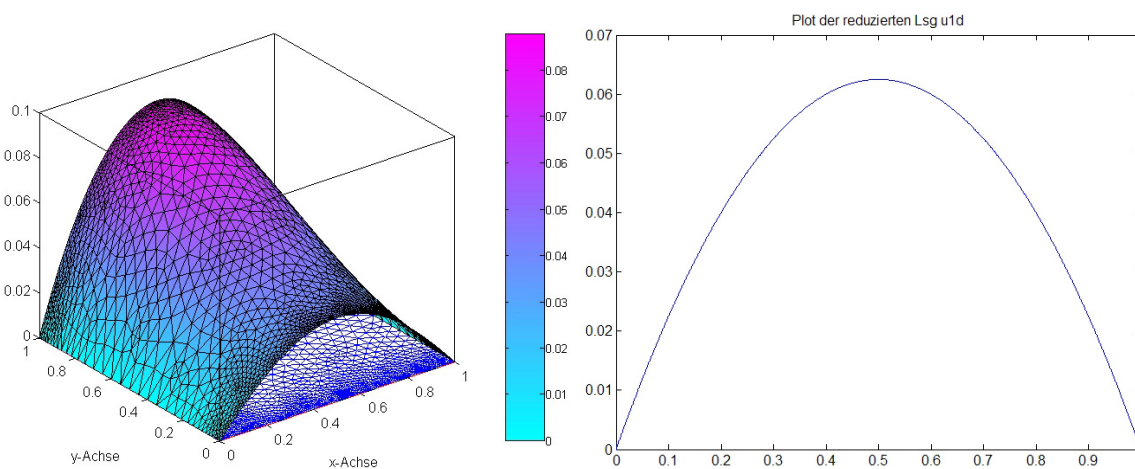


Abbildung 3.4: $f = y$ auf dem Rechteckgebiet: (links) zweidimensionale Lösung $u_{2d}(x, y)$, (rechts) reduzierte Lösung $u_{1d}(x)$.

Sinusgebiet

Wertetabelle für das Sinusgebiet mit $f = y^2, y^3$:

d_0	M_1	M_2	M	$ e $	$M/ e $
1	0.8669	0.4150	1.2819	0.5125	2.501
0.1	0.2386	0.0129	0.2515	0.2303	1.092
0.01	0.0753	$4.082e-4$	0.0757	0.0750	1.010
0.001	0.0238	$1.291e-5$	0.0238	0.0238	1.001
$f = y^3$					
1	0.5966	0.5879	1.1845	0.5311	2.230
0.1	0.1408	0.0168	0.1576	0.1383	1.140
0.01	0.0444	$5.303e-4$	0.0450	0.0442	1.015
0.001	0.0140	$1.677e-5$	0.0141	0.0140	1.003

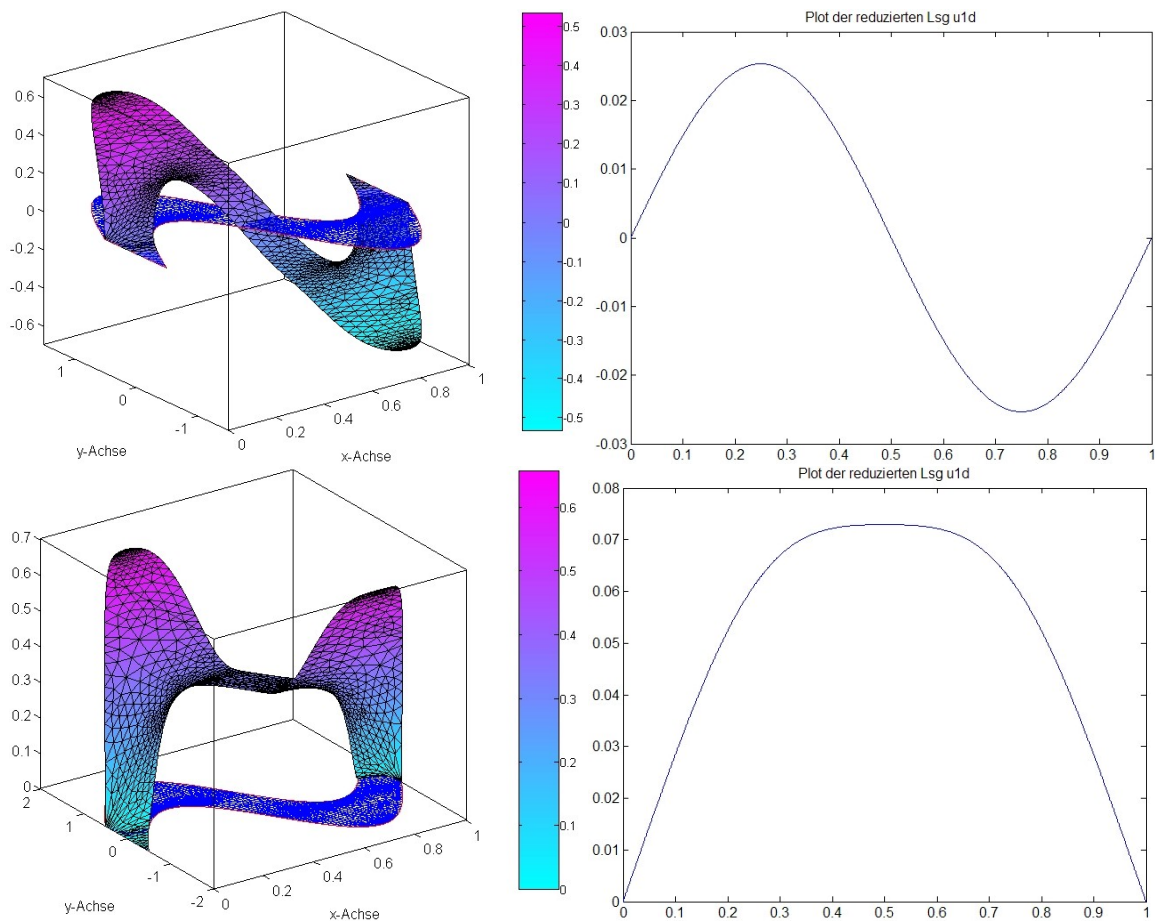


Abbildung 3.5: Verschiedene Formen von u_{2d} und u_{1d} auf dem Sinusgebiet für $m = 1, 2$. Oben das Beispiel $f = y$, unten $f = y^2$.

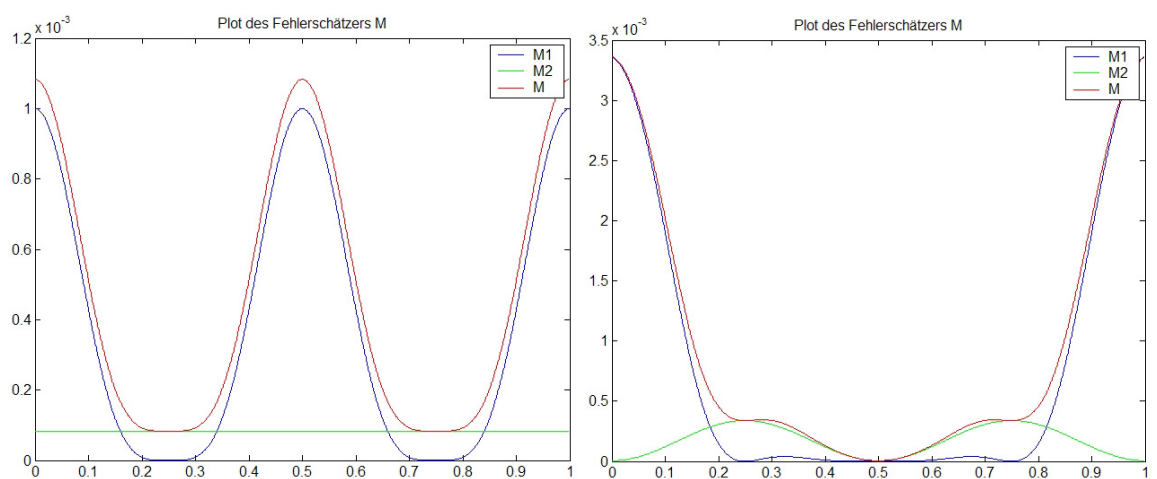


Abbildung 3.6: Lokale Fehlerverteilung auf dem Sinusgebiet, links $f = y$, rechts $f = y^2$. Beachte auch die unterschiedliche Gestalt von M_2 für die verschiedenen Werte von m .

Keilgebiet

d_0	M_1	M_2	M	$ e $	$M/ e $
$f = y^2$					
1	0.01447	0.1707	0.1852	0.0276	6.707
0.1	$4.577e-6$	$5.399e-4$	$5.445e-4$	$1.226e-5$	44.412
0.01	$1.447e-9$	$1.707e-6$	$1.709e-6$	$6.309e-9$	$2.710e+2$
0.001	$4.577e-13$	$5.399e-9$	$5.400e-9$	$4.353e-12$	$1.241e+3$
$f = y^3$					
1	0.0087	0.1411	0.1498	0.0202	7.409
0.1	$2,761e-7$	$4.462e-5$	$4.489e-5$	$9.713e-7$	46.222
0.01	$8.732e-12$	$1.411e-8$	$1.412e-8$	$6.015e-11$	$2.347e+2$

Wertetabelle für das Keilgebiet: Die letzte Zeile für $d_0 = 0.001$ wurde nicht mehr aufgeführt, da bei so kleinen Zahlenwerten die Rechengenauigkeit Fehler verursachen kann.

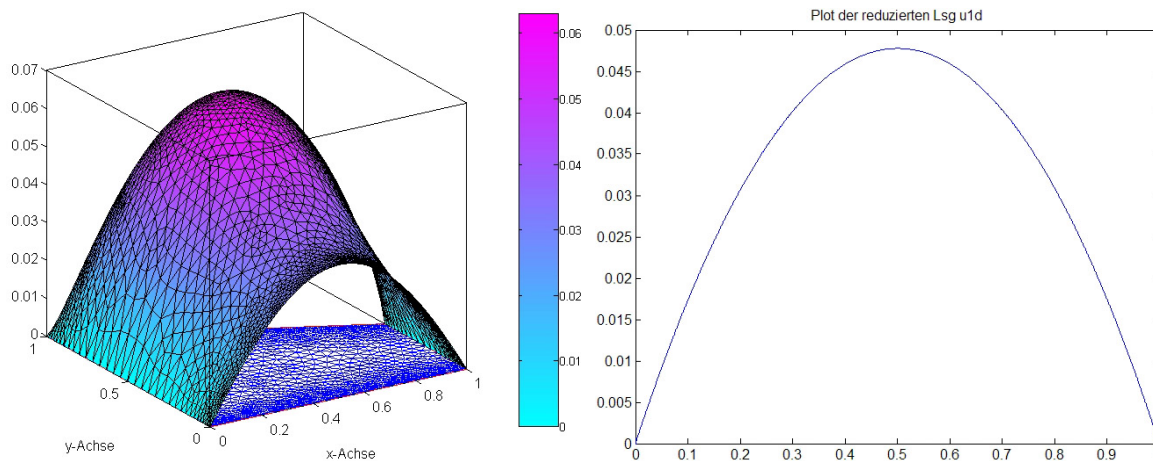


Abbildung 3.7: (Links) Zweidimensionale Lösung u_{2d} . (Rechts) reduzierte Lösung u_{1d} .

Kapitel 4

Inhomogene Neumann-Randbedingungen

Nach dem Einfluss der Gebietsgeometrie und der rechten Seite f untersuchen wir nun die Auswirkungen von inhomogenen Randbedingungen. Die Wahl der Randbedingungen F_{\oplus} , F_{\ominus} hat einen erheblichen Einfluss auf die Gestalt der ein- und zweidimensionalen Lösungen, besonders auf dünnen Gebieten. Idealerweise würde gelten

$$F_{\oplus} = -F_{\ominus}, \quad (*)$$

dann wären die Randbedingungen kompatibel mit dem Verlauf der Normalenvektoren n_{\oplus} , n_{\ominus} und die Voraussetzung, dass u_{2d} konstant in y -Richtung ist, wäre plausibel. Allerdings kann diese Bedingung in Experimenten auch bewusst verletzt werden, um die Auswirkungen zu beobachten.

1 Konstante rechte Seite

1.1 Konstante Neumann-Randbedingungen

Wir beginnen wieder mit einem möglichst einfachen Beispiel, um den Einfluss der Randbedingungen isoliert von anderen Faktoren betrachten zu können. Gegeben sei das Rechteckgebiet und als rechte Seite eine Konstante $f = 2$. Im einfachsten Fall seien die Neumann-Randbedingungen F_{\oplus} , F_{\ominus} ebenfalls Konstanten, einmal Bedingung (*) erfüllend und einmal verletzend:

$$F_{\oplus} = 1, F_{\ominus} = -1 \quad \text{bzw.} \quad F_{\oplus} = F_{\ominus} = 1.$$

Da f nicht von y abhängt, gilt $M_2 = 0$. Tabelle 4.1 zeigt die erhaltenen Resultate. Weil wir schon aus Kapitel 2 wissen, dass für das Rechteckgebiet M_1 a priori gleich null ist, muss der Unterschied aus den Funktionen F_{\oplus} , F_{\ominus} stammen. Die Werte lassen darauf schliessen, dass sich M_1 wie $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ verhält.

d_0	$F_{\oplus} = 1, F_{\ominus} = -1$			$F_{\oplus} = F_{\ominus} = 1$		
	M_1	$ e $	eff	M_1	$ e $	eff
1	1.000	0.7070	1.414	0.5774	0.5057	1.142
0.1	0.316	0.3075	1.028	0.1826	0.1802	1.013
0.01	0.100	0.099	1.003	0.0577	0.0572	1.010
0.001	0.0316	0.0316	1.000	0.0183	0.0181	1.008

Tabelle 4.1: Globale Werte von M_1 und $|||e|||$ im Vergleich für konstante Randbedingungen.

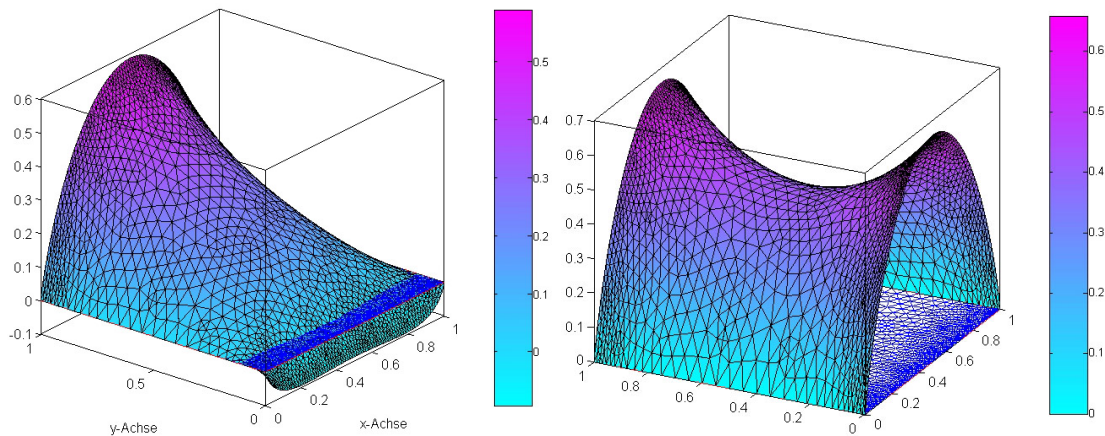


Abbildung 4.1: $u_{2d}(x, y)$ für $F_{\oplus} = 1$, $F_{\ominus} = -1$ (links), $F_{\oplus} = F_{\ominus} = 1$ (rechts).

Analytische Untersuchung: Im ersten Fall mit $F_{\oplus} = 1$, $F_{\ominus} = -1$ erhält man durch Analyse der Terme $\alpha(x)$ und $\beta(x)$:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= 0, \\ \beta(x) &= \frac{1}{d_0}(d_0 \cdot 1) = 1, \\ M_1^2 &= \int_{\hat{\Omega}} \beta^2 \cdot d_0 \, dx.\end{aligned}$$

Also ist M_1 von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$, wie es auch die numerischen Resultate bestätigen. Im zweiten Fall mit $F_{\oplus} = F_{\ominus} = 1$ erhält man

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \frac{1}{d_0}(1 + 1) = \frac{2}{d_0}, \\ \beta(x) &= \frac{1}{d_0}(d_0 \cdot -1) = -1, \\ M_1^2 &= \int_{\hat{\Omega}} \alpha^2 \frac{1}{3} d_0^3 + \alpha\beta d_0^2 + \beta^2 d_0 \, dx = \int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{3} d_0 \, dx,\end{aligned}$$

also ist M_1 ebenfalls von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$. Beachte, dass M_1 in beiden Fällen über ganz $\hat{\Omega}$ konstant ist (lokale Fehlerverteilung).

Abbildung 4.1 zeigt die beiden zweidimensionalen Lösungen $u_{2d}(x, y)$ im Vergleich. Der Unterschied zu Kapitel 2, wo homogene Neumann-Randbedingungen vorlagen, ist offensichtlich. Der zweite Fall, der Bedingung (*) verletzt, besitzt eine interessante Eigenschaft: Mit abnehmendem d_0 wachsen u_{2d} und u_{1d} . In Abb. 4.1 rechts liegt das Maximum der Funktion für $d_0 = 1$ etwa bei einem Wert von 0.7. Für $d_0 = 0.1$ liegt es bei 2.7 und für 0.01 schon bei 25, verhält sich also ungefähr wie $1/d_0$. Im ersten Fall, der (*) erfüllt, ist kein solches Verhalten festzustellen. Besonders deutlich werden wir diesen Unterschied noch beim Sinusgebiet sehen.

Trotzdem wird in beiden Fällen M_1 mit $d_0 \rightarrow 0$ kleiner, *eff* verhält sich im ersten Fall wie $1 + \mathcal{O}(d_0)$ und stabilisiert sich im zweiten Fall etwa bei 1.01.

1.2 Variable Neumann-Randbedingungen

Wie die rechte Seite f können auch F_{\oplus}, F_{\ominus} Funktionen von y sein, wobei y jeweils durch d_{\oplus}, d_{\ominus} ersetzt wird (zur Erinnerung: die ausführliche Notation lautet $F_{\oplus}(x, d_{\oplus}(x)), F_{\ominus}(x, d_{\ominus}(x))$). Auf dem Rechteckgebiet testen wir für das gleiche $f = 2$ wie vorhin nun die Randbedingungen

$$F_{\oplus} = d_{\oplus}(x), F_{\ominus} = -d_{\ominus}(x) \quad \text{bzw.} \quad F_{\oplus} = d_{\oplus}^2(x), F_{\ominus} = -d_{\ominus}^2(x),$$

so dass (*) in beiden Fällen erfüllt sein soll. Die Werte sind Tabelle 4.2 zu entnehmen. (Die fehlenden Einträge sind auf numerische Ungenauigkeiten bei der Berechnung von u_{2d} zurückzuführen, so dass $eff < 1$ wurde. Die Berechnung von M_1 ist diesbezüglich viel robuster.)

Wir stellen fest, dass die Konvergenzgeschwindigkeit von M_1 abhängig ist von der Ordnung der Randbedingungen bezüglich d_{\oplus}, d_{\ominus} . Im ersten Fall verhält sich M_1 wie $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$, im zweiten Fall wie $\mathcal{O}(d_0^{5/2})$. Allgemeiner ausgedrückt:

$$F_{\oplus, \ominus} = \mathcal{O}(d_{\oplus, \ominus}^m) \quad \text{so folgt} \quad M_1 = \mathcal{O}(d_0^{\frac{2m+1}{2}}).$$

Der Effektivitätsindex eff konvergiert in beiden Fällen gegen 1.

Bemerkung 1.1 Wird Bedingung (*) verletzt, indem beispielsweise $F_{\oplus, \ominus} = d_{\oplus, \ominus}(x)$ gewählt wird, stellt man keinen Unterschied fest. Das ist hier aber Zufall, da $d_{\ominus}(x) = 0$ gilt und das Vorzeichen somit keine Rolle spielt. Im allgemeinen ist Bedingung (*) durchaus von Bedeutung.

d_0	$F_{\oplus} = d_{\oplus}(x), F_{\ominus} = -d_{\ominus}(x)$			$F_{\oplus} = d_{\oplus}^2(x), F_{\ominus} = -d_{\ominus}^2(x)$		
	M_1	$ e $	eff	M_1	$ e $	eff
1	0.5773	0.4346	1.328	0.5773	0.4346	1.328
0.1	0.01826	0.0178	1.025	0.00183	0.00178	1.028
0.01	$5.773e-4$	$5.742e-4$	1.005	$5.773e-6$	$6.189e-6$	-
0.001	$1.825e-5$	$1.812e-5$	1.007	$1.826e-8$	-	-

Tabelle 4.2: Globale Werte für M_1 und $|||e|||$ mit variablen Randbedingungen.

1.3 Sinusgebiet

Die Versuche mit konstanten Randbedingungen werden nun auf dem Sinusgebiet wiederholt. Es gilt zu beachten, dass durch den Einfluss der Gebietsgeometrie M_1 a priori von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ ist. Wir untersuchen, ob sich dieses Verhalten durch inhomogene Neumann-Randbedingungen verändert.

Wir testen die Funktionen

$$F_{\oplus} = 1, F_{\ominus} = -1 \quad \text{bzw.} \quad F_{\oplus} = F_{\ominus} = 1.$$

Tabelle 4.3 zeigt wieder die detaillierten Werte. Besonders deutlich sehen wir nun die Auswirkungen, wenn Bedingung (*) verletzt wird: Während sich im ersten Beispiel M_1 wie $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ verhält, werden im zweiten Beispiel die Lösungen u_{2d} und u_{1d} immer grösser, was sich diesmal auch auf M_1 auswirkt.

$$M_1 = \mathcal{O}(d_0^{1/2}) \quad \text{bzw.} \quad M_1 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{d_0}\right).$$

Erfreulicherweise verhält sich eff aber in beiden Fällen etwa wie $1 + \mathcal{O}(d_0)$, unser Fehlerschätzer M behandelt also auch solche Beispiele korrekt.

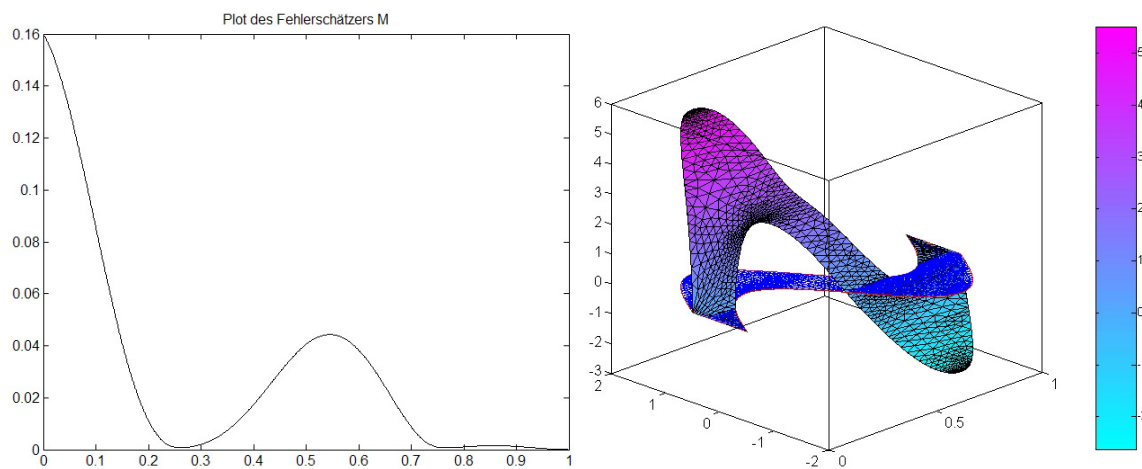


Abbildung 4.2: Sinusgebiet, M und u_{2d} für $F_{\oplus} = 1$, $F_{\ominus} = -1$

d_0	$F_{\oplus} = 1, F_{\ominus} = -1$			$F_{\oplus} = F_{\ominus} = 1$		
	M_1	$ e $	eff	M_1	$ e $	eff
1	5.3208	3.6641	1.452	14.0481	6.5270	2.152
0.1	1.6826	1.6452	1.023	35.8419	34.2822	1.045
0.01	0.5321	0.5308	1.002	1.108e+2	1.103e+2	1.005
0.001	0.1682	0.1682	1.000	3.497e+2	3.495e+2	1.001

Tabelle 4.3: Globale Werte für M_1 und $|||e|||$ auf dem Sinusgebiet.

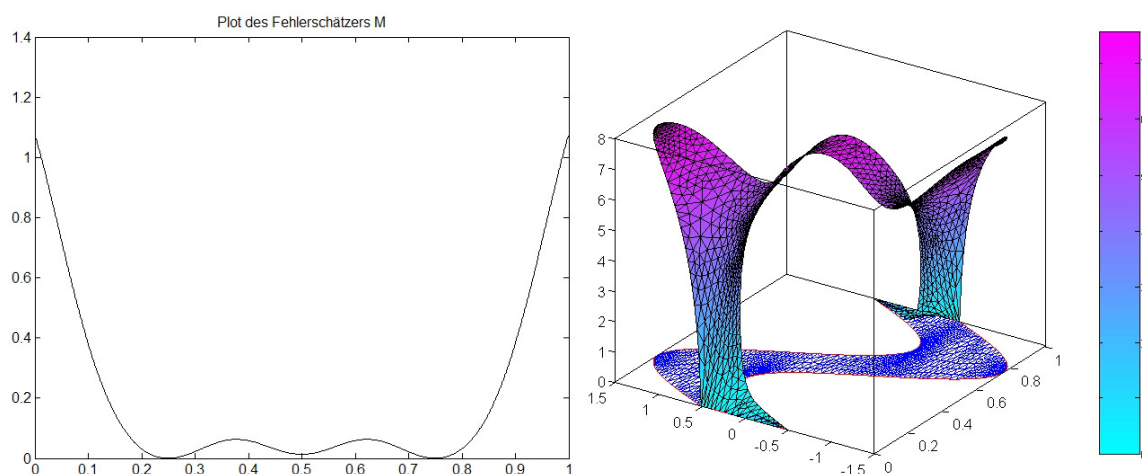


Abbildung 4.3: Sinusgebiet, M und u_{2d} für $F_{\oplus} = F_{\ominus} = 1$

Analytische Untersuchung: Zur Abkürzung definieren wir:

$$\begin{aligned}\nabla d_{\oplus,\ominus} &:= 2\pi \cos(2\pi x) \\ w &:= \sqrt{1 + |\nabla d_{\oplus,\ominus}|^2}\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Funktionen in die Ausdrücke $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ erhält man im ersten Fall:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \frac{1}{d_0}(w - w) = 0 \\ \beta(x) &= \frac{1}{d_0} [d_{\oplus}(w + \nabla u_{1d} \cdot \nabla d_{\oplus,\ominus}) - d_{\ominus}(w + \nabla u_{1d} \cdot \nabla d_{\oplus,\ominus})] \\ &= w + \nabla u_{1d} \cdot \nabla d_{\oplus,\ominus} \\ M_1^2 &= \int_{\hat{\Omega}} \beta^2 \cdot d_0 \, dx.\end{aligned}$$

Da $\beta(x)$ unabhängig von d_0 ist, ist somit M_1 von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$.

Im zweiten Fall, $F_{\oplus} = F_{\ominus} = 1$, lässt sich nachweisen, dass Faktoren $\frac{1}{d_0}$ auftreten und damit M_1 von Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{d_0})$ ist. Auf einen ausführlichen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet.

Die Abbildungen 4.2 und 4.3 verdeutlichen den Unterschied der jeweiligen $u_{2d}(x, y)$ und der lokalen Fehlerverteilung. Weiter von Interesse ist die Tatsache, dass für $F_{\oplus} = 1$, $F_{\ominus} = -1$ die reduzierte Lösung u_{1d} jeweils exakt der Funktion $u_{1d}(x) = -x^2 + x$ entspricht, da sich auf der rechten Seite des Problems (Q) F_{\oplus} und F_{\ominus} aufheben. Das war auch beim Rechteckgebiet der Fall. Diese Aussage gilt jedoch nur für konstante Neumann-Randbedingungen, die (*) erfüllen, variable Randbedingungen haben in der Regel nicht diesen Effekt.

Bemerkung 1.2 Variable Randbedingungen auf dem Sinusgebiet zeigen sehr ähnliche Resultate wie konstante. Erwähnt sei hier kurz das Beispiel $F_{\oplus} = d_{\oplus}$, $F_{\ominus} = \pm d_{\ominus}$. Im ersten Fall ist mit $F_{\ominus} = -d_{\ominus}$ Bedingung (*) erfüllt; M_1 verhält sich auch hier wie $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$, da der Einfluss der Geometrie stärker ist als der Einfluss der Randbedingungen. Im zweiten Fall ist (*) verletzt und wir stellen wieder fest, dass die ein- und zweidimensionalen Lösungen mit $d_0 \rightarrow 0$ immer grösser werden und M_1 von Ordnung $\mathcal{O}(1/d_0)$ ist. In beiden Fällen verhält sich aber eff wie $1 + \mathcal{O}(d_0)$.

2 Variable rechte Seite

Wir beginnen wieder mit dem Rechteckgebiet. Als rechte Seite wählen wir die gleiche Funktion f wie in Kapitel 3:

$$f(y) = y^m$$

mit verschiedenen Werten von m . Zur Erinnerung: Mit homogenen Randbedingungen ($F_{\oplus} = F_{\ominus} = 0$) galt auf dem Rechteckgebiet $M_1 = 0$, $M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2})$, was zu einem unbeschränkten Wachstum von eff führte.

2.1 Konstante Randbedingungen

Zu Beginn testen wir Randbedingungen, die Bedingung (*) erfüllen:

$$F_{\oplus} = 1, F_{\ominus} = -1.$$

Für $m = 1$ und $m = 2$ sind die Werte in Tabelle 4.4 aufgeführt. Als wichtigste Ergebnisse sind festzuhalten:

d_0	M_1	M_2	M	$ e $	eff
$f = y$					
1	1.000	0.2887	1.2887	0.7574	1.701
0.1	0.3162	0.0091	0.3253	0.3077	1.057
0.01	0.100	$2.887e-4$	0.1003	0.0997	1.006
0.001	0.0316	$9.129e-6$	0.0316	0.0316	1.001
$f = y^2$					
1	1.000	0.2981	1.2981	0.7574	1.714
0.1	0.3162	$9.428e-4$	0.3172	0.3075	1.031
0.01	0.100	$2.981e-6$	0.100	0.0997	1.003
0.001	0.0316	$9.428e-9$	0.0316	0.0316	1.001

Tabelle 4.4: Wertetabelle für $f = y^m$ und Randbedingungen $F_{\oplus} = 1, F_{\ominus} = -1$.

- Die Werte für M_1 entsprechen genau den Werten aus Tabelle 4.1 (links), und zwar unabhängig von f . M_1 ist von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$.
- Die Werte für M_2 entsprechen genau den Werten aus Kapitel 3 für das Rechteckgebiet (Tabelle 3.1 und Anhang), M_2 ist von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$ bzw. $\mathcal{O}(d_0^{5/2})$, unabhängig von den gegebenen Randbedingungen.
- Da M_2 von höherer Ordnung als M_1 ist, konvergiert der Effektivitätsindex gegen 1 in einem Verhältnis von $1 + \mathcal{O}(d_0)$.

Durch das Hinzufügen inhomogener Randbedingungen ergibt sich somit wieder ein Beispiel, für das die Wahl der Funktion ψ_1 ausreichend ist. Eine ähnliche Beobachtung machten wir bereits in Kapitel 3, Abschnitt 2.2. Dort war aufgrund der Geometrie des Sinusgebietes M_1 von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ und somit dominierend über $M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2})$. Für die rechte Seite $f = y^m$ konnte durch Verändern des Gebietes Ω ein unbeschränktes Wachstum von eff korrigiert werden. Hier haben wir nun das Rechteckgebiet, bei dem der Einfluss der Geometrie gleich null ist, dafür kommen inhomogene Randbedingungen hinzu. Das Resultat ist im Prinzip dasselbe:

$$M_1 = \mathcal{O}(d_0^{1/2}), M_2 = \mathcal{O}(d_0^{\frac{2m+1}{2}}), \quad eff = 1 + \mathcal{O}(d_0).$$

Bemerkung 2.1 Wählt man Randbedingungen $F_{\oplus} = F_{\ominus} = 1$, stellt man wie in Abschnitt 1 fest, dass die ein- und zweidimensionalen Lösungen in einem Verhältnis von etwa $\mathcal{O}(\frac{1}{d_0})$ wachsen. Allein aus den Termen M_1 und M_2 ist das jedoch nicht ersichtlich: Während M_2 gegenüber Tabelle 4.4 unverändert bleibt, nimmt M_1 exakt die Werte aus Tabelle 4.1 rechts an, ist also von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$. In beiden Fällen verhält sich eff wie $1 + \mathcal{O}(d_0)$.

2.2 Variable Randbedingungen

Mit der gleichen rechten Seite $f(y) = y^m$ werden nun variable Randbedingungen

$$F_{\oplus} = d_{\oplus}(x), F_{\ominus} = d_{\ominus}(x)$$

getestet. Die erhaltenen Resultate sind in Tabelle 4.5 zu finden. Wir stellen wieder grosse Gemeinsamkeiten mit früheren Beispielen fest: M_1 entspricht genau den Werten in Tabelle 4.2 links, M_2 nimmt die gleichen Werte an wie in Tabelle 4.4.

d_0	M_1	M_2	M	$ e $	eff
$f = y$					
1	0.5773	0.2887	0.8860	0.4770	1.816
0.1	0.01826	0.0091	0.0274	0.0180	1.518
0.01	$5.773e-4$	$2.887e-4$	$8.660e-4$	$5.752e-4$	1.505
0.001	$1.826e-5$	$9.129e-6$	$2.739e-5$	$1.816e-5$	1.508
$f = y^2$					
1	0.5773	0.2981	0.8755	0.4811	1.820
0.1	0.01826	$9.428e-4$	0.0192	0.0178	1.076
0.01	$5.773e-4$	$2.981e-6$	$5.803e-4$	$5.745e-4$	1.010
0.001	$1.826e-5$	$9.428e-9$	$1.827e-5$	$1.816e-5$	1.001

 Tabelle 4.5: Werte für $f = y^m$ und variablen Randbedingungen $F_{\oplus} = d_{\oplus}(x)$, $F_{\ominus} = d_{\ominus}(x)$.

Die unterschiedlichen Konvergenzraten von M_1 und M_2 haben allerdings Auswirkungen auf das Verhalten des Effektivitätsindex: Im ersten Fall mit $f = y$ gilt

$$M_1 = \mathcal{O}(d_0^{3/2}), \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2}),$$

d. h. beide Terme sind von gleicher Ordnung. Daher stabilisiert sich eff für kleine d_0 bei einem Wert um 1.5. Im zweiten Fall mit $f = y^2$ gilt

$$M_1 = \mathcal{O}(d_0^{3/2}) > M_2 = \mathcal{O}(d_0^{5/2}).$$

Die Notation “>” soll ausdrücken, dass der Term M_1 über M_2 dominiert, da M_2 von höherer Ordnung bezüglich d_0 ist. In der Folge strebt eff gegen 1 mit $d_0 \rightarrow 0$.

Bemerkung 2.2 Man kann dieses Beispiel auf analoge Weise mit Randbedingungen höherer Ordnung weiterführen. Es seien kurz die Konvergenzresultate erwähnt, die wir mit

$$F_{\oplus} = d_{\oplus}^2(x), \quad F_{\ominus} = -d_{\ominus}^2(x)$$

erhalten: Mit diesen Randbedingungen entspricht M_1 genau den Werten aus Tabelle 4.2 rechts, M_2 bleibt unverändert wie in Tabelle 4.4 oder 4.5. Im Vergleich stellen wir fest:

$$\begin{aligned} f = y: \quad M_1 &= \mathcal{O}(d_0^{5/2}) < M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2}), \quad eff \rightarrow \infty \\ f = y^2: \quad M_1 &= \mathcal{O}(d_0^{5/2}) = M_2, \quad eff \rightarrow c \approx 1.5. \end{aligned}$$

Für $f = y$ ist somit der Term M_2 dominierend, folglich konvergiert der Effektivitätsindex nicht gegen 1, sondern wächst mit $d_0 \rightarrow 0$ an. Im zweiten Fall mit $f = y^2$ sind nun M_1 und M_2 beide von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{5/2})$, was wie in Tabelle 4.5 für kleine d_0 zu einer Stabilisierung von eff bei etwa 1.5 führt.

Bemerkung 2.3 Auf Experimente mit Sinusgebiet und verschiedenen Randbedingungen wird verzichtet. Wir wissen aus Kapitel 2 und 3, dass auf dem Sinusgebiet M_1 von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ ist. Zusätzliche inhomogene Randbedingungen beeinflussen M_1 im Rahmen gleicher oder höherer Ordnung. Daher bleibt M_1 von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ und dominiert in allen unseren Fällen über den Term M_2 .

3 Kombination aller Faktoren

Bisher gingen wir von einfachen Beispielen aus und fügten schrittweise Einflussfaktoren wie Gebietsgeometrie und inhomogene Randbedingungen hinzu. In den einfachsten Fällen konnten wir analytisch ein- und zweidimensionale Lösungen u_{1d} , u_{2d} angeben. Um den Fehlerschätzer auch für aufwändigere Probleme zu testen, kehren wir nun das Vorgehen um: Wir geben uns eine nicht triviale Lösung $u(x, y)$ vor und berechnen daraus analytisch $f(x, y)$ und Neumann-Randbedingungen F_\ominus und F_\oplus . Als Beispiel soll uns folgende Funktion dienen:

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \cdot y^n.$$

Die zweidimensionale Problemstellung lautet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{bei } x = 0, x = 1 \\ \nabla u \cdot n_{\oplus, \ominus} &= F_{\oplus, \ominus} && \text{bei } y = d_{\oplus, \ominus}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} f &= \sin(\pi x) (\pi^2 \cdot y^n - n \cdot (n-1) \cdot y^{n-2}) \\ F_\oplus &= \{ \pi \cdot \cos(\pi x) \cdot d_\oplus^n \cdot (-\nabla d_\oplus) + n \cdot \sin(\pi x) \cdot d_\oplus^{n-1} \} / \sqrt{1 + |\nabla d_\oplus|^2} \\ F_\ominus &= \{ \pi \cdot \cos(\pi x) \cdot d_\ominus^n \cdot \nabla d_\ominus - n \cdot \sin(\pi x) \cdot d_\ominus^{n-1} \} / \sqrt{1 + |\nabla d_\ominus|^2}. \end{aligned}$$

3.1 Sinusgebiet

Das Beispiel wurde bereits in [1] betrachtet. Dort hat sich M als zuverlässig erwiesen und sowohl für $n = 4$ als auch für $n = 5$ eine obere Schranke gebildet. Für gerade n konvergierte der Effektivitätsindex gegen 1, für ungerade n stabilisierte sich eff auf einem Niveau von etwa 1.96. Diese Ergebnisse wurden in diesem Rahmen bestätigt. Zur Orientierung seien hier die Werte für $n = 2$ und $n = 3$ aufgeführt, da diese als Vergleich dienen werden.

$n = 2$:

d_0	M_1	M_2	M	$\ e\ $	eff
1	3.4626	2.892	6.3588	1.4201	4.478
0.1	0.3291	0.0901	0.4192	0.3178	1.319
0.01	0.1000	0.0028	0.1028	0.1000	1.029
0.001	0.0316	$9.0096e-5$	0.0317	0.0316	1.003

$n = 3$:

d_0	M_1	M_2	M	$\ e\ $	eff
1	8.8745	3.1951	12.0696	2.4762	4.874
0.1	1.4236	0.0884	1.5121	0.5054	2.991
0.01	0.4457	0.00279	0.4485	0.1589	2.823
0.001	0.1409	$8.829e-5$	0.1410	0.0502	2.807

Für $n = 3$ strebt eff auch hier zwar nicht gegen 1, er stabilisiert sich jedoch auf nicht allzu hohem Niveau. Wir stellen fest, dass sich M_1 und M_2 in beiden Fällen gleich verhalten:

$$M_1 = \mathcal{O}(d_0^{1/2}), \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2}).$$

3.2 Rechteckgebiet

Das Rechteckgebiet ist hier leicht unterschiedlich definiert durch

$$d_{\oplus, \ominus} = \pm \frac{d_0}{2}.$$

Hier verändert sich die Situation durch den Einfluss des Parameters n , der sich auf dem Rechteckgebiet entscheidend auswirkt. Während für $n = 2$ der Effektivitätsindex wie erwartet gegen 1 konvergiert, schlägt das Beispiel mit $n = 3$ fehl, der Index steigt unbeschränkt an.

$n = 2$:

d_0	M_1	M_2	M	$\ e\ $	eff
1	0.4083	0.5202	0.9284	0.4405	2.107
0.1	0.0129	0.00165	0.0145	0.0129	1.126
0.01	$4.082e-4$	$5.202e-6$	$4.134e-4$	$4.082e-4$	1.013
0.001	$1.291e-5$	$1.644e-8$	$1.293e-5$	$1.291e-5$	1.001

$n = 3$:

d_0	M_1	M_2	M	$\ e\ $	eff
1	0.5303	0.9319	1.4623	0.2594	5.638
0.1	0.0017	0.0386	0.0403	$7.507e-4$	53.696
0.01	$5.303e-6$	0.0012	0.0012	$2.372e-6$	$5.186e+2$
0.001	$1.677e-8$	$3.873e-5$	$3.875e-5$	$7.500e-9$	$5.166e+3$

Wenn wir die Konvergenzraten von M_1 und M_2 betrachten, stellen wir einen wesentlichen Unterschied fest: Während für $n = 2$ M_1 mit $d_0^{3/2}$ gegen 0 strebt und M_2 mit $d_0^{5/2}$, ist es bei $n = 3$ gerade umgekehrt. Das hat zur Folge, dass für $n = 3$ eff unbeschränkt wächst:

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad M_1 &= \mathcal{O}(d_0^{3/2}) > M_2 = \mathcal{O}(d_0^{5/2}), \quad eff = 1 + \mathcal{O}(d_0) \\ n = 3 : \quad M_1 &= \mathcal{O}(d_0^{5/2}) < M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2}), \quad eff \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Auch für $n = 4$ oder grösser schlägt das Beispiel fehl:

$$n = 4 : \quad M_1 = \mathcal{O}(d_0^{7/2}) < M_2 = \mathcal{O}(d_0^{5/2}), \quad eff \rightarrow \infty.$$

Analytische Untersuchung: Betrachten wir die Funktionen $f, F_{\oplus}, F_{\ominus}$ genauer: Mit $n = 2$ gilt $f(x, y) = \sin(\pi x)(\pi^2 y^2 - 2)$, also ist der Ausdruck $f - \tilde{f}$ von Ordnung $\mathcal{O}(y^2)$. Für $n = 3$ gilt $f(x, y) = \sin(\pi x)(\pi^2 y^3 - 6y)$, also ist $f - \tilde{f} = \mathcal{O}(y)$, da die niedrigere Potenz ausschlaggebend ist. Somit erhalten wir für $M_2 = \|f - \tilde{f}\|_{L_2(\Omega)}$:

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad f - \tilde{f} &= \mathcal{O}(y^2), \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{5/2}) \\ n = 3 : \quad f - \tilde{f} &= \mathcal{O}(y), \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2}) \\ n = 4 : \quad f - \tilde{f} &= \mathcal{O}(y^2), \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{5/2}). \end{aligned}$$

Wichtig ist nun das Zusammenspiel mit M_1 . In M_1 fließen die Gebietsgeometrie und die Randbedingungen F_{\oplus}, F_{\ominus} ein. Für das Rechteckgebiet gilt $\nabla d(x) = \nabla d_{\oplus} = \nabla d_{\ominus} = 0$, somit bleiben nur F_{\oplus}, F_{\ominus} . Der Definition am Anfang dieses Abschnittes entnehmen wir

$$F_{\oplus, \ominus} = \mathcal{O}(d_{\oplus, \ominus}^{n-1}).$$

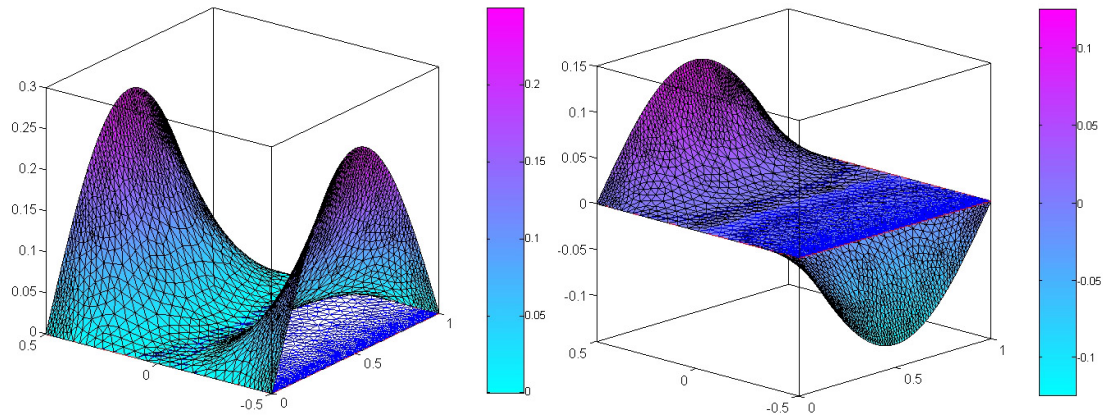


Abbildung 4.4: Zweidimensionale Lösung u_{2d} auf dem Rechteckgebiet, (links) $n = 2$, (rechts) $n = 3$.

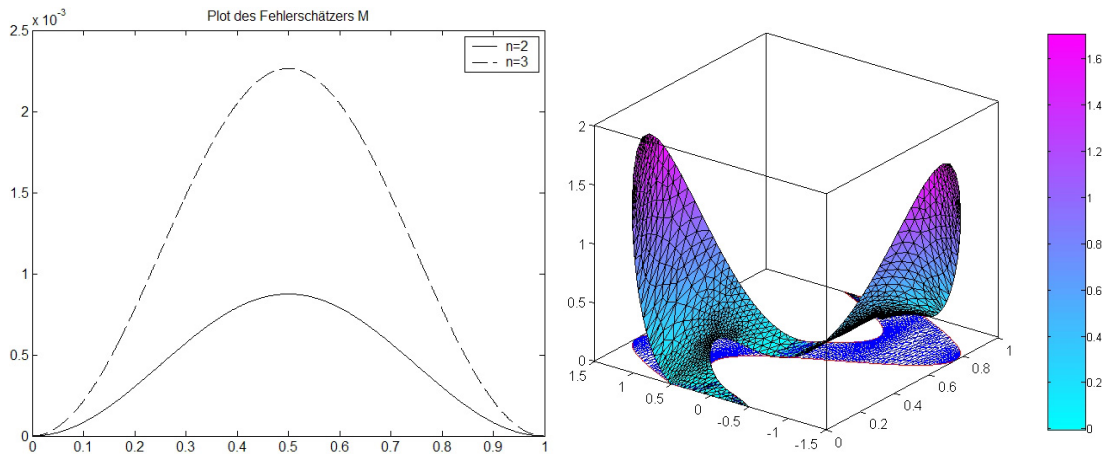


Abbildung 4.5: (Links) Rechteckgebiet, lokale Fehlerverteilung von M . (Rechts) Sinusgebiet, Zweidimensionale Lösung u_{2d} für $n = 2$.

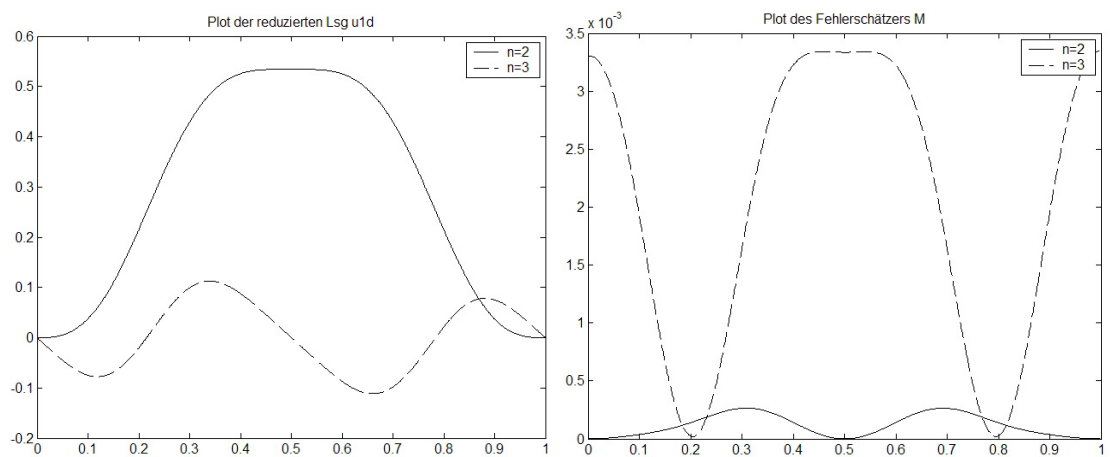


Abbildung 4.6: Sinusgebiet: (links) Vergleich der reduzierten Lösungen u_{1d} und (rechts) der lokalen Fehlerverteilungen von M .

Wie aus Abschnitt 1 bekannt, tragen die Randbedingungen somit auf folgende Weise zum Term M_1 bei:

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad M_1 &= \mathcal{O}(d_0^{3/2}) \\ n = 3 : \quad M_1 &= \mathcal{O}(d_0^{5/2}) \\ n = 4 : \quad M_1 &= \mathcal{O}(d_0^{7/2}). \end{aligned}$$

Dies führt zum beobachteten Ergebnis, dass für $n = 2$ der Term M_1 über M_2 dominiert und die Wahl $\psi = \psi_1$ ausreichend ist. Für $n = 3, 4 \dots$ schlägt das fehl, da in diesen Fällen M_2 dominiert und der Effektivitätsindex unbeschränkt wächst.

Bemerkung: Auf dem Sinusgebiet ist die Situation anders, da dort die Gebietsgeometrie das Verhalten von M_1 bestimmt, $M_1 = \mathcal{O}(d_0^{1/2})$. Das ist grösser als der Einfluss der Randbedingungen von $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$ bzw. $\mathcal{O}(d_0^{5/2})$. Der Term M_2 verhält sich für alle n wie $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$, was von höherer Ordnung ist als M_1 . Somit konvergiert *eff* gegen 1 in einem Verhältnis von $1 + \mathcal{O}(d_0)$.

4 Schlussfolgerungen

Gebietsgeometrie, rechte Seite und Neumann-Randbedingungen spielen auf vielfältige Arten zusammen. Durch den Aufbau der Terme M_1 und M_2 können diese Einflussfaktoren relativ unabhängig voneinander kombiniert und analysiert werden. Generell haben wir bislang gesehen, dass die Majorante $M = M_1 + C_\Omega M_2$ stets *zuverlässig* war, d. h. sie bildete immer eine obere Schranke für den exakten Fehler. Ob sie auch *effektiv* war, zeigte der Effektivitätsindex. Je näher er beim Wert 1 lag, desto besser war die Qualität der Abschätzung. Nach einer Vielzahl von Beispielen gelangen wir zu der Schlussfolgerung:

Der Fehlerschätzer $M = M_1 + C_\Omega M_2$ ist zuverlässig und effektiv, wenn der Term M_2 von gleicher oder höherer Ordnung ist als M_1 .

Das deckt sich auch mit der Aussage in [2], die als Bemerkung 3.1 auf Seite 7 zitiert wird. In allen diesen Fällen konvergierte der Effektivitätsindex mit $d_0 \rightarrow 0$ gegen den Wert 1 oder stabilisierte sich zumindest auf einem nicht allzu hohen Niveau.

Für ein gegebenes Problem können die entsprechenden Funktionen in die Ausdrücke M_1 und M_2 eingesetzt werden. Bereits mit einer einfachen Analyse können so *a priori* Aussagen über das Verhalten von M_1 und M_2 bezüglich d_0 gemacht werden, unabhängig von den konkret zu berechnenden Zahlenwerten. Dies ermöglicht bereits im Vorfeld eine Beurteilung, ob die Funktion $\psi_1(x, y)$ eine effiziente Fehlerabschätzung liefert oder ob eine Funktion ψ_m höherer Ordnung nötig wird (siehe Bemerkung 3.3 in Kapitel 1).

Erfreulicherweise haben wir bereits sehr viele Beispiele angetroffen, für welche bereits die einfachste Wahl $\psi = \psi_1(x, y)$ zum gewünschten Ergebnis führte. Das ist wertvoll, da sich das reduzierte Problem und die Majorante $M(\psi_1)$ mit geringem Aufwand berechnen lassen und auch für kleine d_0 stabil sind. Auf der nächsten Seite folgt eine Übersicht der Ergebnisse aus den Kapiteln 2 bis 4.

Für die Fälle, in denen die Funktion $\psi_1(x, y)$ nicht ausreichte, wird im nachfolgenden Kapitel eine verbesserte Abschätzung $M(\psi_2)$ mit Hilfe einer Funktion $\psi_2(x, y)$ eingeführt.

Übersicht

	Rechteckgebiet	Sinusgebiet	Keilgebiet
Geometrie	$M_1 = 0$	$M_1 = \mathcal{O}(d_0^{1/2})$	$M_1 = \mathcal{O}(d_0^{3/2})$
$f(x, y)$	$f = c \in \mathbb{R} \quad M_2 = 0$ $f = f(x) \quad M_2 = 0$ $f = y^m \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{\frac{2m+1}{2}})$ $f = \sin(\pi y) \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2})$	$f = c \in \mathbb{R} \quad M_2 = 0$ $f = f(x) \quad M_2 = 0$ $f = y^m \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2})$ $f = \sin(\pi y) \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2})$	$f = c \in \mathbb{R} \quad M_2 = 0$ $f = f(x) \quad M_2 = 0$ $f = y^m \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{\frac{2m+1}{2}}),$ $M_1 = \mathcal{O}(d_0^{\frac{2m+3}{2}})$ $f = \sin(\pi y) \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2}),$ $M_1 = \mathcal{O}(d_0^{5/2})$
Neumann- Randbedingungen	$F_{\oplus, \ominus} = 0 \quad M_1 = 0$ $F_{\oplus, \ominus} = c \in \mathbb{R} \quad M_1 = \mathcal{O}(d_0^{1/2})$ $F_{\oplus, \ominus} = \mathcal{O}(d_{\oplus, \ominus}^m) \quad M_1 = \mathcal{O}(d_0^{\frac{2m+1}{2}})$	$M_1 = \mathcal{O}(d_0^{1/2})$ (Gebietsgeometrie überwiegt)	$F_{\oplus, \ominus} = 0 \quad M_1 = \mathcal{O}(d_0^{3/2})$ $F_{\oplus, \ominus} = c \in \mathbb{R} \quad M_1 = \mathcal{O}(d_0^{1/2})$ $F_{\oplus, \ominus} = d_{\oplus, \ominus} \quad M_1 = \mathcal{O}(d_0^{3/2})$

Kapitel 5

Verbesserte Abschätzung

Mit Hilfe der Funktion $\psi_2(x, y)$ sollen nun die Beispiele, bei denen in den vorigen Kapiteln *eff* unbeschränkt anstieg, mit einer verbesserten Abschätzung behandelt werden.

1 Herleitung von ψ_2

Wir gehen von der gleichen Problemstellung aus wie in Kapitel 2, d. h. wir betrachten weiterhin die Poissongleichung. Anstatt $\psi_1(x, y) = \alpha(x)y + \beta(x)$ führen wir die quadratische Funktion ψ_2 ein:

$$\psi_2(x, y) = \psi_1(x, y) + \eta(x)(y - d_{\oplus}(x))(y - d_{\ominus}(x)), \quad (5.1)$$

wobei η eine beliebige Funktion aus $L_2(\hat{\Omega})$ ist. Die Freiheit, η passend bestimmen zu können, ermöglicht uns das Verhältnis zwischen M_1 und M_2 zu korrigieren, so dass die Majorante M das Verhalten des exakten Fehlers effizient reproduziert.

Setzen wir ψ_2 in Formel (1.34) ein, erhalten wir

$$\|u - \hat{u}\|^2 \leq M^2(\eta, \gamma) \quad \forall \gamma > 0, \quad \forall \eta \in L_2(\hat{\Omega}) \quad (5.2)$$

mit

$$M^2(\eta, \gamma) = (1 + \gamma) M_1^2(\psi_2) + (1 + \frac{1}{\gamma}) C_{\Omega}^2 M_2^2(\psi_2). \quad (5.3)$$

Mit ψ_2 in (2.2) und (2.3) aus Kapitel 2 erhalten wir im Detail

$$\begin{aligned} M_1^2 &= \|\psi_2\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= \int_{\Omega} (\psi_1(x, y) + \eta(x)(y - d_{\oplus})(y - d_{\ominus}))^2 dy dx \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} M_2^2 &= \|f - \hat{f} - \frac{\nabla d}{d} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \text{vergl. (1.27)} \\ &= \int_{\Omega} \left(f - \tilde{f} + \eta(x)(2y - d_{\oplus} - d_{\ominus}) \right)^2 dy dx \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$M(\psi_2) = M_1(\psi_2) + C_{\Omega} M_2(\psi_2). \quad (5.6)$$

Bestimmung von η : Da (5.2) für alle $\gamma > 0$ und $\eta \in L_2(\hat{\Omega})$ gültig ist, kann man das Funktional $M^2(\eta, \gamma)$ bezüglich dieser Parameter minimieren. Wir setzen $\gamma = \gamma^* < 1$ (der konkrete Anfangswert spielt keine grosse Rolle, wir verwendeten $\gamma^* = 0.5$) und suchen η_{min} als den Minimierer von $M^2(\eta, \gamma)$ über dem Raum der stückweise konstanten Funktionen. Dieses Minimierungsproblem führt auf das einfache Lösen eines Gleichungssystems mit diagonalen Matrix. Mit dem resultierenden η_{min} berechnen wir $M_1(\psi_2)$ und $M_2(\psi_2)$.

Das Vorgehen kann durch den folgenden Algorithmus iteriert werden:

Algorithmus (5.1):

1. Setze $\gamma = 0.5$
2. Bestimme η_{min} als den Minimierer von $M^2(\eta, \gamma)$
3. Berechne mit η_{min} die Terme $M_1(\psi_2)$, $M_2(\psi_2)$
4. Setze $\gamma = \frac{C_\Omega M_2}{M_1}$ und fahre bei Punkt 2 weiter.

Der Algorithmus kann abgebrochen werden wenn $|M^2(\eta^{(i)}, \gamma^{(i)}) - M^2(\eta^{(i+1)}, \gamma^{(i+1)})| < \varepsilon$, wobei ε frei gewählt werden kann, z. B. $\varepsilon = 10^{-4}$ oder 10^{-5} .

In [2] wurde festgestellt, dass eine oder zwei Iterationen in den meisten Fällen ausreichen, und weitere Iterationen nur den Rechenaufwand in die Höhe treiben ohne das Resultat wesentlich zu verbessern. Mit den Funktionen η und ψ_2 können wir nun diejenigen Beispiele neu berechnen, die mit ψ_1 fehlschlugen.

1.1 Funktionen höherer Ordnung

Als weitere Verbesserungsmöglichkeit bieten sich Funktionen ψ_m höherer Ordnung an. Beispielsweise können wir eine kubische Funktion $\psi_3(x, y)$ definieren als

$$\psi_3(x, y) := \psi_2(x, y) + \zeta(x)y(y - d_\ominus)(y - d_\oplus) \quad (5.7)$$

mit $\zeta(x) \in L_2(\hat{\Omega})$. Damit erhalten wir ein erweitertes Funktional $M^2(\eta, \zeta, \gamma)$:

$$M^2(\eta, \zeta, \gamma) = (1 + \gamma) \|\psi_3\|_{L_2(\Omega)}^2 + (1 + \frac{1}{\gamma}) C_\Omega^2 \left\| f - \tilde{f} - \frac{\nabla d}{d} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (5.8)$$

Die freien Parameter η und ζ können analog zu Algorithmus (5.1) bestimmt werden. Man erhält ein System von zwei Minimierungsproblemen bezüglich η und ζ und löst diese jeweils auf dem Raum der stückweise konstanten Funktionen.

Allgemeinere Funktionen ψ_m höherer Ordnung können definiert werden durch

$$\psi_m(x, y) := \psi_1 + (y - d_\ominus)(y - d_\oplus) \left(\sum_{i=0}^{m-2} \varphi_i(x) \cdot y^i \right) \quad (5.9)$$

wobei ψ_m dann $m - 1$ Freiheitsgrade enthält, die jeweils Funktionen $\varphi_i(x) \in L_2(\hat{\Omega})$ sind. Da die Bestimmung dieser Funktionen immer ein quadratisches Minimierungsproblem bleibt, wird der Aufwand für moderate Werte von m nicht grösser als das Lösen des reduzierten Problems sein.

2 Numerische Beispiele

2.1 Beispiel 1

Wir betrachten das Beispiel aus Kapitel 3, Abschnitt 2:

$$f(y) = y^m, \quad F_\oplus = F_\ominus = 0.$$

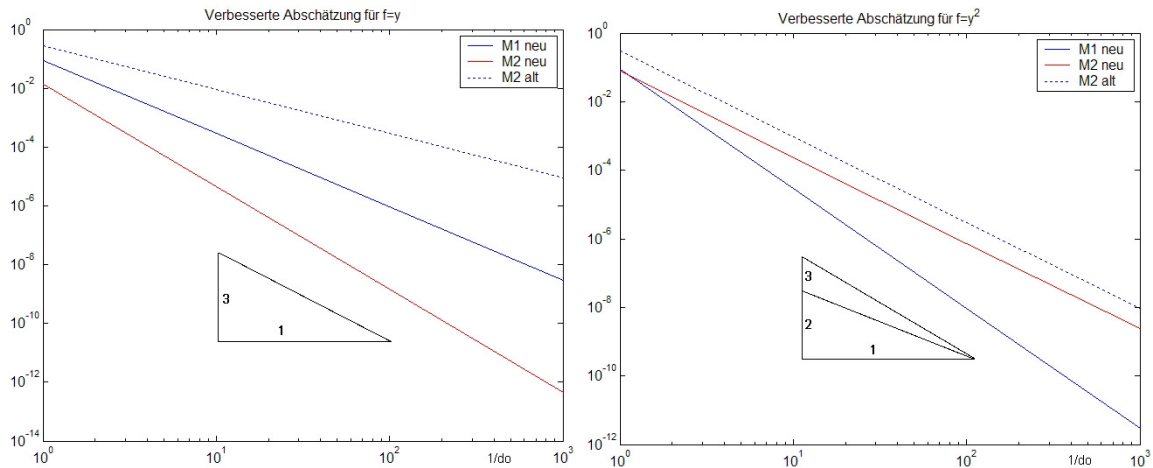


Abbildung 5.1: Vergleich der Konvergenzordnungen mit ψ_1 („alt“) und ψ_2 („neu“). Links $f = y$, rechts $f = y^2$.

Auf dem Rechteckgebiet war $M_1 = 0$, $M_2 = \mathcal{O}(d_0^{\frac{2m+1}{2}})$, was dazu führte, dass eff „explodierte“. Mit ψ_2 wiederholen wir nun dieses Beispiel und vergleichen die Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
 m = 1 : M_1(\psi_2) &= \mathcal{O}(d_0^{5/2}) > M_2(\psi_2) = \mathcal{O}(d_0^{7/2}), & eff &= 1 + \mathcal{O}(d_0) \\
 m = 2 : M_1(\psi_2) &= \mathcal{O}(d_0^{7/2}) < M_2(\psi_2) = \mathcal{O}(d_0^{5/2}), & eff &\rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Die erhaltenen Werte für $m = 1$ und $m = 2$ sind in Tabelle 5.1 aufgeführt. Wir stellen fest, dass sich für $f = y$ der Effektivitätsindex bei etwa 1.01 stabilisiert. Wesentlich ist, dass mit der verbesserten Abschätzung ψ_2 M_1 nicht mehr null ist, sondern von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{5/2})$ und M_2 von höherer Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{7/2})$ (Abbildung 5.1 links).

Im zweiten Fall mit $f = y^2$ ist auch $\psi_2(x, y)$ noch nicht ausreichend, M_2 dominiert immer noch über M_1 . Allerdings scheint das Wachstum von eff im Vergleich zu Tabelle 3.1 bereits etwas gebremst. Die Konvergenzordnungen von M_1 und M_2 sind in Abbildung 5.1 rechts dargestellt. Für dieses Beispiel $f = y^2$ wäre die Funktion $\psi_3(x, y)$ nötig, denn für $m = 2$ ist die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial y}$ kubisch und kann nicht durch die quadratische Funktion $\psi_2(x, y)$ dargestellt werden. Analog braucht es für höhere Werte von m Funktionen $\psi_{m+1}(x, y)$ höherer Ordnung.

d_0	M_1	M_2	M	$ e $	eff
$f = y$					
1	0.0869	0.0137	0.1007	0.0586	1.717
0.1	$2.885e-4$	$4.562e-6$	$2.931e-4$	$2.783e-4$	1.053
0.01	$9.127e-7$	$1.443e-9$	$9.143e-7$	$9.067e-7$	1.008
0.001	$2.887e-9$	$4.632e-13$	$2.887e-9$	$2.844e-9$	1.015
$f = y^2$					
1	0.0869	0.0758	0.1627	0.0594	2.740
0.1	$2.885e-5$	$2.357e-4$	$2.645e-4$	$2.805e-5$	9.432
0.01	$9.129e-9$	$7.453e-7$	$7.545e-7$	$9.157e-9$	82.394
0.001	$2.887e-12$	$2.357e-9$	$2.360e-9$	$3.540e-12$	6.66e+2

Tabelle 5.1: Werte für $f = y, y^2$ mit der verbesserten Abschätzung $\psi_2(x, y)$.

d_0	M_1	M_2	M	$\ e\ $	eff
1	0.2836	0.1350	0.4187	0.2594	1.614
0.1	$7.512e-4$	$4.199e-5$	$7.932e-4$	$7.507e-4$	1.056
0.01	$2.372e-6$	$1.328e-8$	$2.385e-6$	$2.372e-6$	1.005
0.001	$5.500e-9$	$4.228e-12$	$7.504e-9$	$7.500e-9$	1.001

Tabelle 5.2: Beispiel 2, globale Wertetabelle für $n = 3$.

2.2 Beispiel 2

Mit ψ_2 können wir auch folgendes Beispiel aus Kapitel 4 korrigieren:

$$u(x, y) = \sin(\pi x)y^n \quad \text{mit} \quad f(x, y) = \sin(\pi x) (\pi^2 y^n - n(n-1)y^{n-2}).$$

Wir haben festgestellt, dass für $n = 2$ auf dem Rechteckgebiet die Funktion ψ_1 ausreichend war, für $n > 2$ jedoch nicht. Mit ψ_2 erhalten wir nun

$$n = 3: \quad M_1(\psi_2) = \mathcal{O}(d_0^{5/2}) > M_2(\psi_2) = \mathcal{O}(d_0^{7/2}), \quad eff = 1 + \mathcal{O}(d_0).$$

Somit hat sich auch hier die verbesserte Abschätzung gelohnt, eff konvergiert mit $d_0 \rightarrow 0$ gegen 1 (Tabelle 5.2). Für $n = 4$ reicht allerdings $\psi_2(x, y)$ nicht mehr aus, dafür würde $\psi_3(x, y)$ benötigt.

3 Zusammenfassung

Die Funktion ψ wurde so definiert, dass sie im Fall der Poissongleichung ($A = \mathbf{I}$) die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial y}$ approximieren sollte. Die Abschätzung des Modellfehlers lässt sich verbessern durch eine Erweiterung der Majorante M mit der Funktion ψ_2 . Analog kann man auch Funktionen ψ_m höherer Ordnung herleiten, die eine weitere Verbesserung der Abschätzung ermöglichen.

Die einfachste Wahl der linearen Funktion $\psi = \psi_1$ lieferte bereits für viele Beispiele eine effiziente Abschätzung, besass aber auch klare Grenzen. Die quadratische Funktion ψ_2 ist nun auch für Probleme verwendbar, die bezüglich y von höherer Ordnung sind. Die Grenze ist hier erreicht, wenn $\frac{\partial u}{\partial y}$ eine kubische Funktion ist.

Wenn keine zusätzliche a priori Information über das Verhalten der exakten Lösung $u(x, y)$ vorhanden ist, empfiehlt sich im allgemeinen ein iteratives Vorgehen: Man beginnt mit ψ_1 und erhöht den polynomialen Grad der Funktion, bis die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Majoranten $|M(\psi_m) - M(\psi_{m-1})|$ kleiner wird als eine vorgegebene Toleranz ε .

Kapitel 6

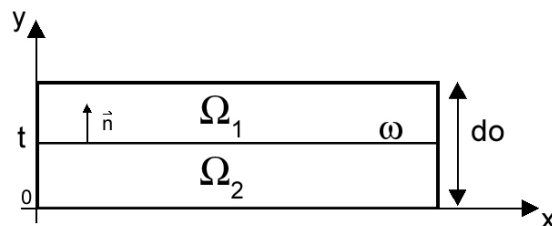
Abschätzung des Modellfehlers für springende Koeffizienten

In diesem Kapitel geht es um die Frage, ob unser Fehlerschätzer M auch für Probleme mit springenden Koeffizienten zuverlässig arbeitet. Springende Koeffizienten können in Situationen auftreten, in denen sogenannte *geschichtete Platten* untersucht werden. Dabei besteht der obere Teil der Platte aus einem anderen Material als der untere Teil. Die Materialeigenschaften werden durch die Koeffizienten in der Matrix A dargestellt. An der Grenze, wo diese beiden Materialien aufeinandertreffen, bilden die Koeffizienten einen Sprung aus.

Reduziert man solche geschichtete Platten auf eine Dimension, geht diese Eigenschaft verloren. Wir untersuchen, ob sich der entwickelte Fehlerschätzer auch für solche Fälle verwenden lässt.

1 Problemstellung

Da hier nicht der Einfluss der Gebietsgeometrie, sondern die Koeffizienten der Matrix A von Bedeutung sind, wird das Gebiet bewusst einfach gewählt: Ω sei eine ebene Platte mit Länge 1 und Dicke d_0 . Auf einer Höhe t (in den Beispielen meist $t = \frac{d_0}{2}$) unterteilen wir Ω in zwei Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 , die Trennlinie nennen wir ω . Das reduzierte eindimensionale Gebiet $\hat{\Omega}$ sei das Einheitsintervall $(0,1)$.



Wir setzen für die Koeffizientenmatrix A :

$$A(x, y) = a(y) \cdot \mathbf{I} \quad (\mathbf{I} = \text{Identitätsmatrix})$$
$$a(y) = \begin{cases} a_1 \in \mathbb{R}_{>0} & \text{in } \Omega_1 \\ a_2 \in \mathbb{R}_{>0} & \text{in } \Omega_2 \end{cases}$$

Auf Ω gilt es, folgendes Problem zu lösen:

$$\begin{aligned} -\text{Div}(A\nabla u) &= f && \text{in } \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ u &= 0 && \text{bei } x = 0, 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= F_{\oplus, \ominus} && \text{bei } y = d_{\oplus, \ominus}(x) \end{aligned}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass der Sprung $[u]_\omega$ von u über die Kante ω gerade null beträgt:

$$[u]_\omega = 0, \quad (6.1)$$

und der Normalenfluss $A\nabla u \cdot \vec{n} = a \frac{\partial u}{\partial y}$ stetig ist:

$$a_2 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow t^-} - a_1 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow t^+} = 0. \quad (6.2)$$

Ist $a_1 \neq a_2$ so folgt daraus

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow t^-} \neq \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow t^+}. \quad (6.3)$$

Das heisst, $A\nabla u$ ist zwar stetig, aber ∇u ist auf ω nicht stetig! Insbesondere gilt:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow t^+}}{\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow t^-}} = \frac{a_1}{a_2} \quad (6.4)$$

Von Interesse ist also auch der Quotient von a_1 und a_2 , der angibt, wie gross der Sprung von ∇u über ω ist.

Das reduzierte Problem (Q) lautet (wobei der konstante Faktor d_0 gekürzt wurde):

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\tilde{A}_p \nabla \hat{u}) &= \hat{f}(x) & \text{in } \hat{\Omega} = (0, 1) \\ \hat{u} &= 0 & \text{bei } x = 0, 1 \end{aligned}$$

Zur Formulierung unseres Fehlerschätzers M greifen wir auf die Formeln (1.24) und (1.27) in Kapitel 1 zurück. Mit der Wahl $\psi = \psi_1(x, y)$ bleibt M_2 unverändert:

$$M_2 = \|f - \tilde{f}\|_{L_2(\Omega)}. \quad (6.5)$$

Mit der Bezeichnung $B = A^{-1}$ wie in Kapitel 1 wird M_1 zu

$$M_1^2 = \int_{\hat{\Omega}} d_0(\tilde{B}_p \tilde{A}_p - 1) \nabla \hat{u} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u} \, dx + \int_{\Omega} b_{22} \psi_1^2(x, y) \, dy \, dx. \quad (6.6)$$

Beachte, dass in unserem Fall wegen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ auch $\tilde{B}_p, \tilde{A}_p \in \mathbb{R}$ sind.

Das erste Integral in (6.6) misst den Fehler, der bei der Mittelung der Koeffizienten entsteht. Das ist leicht einzusehen, da A eine Diagonalmatrix ist: ohne die Mittelung ($\tilde{}$) wäre $(\tilde{B}_p \tilde{A}_p - 1)$ exakt null.

Bemerkung 1.1 A priori ist dieser Term von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$, hängt aber davon ab, wie sich ∇u_{1d} mit $d_0 \rightarrow 0$ verhält. Für Funktionen f , die unabhängig von y sind, resultiert für alle d_0 das gleiche u_{1d} , somit ist ∇u_{1d} konstant bezüglich d_0 . Bei Funktionen f , die von y abhängen, werden aber u_{1d} und ∇u_{1d} mit d_0 linear kleiner. Somit verhält sich $(\nabla u_{1d})^2$ wie $\mathcal{O}(d_0^2)$, zusammen mit dem Faktor d_0 ist das ganze Integral von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$.

Das zweite Integral in (6.6) enthält die Funktion ψ_1 , die definiert ist als

$$\psi_1(x, y) := \alpha(x)y + \beta(x). \quad (6.7)$$

Da wir in diesem Kapitel nur mit einem Rechteckgebiet arbeiten, gilt $\nabla d(x) = \nabla d_\oplus = \nabla d_\ominus = 0$ und die Terme $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ vereinfachen sich stark:

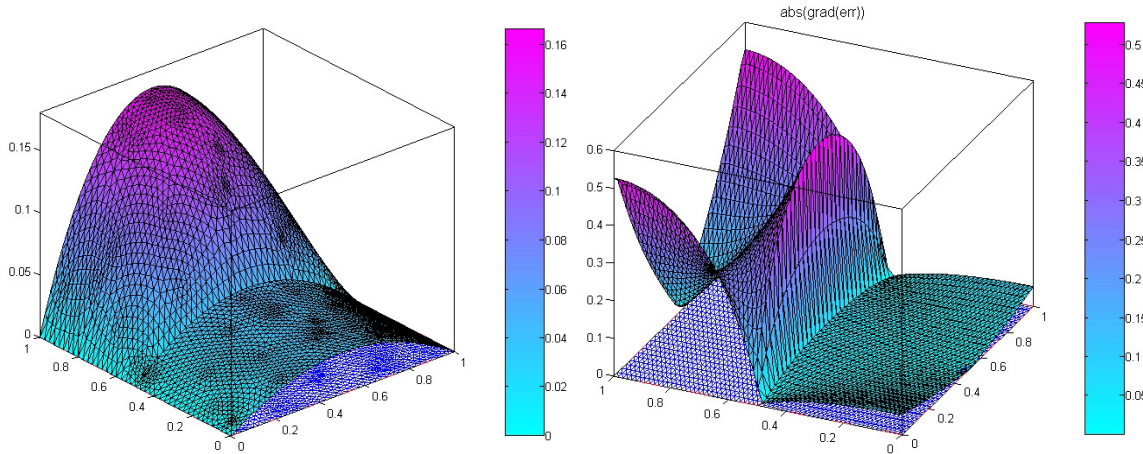


Abbildung 6.1: (Links) Lösung u_{2d} für $f = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 10$. (Rechts) Zweidimensionale Verteilung des Gradienten des Fehlers $|\nabla(u_{2d} - u_{1d})|$ im Betrag.

$$\alpha(x) := \frac{1}{d_0} (F_{\oplus} + F_{\ominus}), \quad (6.8)$$

$$\beta(x) := \frac{1}{d_0} (d_{\oplus} \cdot (-F_{\ominus}) - d_{\ominus} \cdot F_{\oplus}). \quad (6.9)$$

Beachte bei der Berechnung des Integrals $\int_{\Omega} b_{22} \psi_1^2(x, y)$, dass der Koeffizient $b_{22} = a_{22}^{-1}$ unstetig ist und das Integral daher auf Ω_1 und Ω_2 aufgeteilt werden muss.

Zusammen ist M definiert als

$$M := M_1 + C_{\Omega} M_2. \quad (6.10)$$

2 Numerische Beispiele

2.1 Konstante rechte Seite

Das einfachste Beispiel mit konstanter rechter Seite $f = 2$ und homogenen Neumann-Randbedingungen $F_{\oplus} = F_{\ominus} = 0$ stellt uns vor gewisse Probleme. Denn wie aus den früheren Kapiteln bekannt ist, werden in diesem Fall M_2 und das zweite Integral in (6.6) exakt null. Das erste Integral ist erwartungsgemäss von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$, aber da sich der exakte Fehler $\|e\|$ wie $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$ verhält, wächst der Effektivitätsindex unbeschränkt mit $d_0 \rightarrow 0$. Als Ausweg bietet sich die Wahl der Funktion $\psi = \psi_2(x, y)$ an. Wir betrachten aber zuerst noch andere Beispiele, für die die Funktion ψ_1 ausreichend ist, daher klammern wir diese Variante vorerst aus.

Abbildung 6.1 zeigt dafür sehr gut die Auswirkungen springender Koeffizienten, gewählt wurden $a_1 = 1$, $a_2 = 10$. Die Grafik links enthält die zweidimensionale Lösung $u_{2d}(x, y)$, die das unterschiedliche Verhalten auf Ω_1 und Ω_2 zeigt. Die rechte Grafik zeigt eine zweidimensionale (elementweise) Verteilung des Gradienten des Fehlers $|\nabla(u_{2d} - u_{1d})|$ im Betrag, deutlich sichtbar ist der Sprung an der Trennlinie ω .

Zur Analyse besser geeignet ist das folgende Beispiel mit inhomogenen Randbedingungen:

$$f = 2, \quad F_{\oplus} = 1, \quad F_{\ominus} = -1.$$

Tabelle 6.1 zeigt einen Vergleich der entstehenden Werte für Koeffizienten $a_1 = 1$, $a_2 = 10$ (links) und $a_1 = 1$, $a_2 = 100$ (rechts). In beiden Fällen verhält sich M_1 wie $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$. Interessan-

terweise wirken sich die unterschiedlichen Koeffizienten a_1, a_2 nicht besonders stark aus. Der Effektivitätsindex bewegt sich auch bei kleineren Quotienten $\frac{a_1}{a_2}$ nahe bei 1, er stabilisiert sich im ersten Fall bei einem Wert um 1.1, im zweiten Fall um 1.15. Denn mit einem höheren Wert für a_2 wird u_{2d} nur noch kleiner auf Ω_2 , das Maximum auf Ω_1 bleibt davon unbeeinflusst.

d_0	$a_1 = 1, a_2 = 10$			$a_1 = 1, a_2 = 100$		
	M_1	$ e $	eff	M_1	$ e $	eff
1	0.8202	0.7132	1.150	0.8165	0.7217	1.131
0.1	0.2594	0.2373	1.093	0.2582	0.2292	1.127
0.01	0.08202	0.0743	1.104	0.0816	0.0708	1.153
0.001	0.0259	0.0233	1.114	0.0258	0.0223	1.157

Tabelle 6.1: Wertetabelle für verschiedene Koeffizienten a_1, a_2 .

Bemerkung 2.1 Es stellt sich die Frage, was bei vertauschten Koeffizienten $a_1 = 10, a_2 = 1$ passiert. Im ersten Fall mit Nullrandbedingungen erhalten wir für M_1 und $|||e|||$ die gleichen Zahlenwerte, da f von y unabhängig ist. Dafür zeigen u_{2d} und der Fehler ein genau spiegelbildliches Verhalten gegenüber vorhin. Das Maximum befindet sich nun über Ω_1 , und der Sprung bei ω verläuft in die andere Richtung.

Auch im zweiten Fall mit inhomogenen Randbedingungen hat das Vertauschen keinen Einfluss auf M_1 . Allerdings nimmt u_{2d} nun eine deutlich andere Form an, womit sich die Werte von $|||e|||$ verändern. Der Effektivitätsindex bleibt aber im selben Rahmen wie vorher.

2.2 Variable rechte Seite

Beispiel 1

Wählen wir als rechte Seite die einfache Funktion

$$f(y) = \sin(\pi y)$$

und homogene Randbedingungen $F_{\oplus} = F_{\ominus} = 0$, stoßen wir auf ein ähnliches Problem wie in Abschnitt 2.1: M_1 und M_2 sind zwar von gleicher Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$, aber der exakte Fehler $|||e|||$ ist von höherer Ordnung, weshalb eff unbeschränkt ansteigt.

Korrigieren kann man dieses Verhalten, indem wieder inhomogene Randbedingungen $F_{\oplus} = 1, F_{\ominus} = -1$ gewählt werden. Dann ist

$$M_1 = \mathcal{O}(d_0^{1/2}), \quad M_2 = \mathcal{O}(d_0^{3/2}), \quad eff = 1 + \mathcal{O}(d_0).$$

Beispiel 2

Etwas ausführlicher betrachten wir nun folgendes Beispiel, in dem wir die Funktion $f(x, y)$ und die Randbedingungen F_{\oplus}, F_{\ominus} aus Kapitel 4, Abschnitt 3 für $n = 2$ übernehmen:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(\pi x)(\pi^2 y^2 - 2) \\ F_{\oplus} &= \{ \pi \cdot \cos(\pi x) \cdot d_{\oplus}^2 \cdot (-\nabla d_{\oplus}) + 2 \cdot \sin(\pi x) \cdot d_{\oplus} \} \\ F_{\ominus} &= \{ \pi \cdot \cos(\pi x) \cdot d_{\ominus}^2 \cdot \nabla d_{\ominus} - 2 \cdot \sin(\pi x) \cdot d_{\ominus} \}. \end{aligned}$$

Die zweidimensionale Lösung u_{2d} wird nun nicht mehr der Funktion $u(x, y) = \sin(\pi x)y^2$ entsprechen, sondern muss numerisch berechnet werden (siehe Abbildung 6.3 und 6.4 links). Wir untersuchen auch hier, was bei einem Vertauschen der Koeffizienten a_1, a_2 geschieht.

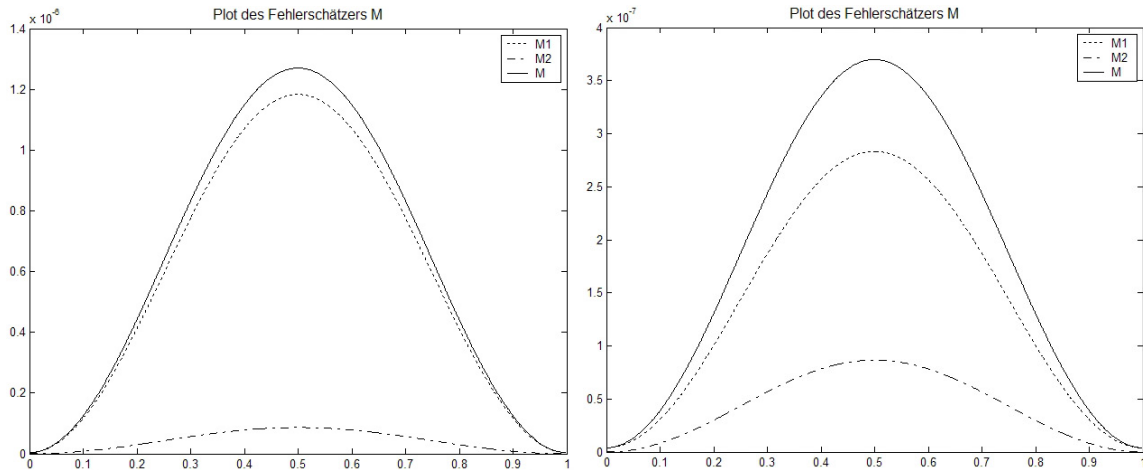


Abbildung 6.2: Lokale Verteilung von M für die verschiedenen Koeffizienten a_1, a_2 .

In Tabelle 6.2 sind die Werte aufgeführt, die wir für $a_1 = 1, a_2 = 10$ erhalten, Tabelle 6.3 enthält die Werte für $a_1 = 10, a_2 = 1$. Wir beobachten, dass die Werte von M_2 gleich bleiben, da sich die Funktionen $f(x, y)$ und $\tilde{f}(x)$ nicht verändern. M_2 ist von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{5/2})$.

Die Zahlenwerte in Tabelle 6.2 sind knapp doppelt so gross sind wie in 6.3, was auf den Einfluss der unterschiedlichen Koeffizienten a_1, a_2 zurückzuführen ist. M_1 ist in beiden Fällen von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{3/2})$ und eff konvergiert gegen 1 mit $1 + \mathcal{O}(d_0)$.

In Abbildung 6.3 und 6.4 sind links die zweidimensionalen Lösungen $u_{2d}(x, y)$ abgebildet, deutlich zu sehen sind die unterschiedlichen Ausprägungen aufgrund der Koeffizienten a_1, a_2 . Die rechte Grafik zeigt jeweils eine elementweise Verteilung des Fehlers $|\nabla(u_{2d} - u_{1d})|$. Zu beachten ist wieder den markanten Sprung an der Trennlinie ω .

In Abbildung 6.2 sind schliesslich die lokalen Verteilungen des Fehlerschätzers M zu finden. Die Differenzen sind hier aber relativ gering.

3 Zusammenfassung

Grundsätzlich hat sich die Majorante M auch für viele Probleme mit unstetigen Koeffizienten als zuverlässig und effizient erwiesen. Eine allgemeine Aussage über den Zusammenhang der Konvergenzordnungen von M_1 und M_2 , wie sie in Kapitel 4 gemacht wurde, ist aber schwieriger herzuleiten. Denn wir haben Beispiele angetroffen, in denen der Term M_1 dominierte oder zumindest von gleicher Ordnung war wie M_2 , der Effektivitätsindex aber trotzdem unbeschränkt anwuchs. In manchen Fällen kann man das Verhalten durch eine verbesserte Abschätzung mit einer Funktion $\psi_2(x, y)$ korrigieren, ein allgemeines Vorgehen ist aber nicht anzugeben.

Es wird an dieser Stelle vermutet, dass sich Beispiele mit inhomogenen Randbedingungen besser verhalten als solche mit homogenen, und eff zumindest beschränkt ist. Denn in diesen Fällen leistet in M_1 das Integral über die Funktion ψ einen wichtigen Beitrag zum Verhalten des ganzen Terms. Mit homogenen Randbedingungen wird das betreffende Integral einfach null.

Es empfiehlt sich wohl auch hier, iterativ vorzugehen: Man beginnt mit der einfachsten Funktion ψ_1 und erhöht den Polynomgrad, bis die Differenz zweier aufeinanderfolgender $|M(\psi_m) - M(\psi_{m-1})|$ klein genug wird.

d_0	M_1	M_2	M	$ e $	eff
1	0.8908	2.0807	2.9715	1.1766	2.525
0.1	0.0244	0.0066	0.0309	0.0245	1.265
0.01	$7.692e-4$	$2.081e-5$	$7.900e-4$	$7.690e-4$	1.027
0.001	$2.432e-5$	$6.579e-8$	$2.439e-5$	$2.432e-5$	1.003

Tabelle 6.2: Werte für $a_1 = 1, a_2 = 10$.

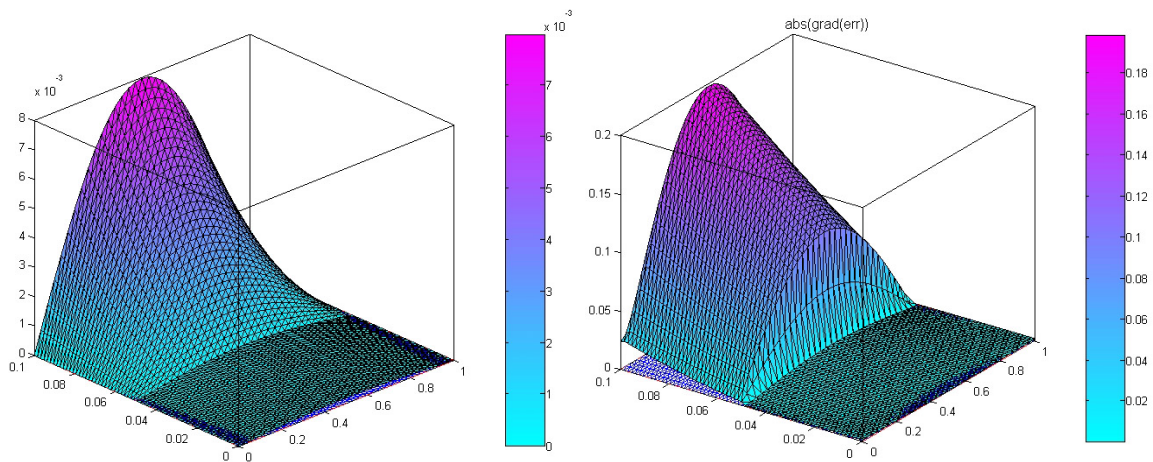


Abbildung 6.3: (Links) Plot von u_{2d} für $a_1 = 1, a_2 = 10$. (Rechts) elementweise Verteilung des Fehlers $|\nabla(u_{2d} - u_{1d})|$.

d_0	M_1	M_2	M	$ e $	eff
1	0.5861	2.0807	2.6668	0.3195	8.346
0.1	0.0120	0.0066	0.0186	0.0118	1.567
0.01	$3.764e-4$	$2.081e-5$	$3.972e-4$	$3.763e-4$	1.056
0.001	$1.190e-5$	$6.579e-8$	$1.197e-5$	$1.190e-5$	1.006

Tabelle 6.3: Werte für $a_1 = 10, a_2 = 1$.

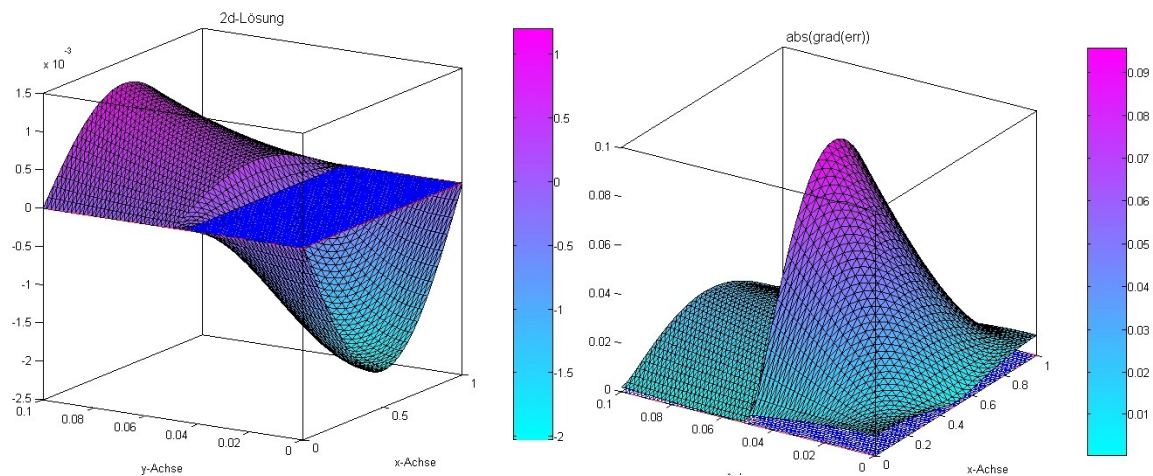


Abbildung 6.4: (Links) u_{2d} , (rechts) Verteilung von $|\nabla(u_{2d} - u_{1d})|$ für $a_1 = 10, a_2 = 1$ bei $d_0 = 0.1$.

Kapitel 7

Abschätzung des Diskretisierungsfehlers

Nachdem wir den *Modellfehler* für die Dimensionsreduktion ausführlich betrachtet haben, gehen wir nun zum *Diskretisierungsfehler* über. Jedes numerische Beispiel enthält neben dem Modellfehler implizit auch einen Diskretisierungsfehler, der bei der Diskretisierung des eindimensionalen Problems (Q) auftritt. Das Vorgehen bei der Dimensionsreduktion besteht aus zwei Schritten:

1. Das zweidimensionale Problem (P) auf Ω mit Lösung u wird auf ein eindimensionales Problem auf $\hat{\Omega}$ mit Lösung \hat{u} reduziert. Hierbei entsteht der *Modellfehler* $|||u - \hat{u}|||$.
2. Das reduzierte Problem (Q) wird diskretisiert und mit Finite-Elemente-Methoden gelöst, wir erhalten eine Lösung \hat{u}_h , die von der Schrittweite h abhängt. Hierbei entsteht der *Diskretisierungsfehler* $|||\hat{u} - \hat{u}_h|||$.

Letztendlich ist unser Ziel, den Gesamtfehler als Summe des Modellfehlers und des Diskretisierungsfehlers abschätzen zu können (mehr dazu in Kapitel 8):

$$|||u - \hat{u}_h||| \leq |||u - \hat{u}||| + |||\hat{u} - \hat{u}_h|||.$$

Bei den numerischen Beispielen zur Berechnung des Modellfehlers sind wir davon ausgegangen, dass der enthaltene Diskretisierungsfehler verhältnismässig klein ist, wenn wir das Gebiet $\hat{\Omega} = (0, 1)$ genügend fein zerlegen, z. B. in $n = 1000$ Intervalle.

In diesem Kapitel soll nun isoliert der Diskretisierungsfehler in Abhängigkeit der Anzahl Intervalle n analysiert werden. Wir betrachten rein eindimensionale Probleme, die mit einer Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ diskretisiert werden.

1 Berechnung des Diskretisierungsfehlers

Wir beginnen mit dem reduzierten Problem:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(d(x)\tilde{A}_p(x)\nabla\hat{u}) &= d(x)\hat{f}(x) && \text{auf } \hat{\Omega} = (0, 1) \\ \hat{u} &= 0 && \text{bei } x = 0, 1 \end{aligned}$$

wobei $\hat{f}(x)$ wie in Kapitel 1 definiert ist:

$$\hat{f}(x) = \tilde{f}(x) + \frac{F_{\oplus}\sqrt{1 + |\nabla d_{\oplus}|^2} + F_{\ominus}\sqrt{1 + |\nabla d_{\ominus}|^2}}{d(x)}. \quad (7.1)$$

Wir kürzen ab: $K(x) := d(x)\tilde{A}_p(x)$.

Die schwache Formulierung des reduzierten Problems lautet:

$$\int_{\hat{\Omega}} K(x) \nabla \hat{u} \cdot \nabla w \, dx = \int_{\hat{\Omega}} d(x) \hat{f}(x) w \, dx \quad \forall w \in H_0^1(\hat{\Omega}), \quad (\text{Q})$$

wobei die Lösung mit \hat{u}_h bezeichnet wird. Die *Energienorm* ist definiert durch

$$\|v\| := \left(\int_{\hat{\Omega}} K(x) \nabla v \cdot \nabla v \, dx \right)^{1/2}.$$

Ziel ist die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers durch den gleichen a posteriori Fehler-schätzer wie bisher:

$$\|\hat{u} - \hat{u}_h\|^2 \leq M^2(\hat{u}_h; y^*, \gamma) := (1 + \gamma) M_1^2 + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) C_\Omega^2 M_2^2 \quad (7.2)$$

für alle $\gamma > 0$, $\forall y^* \in H^1(\hat{\Omega})$, wobei

$$M_1^2 = \int_{\hat{\Omega}} (\nabla \hat{u}_h - K(x)^{-1} y^*) \cdot (K(x) \nabla \hat{u}_h - y^*) \, dx, \quad (7.3)$$

$$M_2^2 = \int_{\hat{\Omega}} (\operatorname{div} y^* + d(x) \hat{f}(x))^2 \, dx. \quad (7.4)$$

Wir bestimmen y^* , indem wir das quadratische Funktional $M^2(\hat{u}_h; y^*, \gamma)$ nach y^* minimieren (in [2] wurde bewiesen, dass für fixiertes $v \in V_0 + u_0$ und $\gamma > 0$ das Funktional $M^2(v; y^*, \gamma)$ stetig, konvex und koerziv auf $H(\Omega, \operatorname{div})$ ist, was die Existenz des Minimierers garantiert). Demnach muss y^* die Euler-Gleichung von $M^2(\hat{u}_h; y^*, \gamma)$ erfüllen, die geschrieben werden kann als (siehe dazu auch [2]):

$$\int_{\hat{\Omega}} K(x)^{-1} y^* \cdot z^* \, dx + \frac{1}{\gamma} C_\Omega^2 \int_{\hat{\Omega}} \operatorname{div} y^* \cdot \operatorname{div} z^* \, dx = \int_{\hat{\Omega}} \nabla \hat{u}_h \cdot z^* \, dx - \frac{1}{\gamma} C_\Omega^2 \int_{\hat{\Omega}} d(x) \hat{f}(x) \cdot \operatorname{div} z^* \, dx \quad \forall z^* \in H^1(\hat{\Omega}). \quad (7.5)$$

Wenn wir in dieser Gleichung für \hat{u}_h die errechnete Lösung des reduzierten Problems einsetzen und y^* und z^* durch stetige, stückweise lineare Funktionen (“Hutfunktionen”) approximieren, erhalten wir ein eindeutiges y^* , mit dem wir M_1 und M_2 berechnen können.

Das Vorgehen kann durch folgenden Algorithmus iteriert werden:

Algorithmus (7.1):

1. Löse das reduzierte Problem mit vorgegebener Schrittweite h , erhalte Lösung \hat{u}_h .
2. Setze $\gamma = 0.5$.
3. Löse die Eulergleichung (7.5) für y^* mit Hilfe von \hat{u}_h , γ .
4. Berechne mit y^* die Terme M_1 , M_2 aus (7.3), (7.4).
5. Setze $\gamma = \frac{C_\Omega M_2}{M_1}$ und fahre bei Punkt 3 fort.

Wie schon bei Algorithmus (5.1) reichen auch hier meist eine oder zwei Iterationen für eine gute Genauigkeit aus.

2 Numerische Beispiele

Da der Diskretisierungsfehler nur beim eindimensionalen Problem auftritt, werden hier auch nur Beispiele, die lediglich von x abhängen, betrachtet. Prinzipiell würde uns nichts daran hindern, die Experimente für verschiedene f , Gebietsgeometrien und Randbedingungen zu testen. Dieser Einfluss ist aber zweitrangig, da diese Funktionen alle in $\tilde{f}(x)$ oder $\hat{f}(x)$ eingesetzt werden und das Problem (Q) rein eindimensional ist.

Die Gebietsgeometrie spielt denn auch eine untergeordnete Rolle. Wichtiger ist die Gebietsdicke $d(x)$, die in (Q) mehrmals auftritt. Entspricht $d(x)$ einer konstanten Zahl d_0 , vereinfacht sich die Berechnung entsprechend.

Vorerst beschränken wir uns in den Beispielen auf den Fall der Poissongleichung, d. h. $A = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} = Identitätsmatrix) und $\tilde{A}_p = 1$. Für unstetige Koeffizienten können die Methoden aus Kapitel 6 verwendet werden.

2.1 Gebiete mit konstanter Dicke d_0

Beispiel 1

Zuerst betrachten wir Probleme auf dem Rechteckgebiet mit konstanter Dicke $d_0 > 0$. Als erstes Beispiel dient uns das bekannte

$$f = 2, \quad F_{\oplus} = F_{\ominus} = 0.$$

Somit ist $\hat{f}(x) = f$, und das reduzierte Problem hat die folgende Gestalt:

$$-\operatorname{div}(d_0 \nabla \hat{u}) = d_0 \cdot 2.$$

Die Funktionen $\hat{u}(x)$ und $\nabla \hat{u}(x)$ können wir analytisch sofort angeben:

$$\hat{u}(x) = -x^2 + x, \quad \nabla \hat{u}(x) = -2x + 1.$$

Das erlaubt uns, den analytischen Fehler $|||\hat{u} - \hat{u}_h|||$ direkt zu berechnen und mit der Majorante M zu vergleichen:

$$|||\hat{u} - \hat{u}_h|||^2 = \int_{\hat{\Omega}} d_0 (\nabla \hat{u} - \nabla \hat{u}_h)^2 dx.$$

Der Fehlerschätzer M wurde berechnet, indem Algorithmus (7.1) für verschiedene Schrittweiten $h = 1/n$ jeweils einmal durchlaufen wurde. In Tabelle 7.1 ist senkrecht die Anzahl n Intervalle aufgeführt, waagrecht die Majorante M , der analytische Fehler $|||\hat{u} - \hat{u}_h|||$ und $eff = \frac{M}{|||\hat{u} - \hat{u}_h|||}$. Zum Vergleich wurde einmal mit $d_0 = 1$ und einmal mit $d_0 = 0.1$ gerechnet.

Die Werte von M lassen auf ein lineares Verhalten bezüglich der Schrittweite h schließen. Halbiert man h (durch Verdoppeln der Anzahl Intervalle), reduziert sich M um den gleichen

n	$d_0 = 1$			$d_0 = 0.1$		
	M	$ \hat{u} - \hat{u}_h $	eff	M	$ \hat{u} - \hat{u}_h $	eff
10	0.0585	0.0577	1.013	0.01882	0.01826	1.031
50	0.01158	0.01155	1.003	0.00368	0.00365	1.006
100	0.00578	0.00577	1.001	0.00183	0.00182	1.003
500	0.00115	0.00115	1.000	$3.654e-4$	$3.651e-4$	1.001

Tabelle 7.1: Diskretisierungsfehler für $f = 2$ mit verschiedenen Schrittweiten $h = \frac{1}{n}$.

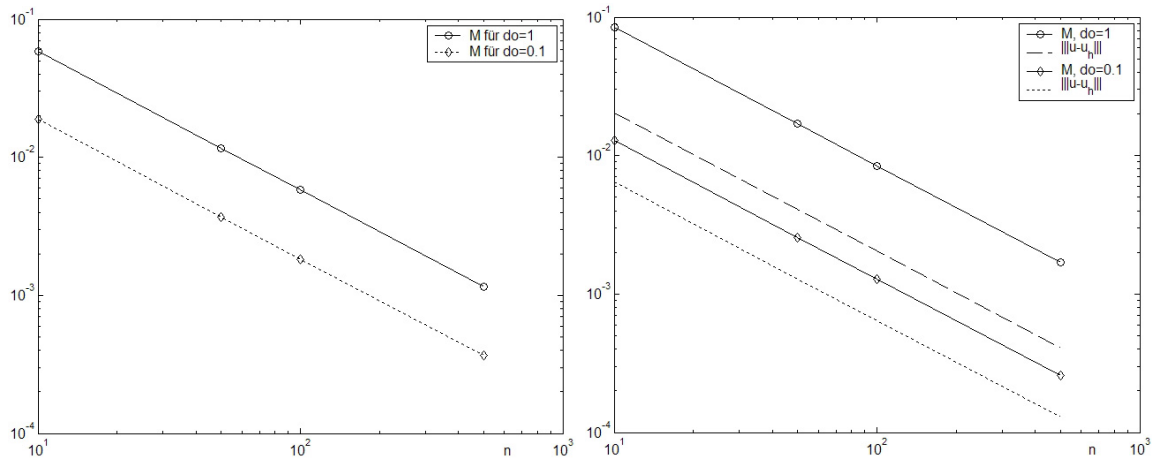


Abbildung 7.1: (Links) $f = 2$, Konvergenzrate von M . (Rechts) $f = \sin(\pi x)$, Konvergenzraten von M und dem analytischen Fehler.

Faktor. Bezüglich d_0 verhalten sich M und $|||\hat{u} - \hat{u}_h|||$ wie $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$. Im Zusammenhang mit dem Modellfehler ist das nicht unbedeutend, denn dadurch können für konkrete Beispiele der Modellfehler und der Diskretisierungsfehler miteinander verglichen werden.

Der Effektivitätsindex bewegt sich in diesem einfachen Beispiel schon für eine kleine Zahl von Intervallen nahe bei 1. Abbildung 7.1 zeigt links eine logarithmische Grafik, waagrecht die Anzahl n Intervalle, senkrecht die Werte für M . Der analytische Fehler wurde nicht eingetragen, da er sich fast exakt mit den Werten von M deckt.

Beispiel 2

Als zweites Beispiel wählen wir eine rechte Seite, die von x abhängt:

$$f(x) = \sin(\pi x),$$

wieder mit homogenen Neumann-Randbedingungen $F_{\oplus, \ominus} = 0$. Auch hier können wir auf dem Rechteckgebiet die Lösung \hat{u} direkt angeben:

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x), \quad \nabla \hat{u}(x) = \frac{1}{\pi} \cos(\pi x).$$

Der analytische Fehler $|||\hat{u} - \hat{u}_h|||$ kann wieder direkt berechnet und mit der Majorante M verglichen werden. Tabelle 7.2 zeigt die erhaltenen Resultate.

Auch hier verhalten sich M und der analytische Fehler wie $\mathcal{O}(h)$. Allerdings ist ihr Verhalten bezüglich d_0 unterschiedlich. Während $|||\hat{u} - \hat{u}_h|||$ von Ordnung $\mathcal{O}(d_0^{1/2})$ ist, erhalten wir für

n	$d_0 = 1$			$d_0 = 0.1$		
	M	$ \hat{u} - \hat{u}_h $	eff	M	$ \hat{u} - \hat{u}_h $	eff
10	0.08445	0.02038	4.143	0.01286	0.00645	1.995
50	0.0169	0.00408	4.142	0.00257	0.00129	1.9935
100	0.00845	0.00204	4.142	0.00129	$6.455e-4$	1.9935
500	0.00169	$4.082e-4$	4.122	$2.573e-4$	$1.291e-4$	1.9934

Tabelle 7.2: Diskretisierungsfehler für $f = \sin(\pi x)$ mit verschiedenen Schrittweiten h .

die Ordnung von M_1 kein eindeutiges Resultat, sie verändert sich auch für weitere d_0 , die nicht mehr in der Tabelle aufgeführt sind. Auf jeden Fall scheint M von höherer Ordnung zu sein als $|||\hat{u} - \hat{u}_h|||$, wie wir am Effektivitätsindex erkennen: Für $d_0 = 1$ bewegt sich eff um einen Wert von 4.14, für $d_0 = 0.1$ um 1.99.

Die rechte Grafik in Abbildung 7.1 zeigt die Konvergenzraten von M und dem analytischen Fehler. Beachte, dass der vertikale Abstand zwischen den Kurven von M und $|||\hat{u} - \hat{u}_h|||$ gerade dem Effektivitätsindex entspricht.

Bemerkung 2.1 Es stellt sich die Frage, warum sich eff – wie in Tabelle 7.2 – mit abnehmendem h nicht weiter verbessert. Der Grund liegt in der Berechnung der Hilfsfunktion y^* : Mit halbiertes Schrittweite verbessern sich gleichzeitig y^* und der exakte Fehler um den selben Faktor, wodurch für eff der gleiche Wert resultiert. Um eine echte Verbesserung zu erreichen, müsste die Herleitung von y^* in einem Verfahren höherer Ordnung durchgeführt werden, analog den Funktionen ψ_1 und ψ_2 in den vorhergehenden Kapiteln.

2.2 Gebiet mit variabler Dicke

Auf dem Keilgebiet, dessen Dicke nicht konstant ist, wiederholen wir das Beispiel mit rechter Seite $f = 2$ und homogenen Neumann-Randbedingungen $F_{\oplus} = F_{\ominus} = 0$.

Wie in Tabelle 7.3 ersichtlich, erhalten wir bezüglich h die gleichen Ergebnisse, nach denen sich M und $|||\hat{u} - \hat{u}_h|||$ linear verhalten, daher fassen wir uns hier kurz. Die Konvergenz bezüglich d_0 ist zwar unterschiedlich, aber da sich auch hier kein fester Wert bestimmen lässt, klammern wir diesen Aspekt vorläufig aus.

n	$d_0 = 1$			$d_0 = 0.1$		
	M	$ \hat{u} - \hat{u}_h $	eff	M	$ \hat{u} - \hat{u}_h $	eff
10	0.09031	0.05107	1.768	0.02411	0.01615	1.493
50	0.01817	0.01022	1.777	0.00486	0.00323	1.505
100	0.00900	0.00506	1.779	0.00243	0.00156	1.555
500	0.00182	0.00103	1.763	$4.873e-4$	$3.262e-4$	1.494

Tabelle 7.3: Diskretisierungsfehler für $f = 2$ auf dem Keilgebiet.

2.3 Variable rechte Seite bezüglich y

Um einen Vergleich mit viel verwendeten Beispielen aus früheren Kapiteln zu bekommen, führen wir noch einen Versuch mit der Funktion

$$f(y) = \sin(\pi y)$$

auf dem Rechteckgebiet durch. Es gilt

$$\hat{f}(x) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi d_0} (\cos(\pi d_{\ominus}) - \cos(\pi d_{\oplus})).$$

Da hier die reduzierte Lösung \hat{u} nicht direkt angegeben werden kann, verwenden wir im Ausdruck $|||\hat{u} - \hat{u}_h|||$ eine numerische Lösung, die mit $n = 2000$ berechnet wurde. Für M werden weiterhin verschiedene \hat{u}_h mit $h = \frac{1}{n}$ bestimmt.

Aus Tabelle 7.4 ist wie früher ein lineares Verhalten des Diskretisierungsfehlers bezüglich h abzulesen. Bemerkenswert ist, dass eff schon für kleine n nahe bei 1 liegt, die Majorante M also eine sehr genaue und effiziente Abschätzung liefert.

n	$d_0 = 1$			$d_0 = 0.1$		
	M	$ \hat{u} - \hat{u}_h $	eff	M	$ \hat{u} - \hat{u}_h $	eff
10	0.01863	0.01839	1.0129	0.00146	0.00142	1.030
50	0.00369	0.00368	1.0018	$2.863e-4$	$2.847e-4$	1.006
100	0.00184	0.00178	1.0324	$1.427e-4$	$1.379e-4$	1.034
500	$3.676e-4$	$3.676e-4$	1.000	$2.846e-5$	$2.850e-5$	1.000

Tabelle 7.4: Diskretisierungsfehler für $f = 2$ auf dem Keilgebiet.

3 Zusammenfassung

Die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers erfolgt über die Eulergleichung (7.5), in der die Funktion $y^* \in H^1(\hat{\Omega})$ bestimmt wird. Mit \hat{u}_h und y^* lässt sich anschliessend der a posteriori Fehlerschätzer $M^2(\hat{u}_h; y^*, \gamma)$ berechnen. Da der Diskretisierungsfehler erst beim reduzierten Problem auftritt, wurden auch hauptsächlich eindimensionale Beispiele verwendet, oder – wie im Falle von $f(y) = \sin(\pi y)$ – auf die reduzierte Form gebracht.

In allen untersuchten Beispielen ergab sich eine lineare Abhängigkeit des Diskretisierungsfehlers bezüglich der Schrittweite h , egal ob Gebiete mit konstanter oder variabler Dicke, mit konstanter oder variabler rechter Seite f vorlagen. In den meisten Fällen bewegte sich der Effektivitätsindex schon für eine kleine Zahl n nahe beim Wert 1.

Bezüglich der Gebietsdicke d_0 war das Verhalten von M schwieriger zu beurteilen. Es variierte auch zwischen dem Übergang $d_0 = 1 \rightarrow d_0 = 0.1$ und $d_0 = 0.1 \rightarrow d_0 = 0.01$. Da der Diskretisierungsfehler aber in erster Linie aus der Zerlegung von $\hat{\Omega}$ in n Teilintervalle resultiert, ist der Aspekt bezüglich d_0 eher untergeordnet.

Vergleichen wir die konkreten Zahlenwerte für den Diskretisierungsfehler mit den Werten des Modellfehlers aus den vorigen Kapiteln, stellen wir fest, dass der Diskretisierungsfehler immer eine oder mehrere Größenordnungen kleiner ist. Die Annahme, dass wir uns mit einer genügend feinen Zerlegung von $\hat{\Omega}$ auf den Modellfehler konzentrieren können, war also berechtigt.

Kapitel 8

Abschätzung des Gesamtfehlers

Nach den bisherigen Erkenntnissen versuchen wir nun, den gesamten Fehler $|||u - \hat{u}_h|||$ als Summe des Modellfehlers und des Diskretisierungsfehlers auszudrücken.

1 Herleitung

Das Vorgehen orientiert sich am Aufbau von Kapitel 1. Ziel ist eine Abschätzung der Form:

$$|||u - \hat{u}_h||| \leq |||u - \hat{u}||| + |||\hat{u} - \hat{u}_h|||. \quad (8.1)$$

Dazu wollen wir auf ähnliche Weise wie in Kapitel 1 einen a posteriori Fehlerschätzer $M^2(\hat{u}_h, \gamma)$ herleiten:

$$|||u - \hat{u}_h||| \leq M^2(\hat{u}_h, \gamma) := (1 + \gamma)M_1^2 + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) C_\Omega^2 M_2^2 \quad \forall \gamma > 0. \quad (8.2)$$

Man könnte versucht sein, die Schritte aus (1.19) – (1.27) zu wiederholen und einfach überall \hat{u} durch \hat{u}_h zu ersetzen, also

$$y^* := \tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h + \tau \quad \text{mit } \tau = \{0, \psi\}^T. \quad (8.3)$$

Das muss jedoch scheitern, da dieses y^* nicht mehr aus dem Raum $H_*(\Omega, \text{Div})$ ist und deshalb aus Formel (1.25) nicht mehr (1.26) folgt. Vielversprechender ist ein Ansatz, bei dem wir die Funktion y^* unverändert belassen, ansonsten aber die numerische Lösung \hat{u}_h verwenden:

$$y^* := \tilde{A}_p \nabla \hat{u} + \tau \quad \text{mit } \tau = \{0, \psi\}^T. \quad (8.4)$$

Vorerst beschränken wir uns auf die Wahl $\psi = \psi_1(x, y)$, woraus folgt

$$M_3 = 0, \quad M_2 = \|f - \tilde{f}\|_{L_2(\Omega)} \quad (8.5)$$

(siehe Formel 1.27). Somit bleibt M_2 gegenüber Kapitel 1 unverändert, nur der Term M_1 muss angepasst werden.

Umformen von M_1

Mit \hat{u}_h und dem neuen y^* hat M_1 nun folgende Gestalt:

$$M_1^2 := \int_{\Omega} (\nabla \hat{u}_h - A^{-1} y^*) \cdot (A \nabla \hat{u}_h - y^*) \, dy \, dx \quad (8.6)$$

$$= \int_{\Omega} A \nabla \hat{u}_h \cdot \nabla \hat{u}_h - 2(y^* \cdot \nabla \hat{u}_h) + A^{-1} y^* \cdot y^* \, dy \, dx. \quad (8.7)$$

Der erste Term in (8.7) ist direkt berechenbar und bereitet keine Schwierigkeiten. Für den zweiten Term notieren wir

$$y^* \cdot \nabla \hat{u}_h = (\tilde{A}_p \nabla \hat{u} + \tau) \cdot \nabla \hat{u}_h = \tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h \cdot \nabla \hat{u}_h + \tilde{A}_p (\nabla \hat{u} - \nabla \hat{u}_h) \cdot \nabla \hat{u}_h.$$

Wiederum ist der erste Term direkt berechenbar. Für den zweiten Term benutzen wir von jetzt an die Abkürzung

$$\nabla \hat{e}_h := \nabla \hat{u} - \nabla \hat{u}_h, \quad (8.8)$$

was gerade dem Gradienten des Diskretisierungsfehler entspricht. Zur Erinnerung: die *Energienorm* ist definiert durch

$$|||\hat{e}_h|||^2 := \int_{\hat{\Omega}} d(x) \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h \cdot \nabla \hat{e}_h \, dx.$$

Mit Bezeichnung (8.8) und der Notation $B = A^{-1}$ formen wir schliesslich noch den dritten Term aus (8.7) um:

$$\begin{aligned} A^{-1} y^* \cdot y^* &= B(\tilde{A}_p \nabla \hat{u} + \tau) \cdot (\tilde{A}_p \nabla \hat{u} + \tau) \\ &= B(\tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h + \tau + \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h) \cdot (\tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h + \tau + \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h) \\ &= B(\tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h + \tau)(\tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h + \tau) + 2(B_p \tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h + b_{21} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h \psi) \\ &\quad + B_p \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h. \end{aligned}$$

Alle Terme zusammen ergeben:

$$\begin{aligned} M_1^2 &= \int_{\Omega} A_p \nabla \hat{u}_h \cdot \nabla \hat{u}_h - 2\tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h \cdot \nabla \hat{u}_h - 2\tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h + \underbrace{B(\tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h + \tau)(\tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h + \tau)}_{(a)} \\ &\quad + 2B_p \tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h + 2(b_{21} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h) \psi + B_p \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h. \end{aligned}$$

Der Ausdruck (a) ist bereits aus Kapitel 1 bekannt, er kann umgeformt werden zu

$$(a) = B_p \tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h + b_{22} \psi^2 + 2(b_{21} \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h) \psi.$$

Zur Vereinfachung nehmen wir im folgenden an, A sei eine Diagonalmatrix, also $b_{21} = 0$, womit die betroffenen Terme wegfallen. Transformiert man alle Integrale auf $\hat{\Omega}$ und fasst so viel wie möglich zusammen, erhält man

$$\begin{aligned} M_1^2 &= \int_{\hat{\Omega}} d(x) (\tilde{B}_p \tilde{A}_p - 1) \nabla \hat{u}_h \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{u}_h \, dx &=: I_1 \\ &\quad + \int_{\Omega} b_{22} \psi(x, y)^2 \, dy \, dx &=: I_2 \\ &\quad + 2 \int_{\hat{\Omega}} d(x) (\tilde{B}_p \tilde{A}_p - 1) \nabla \hat{u}_h \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h \, dx &=: I_3 \\ &\quad + \int_{\hat{\Omega}} d(x) \tilde{B}_p \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h \, dx &=: I_4 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Am einfachsten ist der Fall der Poissongleichung mit $A = \mathbf{I}$. Dann gilt

$$M_1^2 = I_2 + |||\hat{e}_h|||^2 \quad (8.10)$$

und wir sind bereits fertig. Für allgemeinere Fälle kann weiter umgeformt werden.

Das erste Integral in (8.9) ist direkt aus der numerischen Lösung \hat{u}_h berechenbar. Die übrigen Integrale enthalten sowohl \hat{u}_h wie auch den Diskretisierungsfehler und werden noch weiter behandelt.

Für I_3 gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} I_3 &:= \int_{\hat{\Omega}} d(x) (\tilde{B}_p \tilde{A}_p - 1) \nabla \hat{u}_h \cdot \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h \\ &\leq \underbrace{\left(\int_{\hat{\Omega}} d(x) \left| (\tilde{B}_p \tilde{A}_p - 1) \nabla \hat{u}_h \right|^2 \right)^{1/2}}_{I_5} \cdot \underbrace{\left(\int_{\hat{\Omega}} d(x) \left| \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h \right|^2 \right)^{1/2}}_{(b)}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Wieder ist das erste Integral I_5 direkt berechenbar. Das zweite Integral (b) würde genau der Energienorm des Diskretisierungsfehlers entsprechen, wenn \tilde{A}_p nicht einmal zuviel auftreten würde. Wir können uns aber trotzdem behelfen, indem wir die Matrixnorm

$$\|A\|_{max} := \max_{1 \leq i, j \leq 2} |a_{ij}|$$

definieren. Dann gilt für (2×2) -Matrizen

$$|Ax| \leq 2 \|A\|_{max} \cdot |x|, \quad (8.12)$$

wenn $|\cdot|$ die euklidische Vektornorm bezeichnet.

Jetzt können wir (b) nach oben abschätzen durch

$$\begin{aligned} (b) &\leq \left(\int_{\hat{\Omega}} d(x) 4 \left\| \tilde{A}_p^{1/2} \right\|_{max}^2 \cdot \left| \tilde{A}_p^{1/2} \nabla \hat{e}_h \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \left\| \tilde{A}_p^{1/2} \right\|_{max} \left(\int_{\hat{\Omega}} d(x) \left| \tilde{A}_p^{1/2} \nabla \hat{e}_h \right|^2 \right)^{1/2} \\ &= 2 \left\| \tilde{A}_p^{1/2} \right\|_{max} |||\hat{e}_h|||, \end{aligned}$$

also

$$I_3 \leq I_5 \cdot 2 \left\| \tilde{A}_p^{1/2} \right\|_{max} |||\hat{e}_h|||. \quad (8.13)$$

Somit haben wir I_3 vollständig zurückgeführt auf direkt berechenbare Terme und den Diskretisierungsfehler in der Energienorm. Für I_4 kann man nun analog vorgehen, nur muss die Abschätzung mittels Matrixnorm einmal wiederholt werden.

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\hat{\Omega}} d(x) \left| \tilde{B}_p^{1/2} \tilde{A}_p \nabla \hat{e}_h \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\hat{\Omega}} d(x) 16 \left\| \tilde{B}_p^{1/2} \right\|_{max}^2 \left\| \tilde{A}_p^{1/2} \right\|_{max}^2 \cdot \left| \tilde{A}_p^{1/2} \nabla \hat{e}_h \right|^2 dx \\ &= 16 \left\| \tilde{B}_p^{1/2} \right\|_{max}^2 \left\| \tilde{A}_p^{1/2} \right\|_{max}^2 |||\hat{e}_h|||^2. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Insgesamt hat damit M_1 die Form

$$M_1^2 \leq I_1 + I_2 + c_1 |||\hat{e}_h||| + c_2 |||\hat{e}_h|||^2 \quad (8.15)$$

mit

$$c_1 := I_5 \cdot 2 \left\| \tilde{A}_p^{1/2} \right\|_{max} \quad \text{mit } I_5 \text{ wie aus (8.11),} \quad (8.16)$$

$$c_2 := 16 \left\| \tilde{B}_p^{1/2} \right\|_{max}^2 \left\| \tilde{A}_p^{1/2} \right\|_{max}^2. \quad (8.17)$$

Als letztes bleibt I_2 übrig, das von der Funktion ψ abhängt und damit anders geartet ist als I_3 und I_4 . Wir führen als einfaches Beispiel den Fall einer ebenen Platte mit parallelen Ober- und Unterseiten an. Dann gilt

$$d_{\oplus} = \frac{d_0}{2}, \quad d_{\ominus} = -\frac{d_0}{2} \quad (d_0 = const > 0)$$

und ψ_1 nimmt eine sehr einfache Form an:

$$\psi_1(x, y) = \frac{F_{\oplus} + F_{\ominus}}{d_0} y + \frac{F_{\oplus} - F_{\ominus}}{2}. \quad (8.18)$$

Dies ist direkt aus der Problemstellung berechenbar und hängt nicht mit dem Diskretisierungsfehler zusammen.

Aus Platzgründen wird hier auf aufwändigere Problemstellungen nicht mehr eingegangen. Das prinzipielle Vorgehen bleibt jedoch gleich: Man zerlegt I_1 in Terme, die entweder direkt berechenbar sind oder auf die Energienorm des Diskretisierungsfehlers zurückgeführt werden können.

Für die ganze Abschätzung ergibt sich

$$\begin{aligned} |||u - \hat{u}_h||| &\leq M_1 + C_{\Omega} M_2 \\ &\leq I_1 + I_2 + c_1 |||\hat{e}_h||| + c_2 |||\hat{e}_h|||^2 + C_{\Omega} M_2 \end{aligned} \quad (8.19)$$

mit c_1, c_2 wie in (8.16) und (8.17) definiert.

Bemerkung 1.1 Setzt man in (8.19) $|||\hat{e}_h||| = 0$ ein, so erhält man exakt die Formel für den Modellfehler, wie sie in Kapitel 1 hergeleitet wurde. Damit ist (8.19) eine echte Erweiterung gegenüber (1.35), weil sie ausser dem Modellfehler auch den Diskretisierungsfehler enthält und eine direkte Abschätzung des Gesamtfehlers liefert.

Kapitel 9

Schlussfolgerungen

Durch analytische Untersuchung und anhand vieler Beispiele haben wir verschiedene Eigenschaften des präsentierten a posteriori Fehlerschätzers kennen gelernt. Grundsätzlich bot die Majorante $M := M_1 + C_\Omega M_2$ folgende Vorteile:

- Garantierte obere Schranke.
- Mit geringem Aufwand berechenbar, da nur das reduzierte Problem gelöst werden muss. Zusätzlich lieferten sehr viele Beispiele bereits mit der einfachsten Funktion ψ_1 gute Ergebnisse.
- Gute Qualität. Die Majorante ist für viele Fälle asymptotisch exakt, der Effektivitätsindex verhält sich für $d_0 \rightarrow 0$ wie $1 + \mathcal{O}(d_0)$. In anderen Beispielen stabilisierte sich eff bei einem Wert nahe bei 1.
- Stabilität. Auch für kleine d_0 auf komplizierten Gebieten liefert M gute Ergebnisse, wo Standardlöser wie z. B. Matlab zu ungenau sind.
- Flexibel erweiterbar. In Fällen, in denen ψ_1 nicht ausreichte, liess sich die Abschätzung einfach verbessern durch eine Erweiterung mit der Funktion ψ_2 .
- Liefert auch lokale Fehlerverteilungen. Die Terme M_1 und M_2 können lokal für Teilintervalle von $\hat{\Omega}$ berechnet werden.
- Der Aufbau ermöglicht a priori Aussagen über das Verhalten. Setzt man die aus der Problemstellung gegebenen Funktionen in M_1 und M_2 ein, kann man bereits a priori Aussagen über das Verhalten der Terme bezüglich d_0 machen. Das ermöglicht auch eine Beurteilung, ob die Funktion ψ_1 ausreichen wird oder ob eine Funktion ψ höherer Ordnung verwendet werden muss.

Wir haben die Majorante mit gutem Erfolg für den Modellfehler wie auch für den Diskretisierungsfehler verwendet. Aufgrund dieser Vorteile empfiehlt es sich, die Majorante M zur a posteriori Fehlerkontrolle zu verwenden, da sie eine sehr zuverlässige und effiziente Abschätzung liefert, die zudem noch mit wenig Aufwand berechenbar ist.

Literaturverzeichnis

- [1] S. Repin, S. Sauter, A. Smolianski (2004): *A Posteriori Estimation of Dimension Reduction Errors for Elliptic Problems on Thin Domains*. SIAM J. Numer. Anal., **42**, pp. 1435-1451.
- [2] S. Repin, S. Sauter, A. Smolianski (2003): *A Posteriori Error Estimation for the Dirichlet Problem with Account of the Error in the Approximation of Boundary Conditions*. Computing, **70**, pp. 205-233.
- [3] M. Ainsworth, T. Oden: *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Wiley, 2000.
- [4] I. Babuška, T. Stroubulis: *The finite element method and its reliability*. Oxford University Press, 2001.
- [5] R. Verfürth: *A review of a posteriori error estimation and adaptiv mesh-refinement techniques*. Wiley, 1996.
- [6] M. Ainsworth (1998): *A posteriori error estimation for fully discrete hierarchic models of elliptic boundary value problems on thin domains*. Numer. Math., **80**, pp. 325-362.
- [7] I. Babuška, I. Lee, C. Schwab (1994): *On the a posteriori estimation of the modeling error for the heat conduction in a plate and its use for adaptive hierarchical modeling*. Appl. Numer. Math., **14**, pp. 5-21.
- [8] I. Babuška, C. Schwab (1996): *A posteriori error estimation for hierarchic models of elliptic boundary value problems on thin domains*. SIAM J. Numer. Anal., **33**, pp. 221-246.
- [9] M. Vogelius, I. Babuška (1981): *On a dimensional reduction method I. The optimal selection of basis functions*. Math. Comp., **37**, pp. 31-46.
- [10] M. Vogelius, I. Babuška (1981): *On a dimensional reduction method III. A posteriori error estimation and an adaptive approach*. Math. Comp., **37**, pp. 361-384.