Ungleichungen II

Thomas Huber

Aktualisiert: 5. Januar 2016
vers. 1.1.0

Inhaltsverzeichnis

1 Symmetrische polynomiale Ungleichungen

1.1 Bunching

Eine ganz wichtige Klasse von Ungleichungen sind symmetrische, homogene, polynomiale Ungleichungen. Sie treten ganz natürlich auf, entweder als Aufgabe an sich, oder nach Anwendung von CS oder dergleichen. In den bisherigen Beispielen haben wir solche Ungleichungen immer mit AM-GM gelöst, vgl. Beispiel 3, 11, 21 oder Lösungen 2, 3 in Beispiel I aus Ungleichungen I (die entsprechenden Ungleichungen in Beispiel 8 und 20 sind lediglich zyklisch symmetrisch). Es kommt dabei darauf an, die Exponenten auf beiden Seiten zu vergleichen und dann die Terme richtig zu gruppieren. Dabei ist auffällig, dass diejenige Seite, wo die Exponenten gleichmässiger verteilt sind, stets kleiner ist als die Seite mit grossen Potenzen. Das ist ein allgemeines Phänomen. Reine Potenzen sind grösser als gemischte Terme.
Wir werden nun ein allgemeines Verfahren vorstellen, das uns in Zukunft die mühsame Anwendung von AM-GM in solchen Situationen erspart. Dazu führen wir erst eine Notation ein, die es erlaubt, alles kompakt hinzuschreiben. Als Illustration beschränken wir uns auf den Fall von drei Variablen, mehr braucht man eigentlich nie. Enthält ein symmetrischer Ausdruck in den Variablen x, y, z zum Beispiel den Term x^2y, dann muss er auch die Terme $x^2z, y^2x, y^2z, z^2x, z^2y$ enthalten, und zwar gleich oft. Man kann diese 6 Summanden dann zu einer sogenannten *symmetrischen Summe* $\sum_{sym} x^2y$ zusammenfassen. Diese Notation bedeutet also, dass man den gegebenen Ausdruck sowie die fünf Ausdrücke, die man durch Permutation der Variablen erhält, aufsummiert. Eine symmetrische Summe (in drei Variablen) enthält für jeden Term also $3! = 6$ Summanden. Wir geben weitere Beispiele:

$$\sum_{sym} x^4y^3z = x^4y^3z + x^4z^3y + y^4x^3z + y^4z^3x + z^4x^3y + z^4y^3x$$

$$\sum_{sym} xy = xy + xz + yx + yz + zx + zy = 2(xy + yz + zx)$$

$$\sum_{sym} x^2yz = 2(x^2yz + y^2xz + z^2xy)$$

$$\sum_{sym} xyz = 6xyz$$

Analog definiert man symmetrische Summen in n Variablen. Diese enthalten dann für jeden Term $n!$ Summanden. Allein daran sieht man schon, dass dies höchstens bis $n = 4$ ein handliches Instrument ist. Wir formulieren das Hauptresultat trotzdem in voller Allgemeinheit, weil dies auch von theoretischem Interesse ist. Es geht um symmetrische

Ausdrücke in Monomen der Form $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ mit ganzen Exponenten $a_k \geq 0$. Ein solcher Ausdruck ist allein durch die Folge der Exponenten $(a_1,\ldots,a_n)$ bestimmt. Seien $a=(a_1,\ldots,a_n)$ und $b=(b_1,\ldots,b_n)$ zwei solche Folgen mit $a_1\geq\ldots\geq a_n$ und $b_1\geq\ldots\geq b_n$. Man sagt, dass die Folge a die Folge b *majorisiert*, wenn folgende Bedingungen gelten:

(a) $a_1+\ldots+a_k \geq b_1+\ldots+b_k$ für $1\leq k\leq n-1$,

(b) $a_1+\ldots+a_n = b_1+\ldots+b_n$.

Man schreibt dafür $a \succ b$. Beachte: zwei Folgen kann man also nur dann vergleichen, wenn sie beide monoton fallend sind, gleich viele Folgeglieder haben und auch die Summe der Folgeglieder dieselbe ist (dies entspricht dann Monomen vom gleichen Grad). Nun zur Hauptsache:

Satz 1.1 (Bunching). *Sei n eine natürliche Zahl und seien $a=(a_1,\ldots,a_n)$ und $b=(b_1,\ldots,b_n)$ zwei Folgen nichtnegativer ganzer Zahlen (was ist mit reellen Zahlen?), sodass $a\succ b$. Dann gilt für alle $x_1,\ldots,x_n>0$ die Ungleichung*

$$\sum_{sym} x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_n^{b_n}.$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn die Folgen a und b identisch sind oder wenn alle x_k gleich sind.

Zum Beispiel gilt $(2,0,0)\succ(1,1,0)$ und daher

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca.$$

Oder $(3,1,0)\succ(2,1,1)$ und daher

$$x^3y+x^3z+y^3x+y^3z+z^3x+z^3y\geq 2(x^2yz+y^2zx+z^2xy).$$

Als richtige Anwendung folgt nun ein schwierigeres Beispiel:

Beispiel 1 (USA 97). *Beweise für $a,b,c>0$ die folgende Ungleichung:*

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

Lösung. Multipliziert man alle Nenner hoch und verdoppelt das Ergebnis, dann folgt

$$\sum_{sym}(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)abc \leq \sum_{sym} 2(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)(c^3+a^3+abc).$$

Ausmultiplizieren und vereinfachen ergibt

$$\sum_{sym} a^7bc+3a^4b^4c+4a^5b^2c^2+a^3b^3c^3 \leq \sum_{sym} a^3b^3c^3+2a^6b^3+3a^4b^4c+2a^5b^2c^2+a^7bc$$

und nach Subtrahieren gleicher Terme schliesslich

$$\sum_{sym} a^6b^3 \geq \sum_{sym} a^5b^2c^2.$$

Dies folgt unmittelbar mit Bunching, denn es gilt $(6,3,0) \succ (5,2,2)$. $\square$

Bereits an diesem sehr moderaten Beispiel sieht man, dass es einiges zu rechnen gibt. Die Chance, Fehler zu begehen, ist daher relativ gross und man sollte einige Übung im Umgang mit diesen symmetrischen Summen haben, um Rechenfehler zu vermeiden. Aber davon abgesehen, ist die Methode fast idiotensicher. Und es lässt sich wirklich fast jede Ungleichung in obigem Stil mit Bunching lösen. Man sollte einfach abwägen, ob sich der Aufwand überhaupt lohnt, oder ob es nicht eine viel kürzere Lösung gibt. Ausserdem sind Bunching-Lösungen extrem unästhetisch und nicht wirklich im Stile der IMO-Kultur. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Brute Force Methoden. Es kommt mir manchmal so vor, als wolle man eine Nuss mit Hilfe einer Atombombe knacken. Jetzt kommt eine wirklich schöne Lösung für Beispiel 24:

2. Lösung. Es gilt nach AM-GM oder Bunching $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$. Damit folgt

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{ab(a+b)+abc} = \frac{1}{abc} \cdot \frac{c}{a+b+c}.$$

Addiert man diese und die beiden analogen Ungleichungen, dann folgt, dass die linke Seite nicht grösser ist als

$$\frac{1}{abc} \cdot \left(\frac{a}{a+b+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} \right) = \frac{1}{abc}.$$

$\square$

Nicht immer ist Bunching allein genügend, um eine Ungleichung zu beweisen. Als ganz wichtige Ergänzung kommt die Ungleichung von Schur ins Spiel. Wir wiederholen sie kurz:

Satz 1.2 (Schur). *Für jedes $p > 0$ und alle $x, y, z \geq 0$ gilt*

$$x^p(x-y)(x-z) + y^p(y-z)(y-x) + z^p(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $x = y = z$ oder wenn zwei der drei Variablen gleich sind, und die dritte 0.

In der symmetrischen Summenschreibweise lautet Schur

$$\sum_{sym} x^{p+2} - 2x^{p+1}y + x^pyz \geq 0.$$

Besonders wichtig ist der Fall $p = 1$, also $\sum_{sym} x^3 - 2x^2y + xyz \geq 0$. Diese Ungleichung lässt sich nicht mit Bunching beweisen, denn es gilt zwar $(p+2,0,0) \succ (p+1,1,0)$, aber eben auch $(p+1,1,0) \succ (p,1,1)$. Eine typische Brute Force Lösung mit Bunching und Schur geben wir im folgenden Beispiel, der berühmt-berüchtigten 'Iran 96', die allen anderen Angriffen trotzig widersteht.

Beispiel 2 (Iran 96)**.** *Beweise für alle positiven reellen Zahlen x, y, z:*

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

Lösung. Multipliziert man alles mit dem Hauptnenner und expandiert die Produkte, dann folgt nach erheblicher Mühe schliesslich die äquivalente Ungleichung

$$\sum_{sym} 4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3 + x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2 \geq 0.$$

Das Problem ist der Term $x^2y^2z^2$ mit *positivem* Koeffizienten. Dieser lässt sich nicht mit Bunching verwursten. Wir verwenden daher Schur. Multipliziere Schur (mit $p=1$) mit xyz:

$$\sum_{sym} x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2 \geq 0.$$

Ein Vergleich mit obiger Ungleichung zeigt, dass wir also noch Folgendes beweisen müssen:

$$\sum_{sym} 4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3 \geq 0.$$

Dies folgt nun aus Bunching alleine, denn

$$\begin{aligned} (5,1,0) \succ (4,2,0) \quad &\Rightarrow \quad \sum_{sym} x^5y - x^4y^2 \geq 0, \\ (5,1,0) \succ (3,3,0) \quad &\Rightarrow \quad \sum_{sym} 3x^5y - 3x^3y^3 \geq 0. \end{aligned}$$

Aufsummieren ergibt das Gewünschte. □

Die Frage ist nun berechtigt, ob man *jede* gültige homogene symmetrische polynomiale Ungleichung mit Bunching und Schur beweisen kann. Dies scheint nicht der Fall zu sein. Betrachte folgende (richtige!) Ungleichung:

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2 \geq 0.$$

Expandiert man die linke Seite, ist sie äquivalent zu

$$\sum_{sym} a^4 - 4a^3b + 3a^2b^2 \geq 0.$$

Der Leser überzeuge sich selbst davon, dass weder Schur mit $p=1$, multipliziert mit $a+b+c$, noch Schur mit $p=2$ oder sonst irgendeinem $p \geq 2$ genügt, um den Term

$-4a^3b$ zu kompensieren. Dies ist zwar kein formaler Beweis, aber ein starkes Indiz dafür, dass man nicht immer so durchkommt. Dennoch funktioniert Bunching in den meisten konkreten Anwendungsfällen.

Zum Schluss noch kurz ein Wort zur Homogenität. Es ist wirklich entscheidend, dass die Ungleichung homogen ist, um Bunching anwenden zu können. Daher müssen inhomogene Ungleichungen mit Nebenbedingungen erst homogenisiert werden. Dies führt oft zu fürchterlich komplizierten Exponenten. Man ist dann gut beraten, wenn man die Ungleichung erst etwas handlicher macht, zum Beispiel mit Substitution.

1.2 Die elementarsymmetrischen Polynome

Eine weitere Methode, symmetrische Ungleichungen zu lösen, besteht in der Einführung der elementarsymmetrischen Polynome. Wie wir gesehen haben, lässt sich Bunching nur auf homogene Ungleichungen anwenden. Wenn nun die gegebene Ungleichung aber entweder inhomogen oder mit äussert unhandlichen Nebenbedingungen ausgestattet ist, ist die hier vorgestellte Methode oft besser.

Wir betrachten n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und definieren für $1 \leq k \leq n$ das k-te *elementarsymmetrische Polynom* in den x_i's durch

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}.$$

Um die nachfolgenden Formeln übersichtlicher hinschreiben zu können, setzen wir ausserdem $d_k = s_k / \binom{n}{k}$. Beachte, dass die Anzahl Summanden in s_k gerade $\binom{n}{k}$ ist, und dass die d_k's daher eine Art arithmetische Mittel sind. Wir setzen ausserdem $s_0 = d_0 = 1$. Ein konkretes und wichtiges Beispiel, der Fall $n = 3$: Mit den Variablen x, y, z, also

$$u = s_1 = x + y + z, \quad v = s_2 = xy + yz + zx, \quad w = s_3 = xyz,$$

sowie $d_1 = \frac{u}{3}$, $d_2 = \frac{v}{3}$ und $d_3 = w$. Die Bezeichnungen u, v, w sind in diesem Fall üblich. Bekanntlich lässt sich jedes symmetrische Polynom in $x_1, \ldots, x_n$ auf eindeutige Weise schreiben als Polynom in $s_1, \ldots, s_n$ und daher auch in eindeutiger Weise als Polynom in $d_1, \ldots, d_n$. Es ist deshalb nützlich, einige Ungleichungen für diese Grössen zu kennen. Die beiden wichtigsten sind die Folgenden:

Satz 1.3 (MacLaurin, Newton). *Für positive $x_1, \ldots, x_n$ gilt*

a) $d_1 \geq d_2^{1/2} \geq \ldots \geq d_n^{1/n}$

b) $d_k^2 \geq d_{k-1} d_{k+1}$ *für* $1 \leq k \leq n-1$.

Gleichheit gilt in jeder dieser Ungleichungen genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_n$ ist.

Beide Ungleichungen zeigen wieder das grundlegende Prinzip, dass reine Terme grösser sind als gemischte, genau wie in Bunching. Als nächstes setzen wir die Ungleichung von

Schur (mit $p = 1$) in diesen Kontext. Eine kurze Rechnung zeigt, dass diese äquivalent ist zu

$$u^3 + 9w \geq 4uv, \quad \text{beziehungsweise} \quad 3d_1^3 + d_3 \geq 4d_1d_2.$$

Als letztes theoretisches Resultat vor den Beispielen folgt nun noch eine überraschende Tatsache, die auch in den Beweisen von MacLaurin und Newton mittels Induktion nach n eine entscheidende Rolle spielt.

Satz 1.4. *Seien $d_1, \ldots, d_n$ die gewichteten elementarsymmetrischen Polynome in den n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ wie oben, und seien $d'_1, \ldots, d'_{n+1}$ die entsprechenden Ausdrücke in den $n+1$ Variablen $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Sei f eine beliebige reelle Funktion. Gilt nun die Ungleichung*

$$f(d_1, \ldots, d_n) \geq 0$$

für alle reellen (positiven) $x_1, \ldots, x_n$, dann gilt auch die Ungleichung

$$f(d'_1, \ldots, d'_n) \geq 0$$

für alle reellen (positiven) $x_1, \ldots, x_{n+1}$.

Als Anwendung betrachten wir nochmals Schur: Die Ungleichung $d_1^3 + d_3 \geq 4d_1d_2$ gilt für drei Variablen $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Folglich gilt sie allgemein für beliebige n nichtnegative reelle Zahlen. Bereits das ist gar nicht offensichtlich. Wir geben nun konkrete Beispiele.

Beispiel 3 (Vietnam 96)**.** *Seien a, b, c, d vier nichtnegative reelle Zahlen, für die gilt*

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + bcd + cda + dab = 16.$$

Beweise die Ungleichung

$$a + b + c + d \geq \frac{2}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd),$$

und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen steht.

Lösung. Man könnte versuchen, die Ungleichung mit Hilfe der Nebenbedingung zu homogenisieren und dann mit Bunching zu lösen. Da die Nebenbedingung aber auch sehr inhomogen ist, dürfte dies zu äusserst komplizierten Ausdrücken führen. Wir gehen einen anderen Weg, indem wir alles in den gewichteten elementarsymmetrischen Polynomen ausdrücken. Wir müssen zeigen, dass gilt

$$3d_2 + d_3 = 4 \quad \Longrightarrow \quad d_1 \geq d_2.$$

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $3d_2 + d_3 = 4$ und $d_1 \leq d_2$ gilt. Wie bereits erwähnt, gilt die Ungleichung von Schur in der folgenden Form:

$$3d_1^3 + d_3 \geq 4d_1d_2.$$

Substituiert man hier $d_3 = 4 - 3d_2$, dann folgt $3d_1^3 + 4 \geq (4d_1 + 3)d_2$. Nach Voraussetzung gilt $d_1 \leq d_2$, daher ist die rechte Seite mindestens $4d_1^2 + 3d_1$. Dies liefert nach Faktorisieren die Ungleichung

$$(3d_1 - 4)(d_1^2 - 1) \geq 0.$$

Nun ist aber einerseits $3d_1 - 4 \leq 3d_2 - 4 = -d_3 \leq 0$, andererseit gilt nach MacLaurin $d_1^2 \geq d_2 \geq d_1$, also $d_1 \geq 1$. Insgesamt ergibt das

$$(3d_1 - 4)(d_1^2 - 1) \leq 0.$$

Dies führt zu einem Widerspruch, ausser es gilt $(3d_1 - 4)(d_1^2 - 1) = 0$. Verfolgt man die Argumentation, dann kann dies nur dann möglich sein, wenn $d_3 = 0$ ist, oder Gleichheit in MacLaurin gilt sowie $d_1 = d_2 = 1$. Ersteres führt aber auf $a = b = c = d = 0$, was wegen $3d_2 + d_3 = 4$ nicht möglich ist. Gleichheit gilt also nur für $a = b = c = d = 1$. □

Wir geben noch eine prachtvolle Lösung der Ungleichung von der IMO 01, welche die hier besprochenen Methoden verwendet. Es handelt sich um eine homogene, symmetrische, aber nicht polynomiale Ungleichung. Mit Hilfe von geeigneten Substitutionen lässt sie sich aber auf die hier benötigte Form bringen. Es braucht schon einigen Mut, einen solchen Ansatz durchzuziehen, aber hier funktioniert es perfekt:

Beispiel 4 (IMO 01). *Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise die Ungleichung*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Lösung. Es gilt

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8bc}{a^2}}}.$$

Mit der Substitution $r = \frac{8ab}{c^2}$, $s = \frac{8bc}{a^2}$, $t = \frac{8ca}{b^2}$ gilt $rst = 8^3 = 512$ und wir müssen die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1 + r}} + \frac{1}{\sqrt{1 + s}} + \frac{1}{\sqrt{1 + t}} \geq 1$$

beweisen. Um die Wurzeln zu entfernen, substituieren wir nochmals $x = \sqrt{1 + r}$, $y = \sqrt{1 + s}$, $z = \sqrt{1 + t}$. Die Nebenbedingung wird zu $(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1) = 512$, und die zu beweisende Ungleichung lautet nun

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 1.$$

Wir drücken nun alles in den elementarsymmetrischen Polynomen aus, eine kleine Rechnung ergibt $(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1) = s_3^2 + 2s_3s_1 - s_2^2 + s_1^2 - 2s_2 - 1$. Die Ungleichung lautet $s_2 \geq s_3$. Wie im letzten Beispiel führen wir einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an, dass $s_3^2 + 2s_3s_1 - s_2^2 + s_1^2 - 2s_2 - 1 = 512$ und $s_2 \leq s_3$ gilt. Das Wunder ist nun, dass sich die linke Seite der Nebenbedingung als Differenz zweiter Quadrate faktorisieren lässt:

$$(s_3 + s_2 + s_1 + 1)(s_3 - s_2 + s_1 - 1) = 512$$

Wir schätzen die beiden Faktoren nun einzeln ab. Nach MacLaurin (oder AM-GM) und nach Annahme gilt $s_3 \geq s_2 \geq 3s_3^{2/3}$, also $s_3 \geq 27$. Nach MacLaurin ergibt sich daraus weiter $s_2 \geq 27$ und $s_1 \geq 9$. Der erste Faktor von der obigen Gleichung ist also mindestens gleich $27+26+9+1 = 64$. Für den zweiten Faktor erhalten wir ähnlich $s_3 - s_2 + s_1 - 1 \geq s_1 - 1 \geq 8$. Insgesamt also

$$(s_3 + s_2 + s_1 + 1)(s_3 - s_2 + s_1 - 1) \geq 64 \cdot 8 = 512.$$

Es muss also in allen Abschätzungen das Gleichheitszeichen gelten, sonst erhalten wir einen Widerspruch. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn $x = y = z$ ist. Daraus folgt wiederum $r = s = t$ und schliesslich $a = b = c$. Insgesamt haben wir also bewiesen, dass die ursprüngliche Ungleichung richtig ist, mit Gleichheit genau dann, wenn $a = b = c$. □

2 Konvexität

2.1 Konvexe Funktionen

In diesem Abschnitt besprechen wir den Begriff der Konvexität einer reellen Funktion in einer Variablen. Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall, also zum Beispiel $[0, 1]$ oder $]0, \infty[$ oder $\mathbb{R}$ selbst. Wir geben direkt die Definition von Konvexität, welche recht abstrakt ist. Anschliessend diskutieren wir die geometrische Bedeutung.

Definition 2.1. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heisst *konvex*, falls für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Die Funktion f heisst *konkav*, falls obige Ungleichung mit umgekehrtem Ungleichheitszeichen gilt. Man nennt f *streng konvex* (respektive *streng konkav*), falls zudem stets das strikte Ungleichheitszeichen steht für $\lambda \in]0, 1[$.

Intuitiv bedeutet das Folgendes. Wenn der reelle Parameter λ Werte von 0 bis 1 durchläuft, dann beschreibt der Ausdruck $s(\lambda) = (1-\lambda)a + \lambda b$ eine Parametrisierung des Intervalls $[a, b]$ der reellen Achse. Der Punkt des Graphen von f, welcher über dem Punkt $s(\lambda)$ liegt, hat die y-Koordinate $f((1-\lambda)a + \lambda b)$. Wir betrachten nun die Strecke in der xy-Ebene, welche die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ miteinander verbindet, die sogenannte Sekante an den Graphen zu den Stellen a und b. Die y-Koordinate des Punktes auf dieser Sekante über $s(\lambda)$ ist gleich $(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$, wie man leicht nachrechnet. Die Ungleichung in obiger Definition von Konvexität besagt also, dass der Graph der Funktion f zwischen a und b *unter* oder auf der entsprechenden Sekante verläuft. Nie jedoch darüber. Da dies für alle $a, b \in I$ gilt, kann man daraus schliessen, dass der Graph von f nach oben gekrümmt ist. Stellt man sich vor, dass man mit einem Fahrrad dem Verlauf des Graphen von links nach rechts folgt, muss man also stets eine Linkskurve fahren. Analog sind konkave Funktionen nach unten gekrümmt. Ist f nun streng konvex, dann verläuft der Graph von f stets *strikt* unter allen Sekanten. Man sollte sich zur Übung mal Folgendes überlegen:

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ konvex und gibt es $a, b \in I$ und ein $0 < \lambda < 1$, sodass das Gleichheitszeichen steht in obiger Definition, dann ist f auf $[a, b]$ linear.

Konkrete Beispiele von konvexen Funktionen:

1. Jede lineare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall I ist konvex und konkav. Aber nie streng konvex oder streng konkav.

2. $f(x) = x^2$ ist konvex auf ganz $\mathbb{R}$. Allgemein ist für jede positive gerade ganze Zahl n die Funktion $f(x) = x^n$ streng konvex auf ganz $\mathbb{R}$. Für jede positive ungerade Zahl n dagegen ist $f(x) = x^n$ streng konvex auf $[0, \infty[$ und streng konkav auf $]-\infty, 0]$.

3. Sind f und g konvex auf I, dann auch $f+g$. Ist $a > 0$ eine beliebige Konstante, dann ist auch $a \cdot f$ konvex auf I. Aus 2. folgt damit, dass jedes Polynom mit positiven Koeffizienten konvex ist auf $[0, \infty[$.

4. Die Exponentialfunktion ist konvex auf $\mathbb{R}$, die Logarithmusfunktion ist konkav auf $]0, \infty[$. Diese Beispiele werden später ganz wichtig sein.

5. Der Absolutbetrag $f(x) = |x|$ ist konvex auf $\mathbb{R}$, aber nicht strikt konvex.

6. Eine Funktion f ist genau dann konvex, wenn $-f$ konkav ist.

Konvexe Funktionen sind relativ schön, das heisst, sie besitzen automatisch gewisse Regularitätseigenschaften. Sie sind zum Beispiel automatisch stetig (das ist nicht ganz einfach zu sehen). Wichtiger als das ist aber die Frage, wie man konkret nachweist, dass eine Funktion auf einem bestimmten Intervall konvex ist. Das Kriterium schlechthin ist folgendes:

Satz 2.1. *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, dann ist f genau dann konvex (konkav), wenn für die zweite Ableitung gilt $f(x) \geq 0$ (≤ 0) für alle $x \in I$. Zusätzlich ist f genau dann strikt konvex (konkav), wenn diese zweite Ableitung auf keinem Teilintervall positiver Länge identisch verschwindet.*

Obwohl hier Ableitungen auftauchen, und das Kriterium eigentlich zur Analysis gehört, ist es doch das einzig richtige. An der IMO wird die Anwendung dieses Kriteriums akzeptiert, sofern man auch begründet, wieso die Funktion f tatsächlich zweimal differenzierbar ist. Für uns genügt es aber, die von der Schule her bekannten Regeln für das Differenzieren zu verwenden, die uns für uns interessanten Funktionen werden immer genügend oft differenzierbar sein. Es gibt aber durchaus konvexe Funktionen, welche nicht differenzierbar sind, zum Beispiel die Betragsfunktion $f(x) = |x|$.
Eine wichtige Eigenschaft konvexer Funktionen ist das Verhalten der Sekantensteigungen. Der folgende Satz gibt eine weitere gute intuitive Vorstellung von Konvexität.

Satz 2.2. *Sei I ein Intervall und sei f eine (streng) konvexe Funktion auf I. Für Punkte $a < b$ in I ist die Sekantensteigung*

$$s(a,b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

eine (streng) monoton steigende Funktion sowohl in a als auch in b.

Beweis. Wir zeigen, dass für beliebige Punkte $a \leq c < b \leq d$ aus I stets $s(a,b) \leq s(a,d)$ und $s(a,b) \leq s(c,b)$ gilt. Die erste Ungleichung ist äquivalent zu

$$f(b) \leq \frac{d-b}{d-a} f(a) + \frac{b-a}{d-a} f(d).$$

Setzt man hier $\lambda = \frac{d-b}{d-a}$, dann gilt $0 < \lambda \leq 1$ und $b = \lambda a + (1-\lambda)d$, die Ungleichung lautet also

$$f(\lambda a + (1-\lambda)d) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(d).$$

Dies folgt direkt aus der Definition von Konvexität. Ist f streng konvex und $d > b$, dann gilt sogar das strikte Ungleichheitszeichen. Analog beweist man $s(a,b) \leq s(c,b)$. □

Die Monotonie der Sekantensteigung ist in der Tat sogar äquivalent zur Konvexität, wie sich der Leser leicht überlegt. Für konkave Funktionen gilt ein analoges Resultat. Als Anwendung folgt ein Beispiel.

Beispiel 5. *Seien $0 < a \leq b \leq c \leq d$ reelle Zahlen. Zeige, dass gilt*

$$a^b b^c c^d d^a \geq a^d b^a c^b d^c.$$

Wann gilt Gleichheit?

Lösung. Ist $a = c$ oder $b = d$, dann gilt offensichtlich das Gleichheitszeichen. Wir nehmen nun $a > c$ und $b > d$ an. Logarithmieren liefert die äquivalente Ungleichung

$$b \ln a + c \ln b + d \ln c + a \ln d \geq d \ln a + a \ln b + b \ln c + c \ln d,$$

und nach Umformen

$$\frac{\ln c - \ln a}{c - a} \geq \frac{\ln d - \ln b}{d - b}.$$

Da $\ln x$ streng konkav auf $[0, \infty[$ ist, folgt dies aus Satz 5.2. Gleichheit gilt genau dann, wenn $a = b$ und $c = d$. □

2.2 Extrema an Intervallendpunkten

Wir kommen nun zur wichtigsten Anwendung konvexer Funktionen. Wie schon erwähnt, sind konvexe Funktionen immer stetig. Ein allgemeiner Satz besagt nun, dass stetige Funktionen auf beschränkten, abgeschlossenen Intervallen immer ein (endliches) Minimum und Maximum annehmen. Nun zum Inhalt dieses Abschnitts:

Satz 2.3. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Dann wird das Maximum von f auf I an einem der beiden Intervallendpunkte angenommen.*

Beweis. Sei $I = [a, b]$ und sei $M = f(x)$ das Maximum von f auf I. Wähle $\lambda \in [0, 1]$ so, dass gilt $x = (1 - \lambda)a + \lambda b$. Nun gilt nach Voraussetzung

$$M = f(x) = f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Wenn jetzt aber $f(a)$ und $f(b)$ beide kleiner als M wären, dann wäre auch die rechte Seite von obiger Ungleichung kleiner als M, ein Widerspruch. □

Mehrere Dinge gibt es dazu zu sagen:

(i) Der Satz gilt wörtlich auch, wenn man konvex durch konkav und Maximum durch Minimum ersetzt. Dies ist eine direkte Konsequenz von Beispiel 6 aus dem letzten Abschnitt.

(ii) Ein scharfer Blick auf den Beweis liefert sogar mehr: Wird das Maximum M an mindestens einem inneren Punkt x aus I angenommen, dann gilt $f(a) = f(b) = M$ und f ist konstant auf I.

(iii) Die wichtigste Anwendung bezieht sich auf lineare Funktionen, die gleichzeitig konvex und konkav sind. Der Satz liefert dann die offensichtliche Tatsache, dass eine lineare Funktion auf I an einem Endpunkt ihr Maximum und am anderen ihr Minimum annimmt. Dies wird von grossem Nutzen sein.

Nun endlich Beispiele:

Beispiel 6. *Seien $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ reelle Zahlen. Bestimme den grösstmöglichen Wert des Ausdrucks*

$$a + b + c + d - abcd.$$

Lösung. Der Ausdruck ist eine Funktion von *vier* reellen Variablen. Wie kann man hier den Satz anwenden? Die Idee ist, dass man alle Variablen ausser einer festhält, also wie Konstanten behandelt. Dann wird der Ausdruck zu einer *linearen* Funktion in der verbleibenden Variablen, und der Definitionsbereich ist das beschränkte, abgeschlossene Intervall $[0, 1]$, welches immer dasselbe ist. Da wir nach dem Maximum suchen, können wir nach dem Satz annehmen, dass die nicht fixierte Variable entweder gleich 0 oder gleich 1 ist. Dieselbe Argumentation für die anderen drei Variablen ergibt, dass das Maximum an einer der 16 Stellen angenommen werden muss, wo jede Variable 0 oder 1 ist. Wegen Symmetrie genügt es ausserdem die Fälle $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$ und $(1, 1, 1, 1)$ zu betrachten. Eine kleine Rechnung zeigt, dass das Maximum 3 nur im vorletzten Fall angenommen wird, also dann, wenn drei der Variablen gleich 1 und die vierte gleich 0 ist. □

Beispiel 7. *Seien $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ reelle Zahlen. Bestimme das Maximum der Summe*

$$\sum_{i<j} |x_i - x_j|.$$

Beweis. Für eine feste Zahl a ist die Funktion $f(x) = |x-a|$ konvex. Der gegebene Ausdruck ist als Summe konvexer Funktionen daher eine konvexe Funktion von x_1. Das Maximum wird angenommen, wenn x_1 einer der Intervallendpunkte von $[0,1]$ ist. Dasselbe gilt für alle anderen Variablen. Seien nun p Variablen gleich 1 und der Rest gleich 0. Die Summe hat dann den Wert $p(n-p)$. Dies ist eine quadratische Funktion in p und nimmt ihr Maximum für $p = \frac{n}{2}$ respektive $p = \frac{(n\pm1)}{2}$ an, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist. Der grösstmöglich Wert der Summe ist demnach $\frac{n^2}{4}$ respektive $\frac{n^2-1}{4}$ □

Wir geben zum Schluss noch ein Beispiel, wo eine etwas andere Argumentation zum Zug kommt.

Beispiel 8. *Seien $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ beliebige reelle Zahlen. Für welche x nimmt folgende Summe ihr Minimum an?*

$$f(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + \ldots + |x-a_n|.$$

Lösung. Der Ausdruck für $f(x)$ ist eine konvexe Funktion in x, doch dies hilft wenig, da wir das Minimum suchen. Funktionen der Form $|x-a|$ sind zusammengesetzt aus zwei linearen Funktionen mit einem Knick bei $x = a$. Daraus folgt, dass f ebenfalls eine stetige, stückweise lineare Funktion in x ist, welche bei $a_1, \ldots, a_n$ Knickpunkte aufweist. Die Einschränkung von f auf ein Intervall der Form $[a_i, a_{i+1}]$ ist also linear, daher nimmt f sein Minimum sicher an einem der Punkte a_i an. Wir können aber noch mehr sagen. Die Steigung von f auf dem Intervall $[a_i, a_{i+1}]$ ist gleich $2i - n$ und das Minimum wird dort angenommen, wo diese Steigung das Vorzeichen wechselt. Ist n ungerade, ist dies bei $a_{(n+1)/2}$ der Fall. Ist n gerade, dann ist f auf dem gesamten Intervall $[a_{n/2}, a_{n/2+1}]$ konstant und nimmt dort ihr Minimum an. □

2.3 Jensen

Für konvexe bzw. konkave Funktionen in einer Variabel gilt die sehr wichtige Ungleichung von Jensen. Um sie in voller Allgemeinheit zu formulieren, benötigen wir den Begriff des *Gewichtssatzes.* Reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ bilden einen Gewichtssatz, falls $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ gilt.

Satz 2.4 (Jensen)**.** *Sei I ein Intervall und sei f eine konvexe Funktion auf I. Für alle reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n \in I$ und jeden Gewichtssatz $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ist die folgende Ungleichung erfüllt:*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right).$$

Ist f streng konvex und sind alle Gewichtseλ_k strikt positiv, dann steht genau dann das Gleichheitszeichen, wenn $x_1 = \ldots = x_n$. Ist f konkav auf I, dann gilt dieselbe Ungleichung mit umgedrehtem Ungleichheitszeichen.

Beweis. Beachte zuerst, dass mit $x_1, \ldots, x_n$ auch $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ in I liegt, die rechte Seite ist also wohldefiniert. Wir verwenden Induktion nach n. Für $n = 2$ lautet die Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1)f(x_2),$$

und das ist gerade die Definition von Konvexität. Sei nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ein beliebiger Gewichtssatz und setze $\mu_k = \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n}$ für $1 \leq k \leq n-1$. Man rechnet leicht nach, dass die μ_k ebenfalls einen Gewichtssatz bilden und daher hat man

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) &= f\left((1-\lambda_n)\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k x_k + \lambda_n x_n\right) \\ &\leq (1-\lambda_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k x_k\right) + \lambda_n f(x_n) \\ &\leq (1-\lambda_n)\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k f(x_k) + \lambda_n f(x_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k), \end{aligned}$$

wobei die erste Abschätzung nach Definition von Konvexität gilt, die zweite nach Induktionsvoraussetzung. Ist f streng konvex und sind alle $\lambda_k > 0$, dann ergeben sich die behaupteten Gleichheitsbedingungen unmittelbar aus der Definition von strenger Konvexität. Der Fall einer konkaven Funktion folgt direkt, indem man das eben Bewiesene auf die konvexe Funktion $-f$ anwendet. $\square$

Meistens verwendet man natürlich den Standardgewichtssatz $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. In diesem Spezialfall lautet Jensen

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

Wird der Gewichtssatz nicht erwähnt, ist immer dieser Spezialfall gemeint.

Beispiel 9 (Indien 95). *Seien $x_1, \ldots, x_n$ positive Zahlen mit Summe 1. Beweise, dass gilt*

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Lösung. Die Funktion $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ ist streng konvex auf dem Intervall $[0, 1[$, denn eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$f''(x) = \frac{1 - \frac{x}{4}}{\sqrt{1-x}^5} > 0 \quad \text{für } 0 \leq x < 1.$$

Nach Jensen gilt daher

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq n \cdot \frac{\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)}{\sqrt{1-\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

Das Gleichheitszeichen steht nur für $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$. □

Natürlich wird nicht immer alles gleich auf dem Silbertablett serviert wie im letzten Beispiel.

Beispiel 10. *Seie α, β, γ die Innenwinkel eines Dreiecks. Zeige, dass gilt*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Lösung. Nach Voraussetzung gilt $\alpha, \beta, \gamma > 0$ und $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Die Behauptung würde direkt aus Jensen folgen, wenn die Cosinusfunktion konkav wäre auf dem Intervall $[0, \pi]$. Das ist aber nicht der Fall! Man rechnet leicht nach, dass sie streng konkav ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ und streng konvex auf $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Dieses Problem kann man wie folgt beheben. Es kann nämlich nur ein einziger Winkel grösser als $\frac{\pi}{2}$ sein, oBdA sei dies α. Wir ersetzen daher in einem ersten Schritt α und β durch ihr arithmetisches Mittel. Nach der Summe-zu-Produkt Formel gilt

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Es gilt sicher $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) < \frac{\pi}{2}$ und somit $0 < \cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 1$. Dies bedeutet aber, dass die ursprüngliche Summe durch das Ersetzen von α und β durch ihr arithmetisches Mittel grösser wird. Ausserdem ist $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) < \frac{\pi}{2}$, denn sonst wäre die Summe aller Winkel grösser als π. Wir können jetzt also annehmen, dass alle Winkel höchstens $\frac{\pi}{2}$ sind und Jensen anwenden. Das liefert schliesslich

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq 3\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$$

Gleichheit gilt nur für $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. □

Beispiel 11 (Russland 2000)**.** *Beweise für $0 \leq x, y \leq 1$ die Ungleichung*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Lösung. Der naheliegende Weg wäre hier nachzuweisen, dass die Funktion $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ auf dem Intervall $[0, 1]$ konkav ist. Dies würde

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+(\frac{x+y}{2})^2}}$$

liefern. Weil die Funktion f auf $[0,1]$ streng monoton fallend ist, würde dies die gewünschte Ungleichung wegen $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ implizieren. Leider ist f aber nur auf dem Teilintervall $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ konkav. Es gibt zwei mögliche Auswege aus dieser Situation, wir stellen beide vor.
Erste Variante: Man könnte auch die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1+t}}$ verwenden, sie würde ebenfalls das Gewünschte liefern. Allerdings ist es hier noch schlimmer, diese Funktion ist sogar konvex auf dem Einheitsintervall. Ein bisschen Experimentieren zeigt, dass die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{1+t^n}}$ immer konkaver werden, wenn n wächst, wir sollten es also mit einem grösseren n versuchen. Eine kurze Rechnung zeigt, dass $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ tatsächlich streng konkav ist auf $[0,1]$, es gilt also nach Jensen

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^4}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Die zweite Abschätzung folgt dabei wieder aus Monotoniegründen und der Ungleichung $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \geq \sqrt[4]{xy}$.
Zweite Variante: Auf der rechten Seite steht unter der Wurzel ein Produkt von x und y und nicht etwa eine Summe irgendwelcher Terme. Wir suchen also eine Funktion, die automatisch ein Produkt 'erzeugt'. Produkte und Summen lassen sich ja durch die Exponentialfunktion respektive den Logarithmus ineinander überführen. Wir setzen daher $x = e^{-u}$, $y = e^{-v}$ dabei gilt $u, v \geq 0$ wegen $0 \leq x, y \leq 1$, und erhalten die äquivalente Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2u}}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2v}}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+e^{-(u+v)}}}.$$

Nach Jensen genügt es jetzt zu zeigen, dass die Funktion $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-t}}}$ konkav ist auf $[0, \infty[$. Eine kurze Rechnung ergibt

$$g''(t) = \frac{1-2e^{2t}}{(1+e^{-2t})^{5/2}e^{4t}}.$$

Der Nenner ist offensichtlich immer positiv, der Zähler aber stets negativ, denn für $t \geq 0$ ist $e^{2t} \geq 1$, wie gewünscht. Ein Detail haben wir allerdings unterschlagen: Für $x = 0$ kann man kein u mit $x = e^{-u}$ finden, analog für y. Der obige Beweis funktionert also nur für $x, y > 0$. Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Ungleichung aber trivialerweise richtig. $\square$

Beispiel 12. *Seien $0 < a_1, \ldots, a_n \leq 2$ reelle Zahlen mit arithmetischem Mittel A. Zeige, dass gilt*

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(A + \frac{1}{A}\right)^n.$$

Lösung. Links steht ein Produkt statt einer Summe, die wir eigentlich bräuchten. Hier hilft der Logarithmus. Wendet man ihn auf beiden Seiten an (beachte dabei, dass der Logarithmus streng monoton steigend ist, daher ist seine Anwendung einen Äquivalenzumformung und das Ungleichheitszeichen behält seine Richtung), dann ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \geq n \cdot f(A)$$

mit der Funktion $f(t) = \ln(t + \frac{1}{t})$. Nach Jensen genügt es also zu zeigen, dass f auf dem Intervall $]0, 2]$ konvex ist. In der Tat erhält man

$$f''(t) = \frac{5 - (x^2 - 2)^2}{x^2(x^2 + 1)^2} > 0 \quad \text{für} \quad 0 < t \leq 2.$$

$\square$

Schliesslich noch ein Beispiel, wo Jensen nicht mit dem Standardgewichtssatz verwendet wird.

Beispiel 13 (IMO 01 - 2). *Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Zeige, dass gilt*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Beweis. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist streng konvex auf $\mathbb{R}_{>0}$. Da die Ungleichung homogen ist, können wir $a + b + c = 1$ annehmen, dann bilden a, b, c einen Gewichtssatz. Nach Jensen gilt nun

$$af(a^2 + 8bc) + bf(b^2 + 8ca) + cf(c^2 + 8ab) \geq f\left(a(a^2 + 8bc) + b(b^2 + 8ca) + c(c^2 + 8ab)\right).$$

Da f streng monoton fallend ist, genügt es zu zeigen, dass die letzte Klammer höchstens gleich 1 ist. Nachdem wir wieder homogenisiert haben, ist dies äquivalent zu

$$a(a^2 + 8bc) + b(b^2 + 8ca) + c(c^2 + 8ab) \leq (a + b + c)^3,$$

und dies wiederum zu

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geq 6abc.$$

Letzteres ist einfach AM-GM. Gleichheit gilt nur für $a = b = c$. $\square$

Zum Abschluss stellen wir noch ein in der Praxis wichtiges Resultat vor, welches einen grossen Teil der bisher erzielten Resultate beinhaltet. Sei f konvex auf dem Intervall I und seien $x_1, \ldots, x_n \in I$. Wir haben an verschiedenen Beispielen immer wieder festgestellt, dass der Ausdruck $f(x_1) + \ldots + f(x_n)$ klein wird, wenn die Variablen möglichst gleich gross sind, und dass er gross wird, wenn die Variablen möglichst weit auseinander liegen, zum Beispiel auf den Intervallpunkten.

Satz 2.5. *Sei I ein endliches, abgeschlossenes Intervall und sei f eine konvexe Funktion auf I. Für die Zahlen $x_1, \ldots, x_n \in I$ gelte $x_1 + \ldots + x_n = S$. Dann ist*

$$f(x_1) + \ldots + f(x_n)$$

minimal, *wenn $x_1 = \ldots = x_n = \frac{S}{n}$, und* maximal, *wenn alle ausser höchstens einer Variablen an den Intervallendpunkten liegen. Genauer gilt: Sei $I = [a, b]$ und sei k so* *gewählt, dass* $(k+1)a+(n-k-1)b \le S \le ka+(n-k)b$ *gilt, dann wird das Maximum angenommen für*

$$a = x_1 = \ldots = x_k \le x_{k+1} \le x_{k+2} = \ldots = x_n = b$$

und alle Permutationen davon. Ist f *streng konvex, dann sind das jeweils die einzigen Gleichheitsfälle.*

Beweis. Die Aussage bezüglich des Minimums folgt direkt aus der Ungleichung von Jensen, ebenso wie die Gleichheitsbedingungen. Für das Maximum nehmen wir an, dass es zwei Variablen x_k, x_l gibt mit $a < x_k \le x_l < b$. Für jede Zahl $c \ge 0$ ist dann

$$f(x_k) + f(x_l) \le f(x_k - c) + f(x_l + c),$$

denn dies ist äquivalent zu

$$\frac{f(x_k) - f(x_k - c)}{x_k - (x_k - c)} \le \frac{f(x_l + c) - f(x_l)}{(x_l + c) - x_l}$$

und folgt direkt aus Satz 2.2 (?). Mit anderen Worten, die Summe $f(x_k) + f(x_l)$ wird grösser, wenn wir x_k und x_l voneinander wegbewegen, $x_k + x_l$ aber konstant lassen. Folglich können wir annehmen, dass $x_k = a$ oder $x_l = b$ ist. Wiederholt man dies solange, bis nur noch eine Variable $\neq a, b$ ist, folgt die Behauptung. Die Gleichheitsbedingung folgt ebenfalls aus Satz 2.2 (?), wenn f streng konvex ist. □

Beispiel 14 (China 97). *Seien* $x_1, \ldots, x_{1997}$ *reelle Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:*

(a) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \le x_i \le \sqrt{3}$ *für* $i = 1, \ldots, 1997$

(b) $x_1 + \ldots + x_{1997} = -318\sqrt{3}$

Finde den grösstmöglichen Wert von $x_1^{12} + x_2^{12} + \ldots + x_{1997}^{12}$.

Lösung. Da die Funktion $f(x) = x^{12}$ streng konvex ist auf ganz $\mathbb{R}$, wird das Maximum genau dann angenommen, wenn alle ausser höchstens einer Variablen an den Intervallendpunkten $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\sqrt{3}$ liegen. Nehmen an, k der x_i seien gleich $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $1996-k$ seien gleich $\sqrt{3}$. Die letzte Variable muss dann den Wert

$$-318\sqrt{3} + \frac{k}{\sqrt{3}} - (1996-k)\sqrt{3}$$

haben und ebenfalls im Intervall liegen. Dies ergibt die Einschränkung

$$-1 \le -318 \cdot 3 + k - 3(1996-k) \le 3,$$

oder $-1 \le 4k - 6942 \le 3$. Daher ist $k = 1736$ und die letzte Variable ist gleich $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Das gesuchte Maximum ist somit gleich $1736 \cdot 3^{-6} + 260 \cdot 3^6 + \left(\frac{4}{3}\right)^6$. □

2.4 Halbkonvexitätssätze

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir Satz 2.5 auf Situationen, wo die Funktion f nicht auf dem ganzen Intervall I konvex ist. Eine häufige Situation ist die folgende: Sei f eine stetige Funktion auf dem Intervall $I = [a, b]$ und sei c ein innerer Punkt von I. Nehme an, f sei konvex auf $[a, c]$ und konkav auf $[c, b]$. Wie bestimmt man das Minimum bzw. das Maximum von $f(x_1) + \ldots + f(x_n)$, wenn die Summe der x_k konstant ist? Genau diese Situation tritt in Beispiel 10 auf (man vertausche die Begriffe 'konvex' und 'konkav'). Ein Punkt c wie oben, an dem die Funktion f ihr Konvexitätsverhalten ändert, heisst *Wendepunkt*. Wir nennen folgendes Resultat daher Wendepunktsatz, kurz WPS.

Satz 2.6 (WPS). *Sei I ein Intervall mit Endpunkten $-\infty \le a < b \le \infty$ und sei c ein innerer Punkt von I. Sei f eine stetige Funktion auf I, welche auf $I \cap]-\infty, c]$ konvex und auf $I \cap [c, \infty[$ konkav ist. Seien $x_1 \le \ldots \le x_n$ Punkte aus I mit fester Summe $x_1 + \ldots + x_n = S$. Nehme an, der Ausdruck*

$$f(x_1) + \ldots + f(x_n)$$

besitze ein Minimum bzw. ein Maximum.

(i) Es gibt ein k mit $1 \le k \le n+1$, sodass das Minimum bei einem n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ der folgenden Form angenommen wird:

$$a \le x_1 = \ldots = x_{k-1} \le c < x_k \le x_{k+1} = \ldots = x_n = b.$$

(ii) Es gibt ein k mit $0 \le k \le n$, sodass das Maximum bei einem n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ der folgenden Form angenommen wird:

$$a = x_1 = \ldots = x_{k-1} \le x_k < c \le x_{k+1} = \ldots = x_n \le b.$$

Ist f zusätzlich streng konvex bzw. konkav auf den entsprechenden Teilintervallen, dann werden die Extrema ausschliesslich an n-Tupeln der obigen Form angenommen.

Beispiel 15. *Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Innenwinkel eines konvexen Vierecks. Bestimme das Minimum und das Maximum des Ausdrucks*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta,$$

sofern diese überhaupt angenommen werden.

Lösung. Nach Voraussetzung gilt $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < \pi$ und $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\pi$. Für die Dauer der Lösung lassen wir degenerierte Vierecke zu, um das Problem zu vermeiden, dass der obige Ausdruck A eventuell gar keine Extrema besitzt. Mit anderen Worten, wir lassen $0 \le \alpha, \beta, \gamma, \delta \le \pi$ zu. Ausserdem können wir $\alpha \le \beta \le \gamma \le \delta$ annehmen. Wir befinden uns genau in der Situation um WPS anwenden zu können. Die Funktion $f(x) = \cos x$ ist stetig auf dem Intervall $[0, \pi]$, streng konkav auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ und streng konvex auf $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Um das Maximum zu bestimmen, genügt es daher, die Fälle (ii) in Satz 2.6 zu betrachten. Für $k = 5$ gilt $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$ und somit $A = 0$. Für $k = 4$ gilt $\alpha = \beta = \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < \delta \leq \pi$. Aus der Nebenbedingung folgt $\delta = 2\pi - 3\alpha$ und somit $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Nun ist

$$\begin{aligned} A &= 3\cos\alpha + \cos(2\pi - 3\alpha) = 3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha \leq 4\cos^3\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

denn die Funktion $4\cos^3\alpha$ ist streng monoton fallend auf dem Intervall $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$. Für $k = 3$ ist $\alpha = \beta < \frac{\pi}{4}, \gamma = \pi - 2\alpha > \frac{\pi}{2}$ und $\delta = \pi$. Also ist

$$\begin{aligned} A &= 2\cos\alpha + \cos(\pi - 2\alpha) - 1 = 2\cos\alpha - (2\cos^2\alpha - 1) - 1 = 2\cos\alpha(1 - \cos\alpha) \\ &\leq 2\left(\frac{\cos\alpha + (1 - \cos\alpha)}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

wobei die Abschätzung mit AM-GM folgt. Für das Gleichheitszeichen müsste aber $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, also $\alpha = \frac{\pi}{3}$ sein, was aber nicht im erlaubten Bereich liegt. Es gilt also das strikte Ungleichheitszeichen. Für $k \leq 2$ schliesslich rechnet man leicht nach, dass die Summe der vier Winkel grösser als 2π sein müsste, dieser Fall tritt also nicht auf.

Für das Minimum kann man nun dasselbe Spielchen nochmals machen, oder einfach feststellen, dass A das Vorzeichen wechselt, wenn man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma, \pi - \delta$ ersetzt. Das Minimum ist also gleich $-\frac{1}{2}$ und wird nur für Permutationen von $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3}, \delta = 0$ angenommen.

Die Gleichheitsfälle für beide Extrema entsprechen nun aber einem degenerierten Viereck, werden als nie erreicht. Zusammenfassend haben wir daher bewiesen, dass

$$-\frac{1}{2} < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta < \frac{1}{2},$$

gilt, wobei die Schranken bestmöglich sind. Sie werden beliebig genau ereicht, wenn das Viereck gegen ein degeneriertes mit Innenwinkeln $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 0$ bzw. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$ strebt. □

Beispiel 16 (China TST 05). *Seien $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ mit $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Finde das Maximum von*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^4 - x_k^5.$$

Lösung. Die Funktion $f(x) = x^4 - x^5$ ist stetig auf $[0, 1]$ und eine kurze Rechnung zeigt $f''(x) = 4x^2(3 - 5x)$. Daher ist f streng konvex auf $[0, \frac{3}{5}]$ und streng konkav auf $[\frac{3}{5}, 1]$, wir können daher WPS anwenden, um das Maximum zu bestimmen. Es genügt also die Fälle in (ii) zu betrachten. Es kann höchstens eine Variable $\geq \frac{3}{5}$ sein, sonst wäre die Summe zu gross. Andererseits können nicht alle kleiner als $\frac{3}{5}$ sein, denn sonst wären alle ausser einer gleich 0 und die Summe wäre zu klein. Wir können also $0 \leq x_1 < \frac{2}{5}, \frac{3}{5} < x_2 \leq 1$ und $x_3 = \ldots = x_n = 0$ annehmen. Wir setzen $x = x_1$, dann ist $x_2 = 1 - x$. Nun gilt

$$f(x) + f(1 - x) = x(1 - x)(x^3 + (1 - x)^3) = x(1 - x)(1 - 3x(1 - x)) = g(x(1 - x))$$

mit der Funktion $g(y) = y(1-3y)$. Nach AM-GM ist

$$g(y) = \frac{1}{3} \cdot 3y(1-3y) \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3y+(1-3y)}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $y = \frac{1}{6}$. Der ursprüngliche Ausdruck besitzt also den maximalen Wert $\frac{1}{12}$ und dieser wird erreicht, wenn $x(1-x) = \frac{1}{6}$, also wenn

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{6}}{6}, \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{6}}{6}, \quad x_3 = \ldots = x_n = 0.$$

□

2.5 Karamata

Wir kommen nun zu einer weiteren sehr starken Ungleichung, welche für konvexe bzw. konkave Funktionen gilt: Karamatas Ungleichung. Zur Formulierung benötigen wir wieder das Konzept des Majorisierens von reellen n-Tupeln. Dies haben wir schon bei Bunching gesehen. Wir wiederholen dieses und verallgemeinern es gleich ein wenig. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ zwei Folgen reeller Zahlen mit $x_1 \geq \ldots \geq x_n$ und $y_1 \geq \ldots \geq y_n$. Wir sagen, dass die Folge x die Folge y *majorisiert*, wenn folgende Bedingungen gelten:

(a) $x_1 + \ldots + x_k \geq y_1 + \ldots + y_k$ für $1 \leq k \leq n-1$,

(b) $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$.

Man schreibt dafür $x \succ y$.

Satz 2.7 (Karamata)**.** *Sei I ein Intervall und sei f eine konvexe Funktion auf I. Seien $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ in I. sodass $(x_1, \ldots, x_n) \succ (y_1, \ldots, y_n)$. Dann gilt*

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n).$$

Satz 2.8 (Popoviciu)**.** *Sei f eine konvexe Funktion auf einem Intervall und seien x_1, x_2, x_3 Punkte in diesem Intervall. Dann gilt*

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3} + f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \geq \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x_1}{2}\right)\right].$$

Beispiel 17. *Sei f eine konvexe Funktion auf einem Intervall und seien x_1, x_2, x_2 Punkte in diesem Intervall. Beweise, dass gilt*

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x_1}{2}\right).$$

Lösung. Wegen der Symmetrie können wir $x_1 \geq x_2 \geq x_3$ annehmen. Dann gilt auch $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{x_3+x_1}{2} \geq \frac{x_2+x_3}{2}$ und nach Karamata genügt es zu zeigen, dass

$$(x_1, x_2, x_3) \succ \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_3+x_1}{2}, \frac{x_2+x_3}{2}\right).$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} x_1 &\geq \frac{x_1+x_2}{2} \iff x_1 \geq x_2, \\ x_1 + x_2 &\geq \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_1}{2} \iff x_2 \geq x_3 \end{aligned}$$

und der Identität

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_1}{2} + \frac{x_2+x_3}{2}.$$

□

3 Standardrepertoire II

3.1 Potenzmittelungleichung

In diesem Abschnitt stellen wir eine Verallgemeinerung der Ungleichung zwischen den vier Mitteln vor. Dazu definieren wir zuerst die allgemeinen Potenzmittel. Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen und $r \neq 0$ reell. Das *r-te Potenzmittel* und $a_1, \ldots, a_n$ ist definiert durch

$$M_r(a_1, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1^r + \ldots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Für $r = -1, 1, 2$ erhält man das harmonische, arithmetische und quadratische Mittel. Man kann mit Hilfe des Satzes von Bernoulli de l'Hôpital beweisen, dass gilt

$$\lim_{r \to 0} M_r(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Es ist daher naheliegend, die Definition der Potenzmittel zu ergänzen durch

$$M_0(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Das 0-te Potenzmittel ist also gerade das geometrische Mittel. Als Verallgemeinerung von Satz 2.1 aus Ungleichung I gilt die folgende Ungleichung:

Satz 3.1 (Potenzmittelungleichung)**.** *Seien $a_1, \ldots, a_n$ positiv und seien $r \leq s$ reelle Zahlen. Dann gilt*

$$M_r(a_1, \ldots, a_n) \leq M_s(a_1, \ldots, a_n).$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $r = s$ gilt, oder wenn $a_1 = \ldots = a_n$.

Wir geben ein Beispiel:

Beispiel 18 (Pol 92)**.** *Seien $x, y, z > 0$. Beweise die Ungleichung*

$$8(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geq 9(x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy).$$

Lösung. Nach AM-GM gilt

$$(x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy) \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{3}\right)^3.$$

Die Ungleichung reduziert sich dann auf

$$\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \geq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

und dies ist richtig nach der Potenzmittelungleichung. □

3.2 Hölder

Die Ungleichung von Hölder ist eine Verallgemeinerung von Cauchy-Schwarz auf m Folgen. Seien $m, n \geq 2$ natürliche Zahlen und seien a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ positive Zahlen. Dann gilt

Satz 3.2 (Hölder)**.**

$$\prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^m\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^m.$$

Dies mag auf den ersten Blick etwas verwirren aussehen. Für $m = 2$ ist dies aber genau CS, setze einfach $a_k = a_{1k}$ und $b_k = a_{2k}$. Für $m = 3$ lautet Hölder wie folgt:

$$(a_1^3 + \ldots + a_n^3)(b_1^3 + \ldots + b_n^3)(c_1^3 + \ldots + c_n^3) \geq (a_1 b_1 c_1 + \ldots + a_n b_n c_n)^3.$$

Beweis. Wir kopieren den Beweis aus Beispiel 17 aus Ungleichung I. Da die Ungleichung homogen ist, können wir

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^m = 1 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq m$$

annehmen. Wir müssen die folgende Ungleichung beweisen:

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{ij} \leq 1.$$

Für $1 \leq j \leq n$ gilt nach AM-GM

$$a_{1j} a_{2j} \cdots a_{mj} \leq \frac{a_{1j}^m + a_{2j}^m + \ldots + a_{mj}^m}{m}.$$

Aufsummieren liefert nun

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}a_{ij} \leq \sum_{j=1}^{n}\frac{a_{1j}^m + a_{2j}^m + \ldots + a_{mj}^m}{m} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^m\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}1 = 1.$$

□

3.3 Bernoulli

Die Ungleichung von Bernoulli ist manchmal von Nutzen, wenn Terme mit seltsamen Exponenten abgeschätzt werden sollen.

Satz 3.3 (Bernoulli)**.** *Für $r > 1$ und $x \geq -1$ gilt*

$$(1+x)^r \geq 1 + xr.$$

Gleichheit gilt nur für $x = 1$.

Beweis. Die Funktion $f(x) = (1+x)^r$ hat die zweite Ableitung $f''(x) = r(r-1)(x+1)^{r-2}$ und ist somit streng konvex auf $[-1, \infty]$. Daher liegt der Graph von f über der Tangente t im Punkt $x = 1$, welche die Gleichung $t(x) = 1 + xr$ hat. □

4 Weitere Methoden

4.1 Mixing Variables

Der Begriff 'Mixing Variables' beschreibt, etwas vage ausgedrückt, die Methode, eine Ungleichung durch schrittweise Optimierung und Spezialisierung zu beweisen. Dies geschieht dadurch, dass man die 'Variablen vermischt'. Wir illustrieren das gleich an einem Beispiel.

Beispiel 19 (Kanada 99)**.** *Seien x, y, z nichtnegative reelle Zahlen mit $x + y + z = 1$. Beweise, dass gilt*

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}.$$

Lösung. Wegen der zyklischen Symmetrie können wir annehmen, dass x die grösste der drei Zahlen ist. Gilt nun $z < y$, dann vertauschen wir y und z und behaupten, dass der Ausdruck dadurch nicht kleiner wird. In der Tat ist die Differenz

$$(x^2z + z^2y + y^2x) - (x^2y + y^2z + z^2x) = \underbrace{(x-y)}_{\geq 0}\underbrace{(y-z)}_{<0}\underbrace{(z-x)}_{<0} \geq 0$$

nach Voraussetzung nichtnegativ. Wir können nun also $x \geq y \geq z$ annehmen. Gilt $z > 0$, dann ersetzen wir x und z durch $x + z$ und 0 und behaupten wieder, dass der Ausdruck dadurch nicht kleiner wird. Es gilt nämlich

$$(x+z)^2y - (x^2y + y^2z + z^2x) = 2xyz + z^2y - y^2z - z^2x = z(y(x-y) + x(y-z)) \geq 0.$$

Wir verbleiben also mit dem Fall $x \geq y \geq z = 0$. Nun gilt nach AM-GM

$$x^2y = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y \leq 4 \cdot \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{x} + y}{3}\right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{27},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\frac{x}{2} = y$, also wenn $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}$. Der grösstmögliche Wert des Ausdrucks ist somit $\frac{4}{27}$, Gleichheit gilt genau für die zyklischen Permutationen von $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$. $\square$

Wir rekapitulieren den Beweis nochmals und verwenden dazu die Notation $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$. Unter der Annahme, dass x die grösste der drei Zahlen ist, haben wir gezeigt, dass

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &\leq f(x, \max\{y,z\}, \min\{y,z\}) \\ &\leq f(x + \min\{y,z\}, \max\{y,z\}, 0) \leq f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

Wir haben die Variablen in jedem Schritt so abgeändert, dass der Ausdruck nie kleiner wurde, und so, dass nach endlich vielen Schritten das Trippel $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ erreicht war. Folglich wird der maximale Wert für dieses letzte Tripel angenommen und ist gleich $\frac{4}{27}$. Diese schrittweise Modifikation nennt man 'Mischen der Variablen'.

Beispiel 20 (China 95)**.** *Seien $a_1, \ldots, a_{10}$ verschiedene positive ganze Zahlen mit Summe* 1995. *Bestimme den kleinstmöglichen Wert von*

$$a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_9a_{10} + a_{10}.$$

Lösung. Wir beginnen mit einer beliebigen Folge $(a_1, \ldots, a_{10})$ und verändern sie fortlaufend, sodass der Wert des gegebenen Ausdrucks bei jeder Veränderung abnimmt. Wir setzen zur Vereinheitlichung der Argumentation $a_{11} = 1$. Wir können annehmen, dass a_1 die grösste der Zahlen ist. Nehme an, dies sei nicht der Fall und a_k sei die grösste. Ersetze $(a_1, \ldots, a_k)$ durch $(a_k, \ldots, a_1)$, der Ausdruck ändert sich dabei um $(a_1 - a_k)(a_{k+1} - 1) \leq 0$. Weiter können wir annehmen, dass a_2 die ist kleinste Zahl ist. Wenn nicht, dann nehme an, a_l sei die kleinste und ersetze $(a_2, \ldots, a_l)$ durch $(a_l, \ldots, a_2)$. Der Ausdruck ändert sich dabei um $(a_l - a_2)(a_1 - a_{l+1}) \leq 0$. Nach demselben Prinzip können wir annehmen, dass a_3 unter den verbleibenden Zahlen die grösste ist, a_4 wiederum die kleinste etc. Es genügt also, den Fall $a_1 > a_3 > a_5 > a_7 > a_9 > a_{10} > a_8 > a_6 > a_4 > a_2$ zu betrachten.
Als nächstes ersetzen wir a_1 und a_2 durch $a_1 + a_2 - 1$ und 1. Der Ausdruck ändert sich dabei um $(a_1 + a_3 - 2)(1 - a_2) \leq 0$. Sei nun $3 \leq k \leq 10$ und ersetze a_1 und a_k durch $a_1 + m$ und $a_k - m$, wobei $0 < m < a_k$ gilt. Der Ausdruck wird dabei wiederum kleiner, nämlich

um $m(a_{k-1}+a_{k+1}-2)\geq 0$. Wir verwenden dies jetzt wiederholt und können der Reihe nach $a_4=2, a_6=3, \ldots, a_3=9$ erzwingen. Beachte, dass bei diesen Modifikationen die Bedingung, dass die a_k *verschiedene* natürliche Zahlen sind, nie verletzt wird. Folglich ist das Minimum gleich 4069 und wird für die Folge

$$(a_1,\ldots,a_{10})=(1950,1,9,2,8,3,7,4,6,5)$$

angenommen. □

Satz 4.1. *Sei f eine stetige symmetrische Funktion in n Variablen.*

a) Nehme an, es gelte

$$f\left(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2}{2},a_3,\ldots,a_n\right)\geq f(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

für alle a_k im Definitionsbereich von f, dann ist

$$f(a,a,\ldots,a)\geq f(a_1,a_2,\ldots,a_n),\quad a=\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.$$

b) Nehme an, es gelte

$$f(\sqrt{a_1a_2},\sqrt{a_1a_2},a_3,\ldots a_n)\geq f(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

für alle positiven a_k im Definitionsbereich von f, dann ist

$$f(g,g,\ldots,g)\geq f(a_1,a_2,\ldots,a_n),\quad g=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

4.2 Schur und SOS

In diesem Abschnitt wenden wir uns wieder der Ungleichung von Schur zu. Viele halb Brute Force Lösungen bestehen darin, eine Ungleichung auf eine Art von Schur-Form zu bringen und dann eines der folgenden Resultate zu verwenden. Das Gute an dieser Methode ist, dass sie oft auch für schwierige, zyklisch symmetrische Ungleichungen anwendbar ist, wo zum Beispiel Bunching versagt. Wir stellen gleich die allgemeinste Variante vor und befassen uns anschliessend mit den in der Praxis wichtigen Spezialfällen.

Satz 4.2. *Seien $a\geq b\geq c$ reelle Zahlen und seien $x,y,z\geq 0$ nichtnegativ mit $\sqrt{y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{z}$. Dann gilt*

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\geq 0.$$

Beweis. Sei A die linke Seite der zu beweisenden Ungleichung. Für $a=b$ gilt $A=z(c-a)^2\geq 0$, für $b=c$ erhält man $A=x(a-b)^2\geq 0$. Für $y=0$ ist ebenfalls $A\geq 0$ wegen $a\geq b\geq c$. Wir nehmen im Folgenden $y>0$ an und betrachten

$$A=yb^2+((z-x)(a-c)-y(a+c))b+(xa^2+zc^2+(y-x-z)ac)$$

als quadratische Funktion in b. Wegen $y > 0$ besitzt diese ein einziges Minimum bei

$$b_0 = \frac{1}{2y}(y(a+c) - (z-x)(a-c)).$$

Falls b_0 nicht im Intervall $[c, a]$ liegt, nimmt A das Minimum an einem der Intervallendpunkte a oder c an. Wir haben aber bereits gezeigt, dass A an diesen Punkten nichtnegativ ist, folglich ist A auf dem gesamten Intervall nichtnegativ und wir sind fertig.
Es bleibt der Fall $a \geq b_0 \geq c$. Man rechnet leicht nach, dass dies äquivalent ist zu $y \geq |x - z|$. Dass A nichtnegativ auf dem Intervall $[c, a]$ ist, ist äquivalent dazu, dass die Diskriminante D der quadratischen Funktion nicht positiv ist. Eine Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} D &= ((z-x)(a-c) - y(a+c))^2 - 4y(xa^2 + zc^2 + (-x+y-z)ac) \\ &= (a-c)^2(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx), \end{aligned}$$

somit ist $D \leq 0$ äquivalent zu $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \leq 0$. Das Polynom links besitzt als Funktion von y die beiden Nullstellen $y_{1,2} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{z})^2$. Einerseits gilt jetzt aber nach Voraussetzung $y \leq (\sqrt{x} + \sqrt{z})^2$, andererseits ist wegen $y \geq |x - z|$ auch $y \geq |\sqrt{x} - \sqrt{z}| \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{z}) \geq (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2$. Folglich ist $y_1 \leq y \leq y_2$ und daher wirklich $D \leq 0$. Damit ist alles gezeigt. □

Das folgende Korollar ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem Satz, denn aus $y \leq x+z$ folgt natürlich $\sqrt{y} \leq \sqrt{x+z} \leq \sqrt{x} + \sqrt{z}$. Dennoch geben wir einen Beweis, den man sich auch gut merken kann.

Korollar 4.3. *Seien $a \geq b \geq c$ reelle Zahlen und seien $x, y, z \geq 0$. Nehme an, eine der folgenden Bedingungen sei erfüllt:*

(a) $y \leq \max\{x, z\}$,

(b) $y \leq x + z$.

Dann gilt

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a = b = c$ oder wenn

$$a = b,\ z = 0 \quad \textit{oder} \quad b = c,\ x = 0.$$

Beweis. Es genügt, (b) zu betrachten. Substituiere $a - c = (a-b) + (b-c)$ auf der linken Seite, eine Umformung ergibt dann

$$x(a-b)^2 + z(b-c)^2 + (x-y+z)(a-b)(b-c) \geq 0,$$

was nach Voraussetzung richtig ist. Die Gleichheitsfälle sind daran direkt abzulesen. □

Beispiel 21. *Beweise die folgende Ungleichung für alle positiven a, b, c:*

$$\frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Lösung. Die Differenz zwischen der rechten und der linken Seite ist gleich

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a} - \frac{b+1}{a^2+bc} = \sum_{cyc} \frac{(a^2+bc) - a(b+c)}{a(a^2+bc)} = \sum_{cyc} \frac{1}{a(a^2+bc)}(a-b)(a-c).$$

Dies hat nun die richtige Form, um Korollar 4.3 anzuwenden. Wegen der Symmetrie können wir $a \geq b \geq c$ annehmen. In der Notation des Korollars ist dann

$$x = \frac{1}{a(a^2+bc)}, \quad y = \frac{1}{b(b^2+ca)}, \quad z = \frac{1}{c(c^2+ab)}.$$

Diese Zahlen sind alle positiv und es gilt offensichtlich $x \leq y \leq z$. Damit sind die Voraussetzungen von (a) erfüllt, der Ausdruck ist also nichtnegativ. Gleichheit gilt nur für $a = b = c$. □

Satz 4.4. *Seien $a \geq b \geq c$ reelle Zahlen und für x, y, z gelte eine der beiden Bedingungen*

(a) $z \geq 0$ und $x, y \geq -z$,

(b) $x, y > 0$ und $z \geq -\frac{xy}{x+y}$,

Dann ist

$$x(a-b)^2 + y(b-c)^2 + z(c-a)^2 \geq 0.$$

In der Praxis ist die optimale Schranke in (b) nicht von Bedeutung, meist genügt die Bedingung im folgenden Korollar. Obschon dies direkt aus dem obigen Satz folgt, geben wir den einfachen Beweis als Referenz für Prüfungssituationen nochmals.

Korollar 4.5. *Seien $a \geq b \geq c$ reelle Zahlen und für x, y, z gelte eine der folgenden Bedingungen:*

(a) $z \geq 0$ und $x + z,\ y + z \geq 0$,

(b) $x, y \geq 0$ und $x + 2z,\ y + 2z \geq 0$,

(c) $x, z \geq 0$ und $a^2 z + b^2 y \geq 0$,

(d) $x + y + z \geq 0$ und $xy + yz + zx \geq 0$.

Dann ist

$$x(a-b)^2 + y(b-c)^2 + z(c-a)^2 \geq 0.$$

Beweis.

(a) Der Ausdruck $(a-b)^2 + (b-c)^2$ ist konvex in b und nimmt sein Maximum $(a-c)^2$ also dann an, wenn $b = a$ oder $b = c$. Insbesondere ist $(a-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$ und somit gilt wegen $z \geq 0$

$$x(a-b)^2 + y(b-c)^2 + z(c-a)^2 \geq (x+z)(a-b)^2 + (y+z)(b-c)^2 \geq 0.$$

(b) Beachte, dass nach AM-QM gilt $(c-a)^2 = ((a-b)+(b-c))^2 \leq 2(a-b)^2+2(b-c)^2$. Dies ergibt nun wegen $z \leq 0$ die Abschätzung

$$x(a-b)^2 + y(b-c)^2 + z(c-a)^2 \geq (x+2z)(a-b)^2 + (y+2z)(b-c)^2 \geq 0.$$

(c) Wegen $a \geq b$ ist auch $(a-c) \geq \frac{a}{b}(b-c)$. Damit folgt

$$x(a-b)^2 + y(b-c)^2 + z(c-a)^2 \geq x(a-b)^2 + (b-c)^2\left(y + \frac{a^2}{b^2}z\right) \geq 0.$$

(d) Was ist mit diesem Punkt?

$\square$

Beispiel 22. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise, dass gilt*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

Lösung. Wir versuchen, den Ausdruck so umzuformen, dass die Terme $(a-b)^2$ und so weiter auftauchen. Subtrahiere auf beiden Seiten $a+b+c$ und ergänze auf beiden Seiten die Quadrate:

$$\begin{aligned}\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} &\geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2}{a+b+c} \\ &= \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-b)^2}{a+b+c}.\end{aligned}$$

Die Ungleichung ist also äquivalent zu

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b+c}\right)(a-b)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c}\right)(a-b)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b+c}\right)(a-b)^2 \geq 0,$$

was offensichtlich richtig ist. Gleichheit gilt nur für $a = b = c$. $\square$

Beispiel 23. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise, dass gilt*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}.$$

Lösung. Wir bringen wieder alles auf die benötigte Form.

$$\begin{aligned} &\sum_{cyc} \frac{a^2}{b} - b \geq \frac{3(a^3+b^3+c^3)-(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2} \\ \iff &\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b} \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\sum_{cyc} a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 \\ \iff &\sum_{cyc} \frac{a^2+b^2+c^2}{b}(a-b)^2 \geq \sum_{cyc}(a+b)(a-b)^2 \\ \iff &\sum_{cyc} \frac{a^2+c^2-ab}{b}(a-b)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Wir setzen also

$$S_a = \frac{a^2 + c^2 - ab}{b}, \quad S_b = \frac{b^2 + a^2 - bc}{c}, \quad S_c = \frac{c^2 + b^2 - ca}{a}$$

und müssen die Bedingungen von Korollar 4.5 nachweisen. Wegen der zyklischen Symmetrie können wir annehmen, dass a die grösste der drei Zahlen ist und unterscheiden zwei Fälle.

Sei zuerst $a \geq c \geq b$. Dann ist $a^2 + c^2 - ab \geq ab + c^2 - ab > 0$ und somit $S_a > 0$. Es genügt zu zeigen, dass $S_a + S_b \geq 0$ und $S_a + S_c \geq 0$ gilt. Wegen $S_b > 0$ ist die erste Ungleichung sicher richtig, die zweite folgt aus

$$\begin{aligned} S_a + S_c \geq 0 &\iff a(a^2 + c^2 - ab) + b(c^2 + b^2 - ca) \geq 0 \\ &\iff (a^3 - a^2 b) + (ac^2 - abc) + bc^2 + b^3 \geq 0, \end{aligned}$$

denn die beiden Klammern rechts sind nicht negativ stimmt das so? nach Voraussetzung.

Sei nun $a \geq b \geq c$. Es gilt stets $S_a > 0$ und $S_b > 0$. Falls auch $S_c \geq 0$ gilt, ist nichts zu beweisen. Wir nehmen also $S_c < 0$ an und müssen zeigen, dass $S_a 2S_c \geq 0$ und $S_b + 2S_c \geq 0$ gilt. Ist der Rest trivial? Oder Übung? □

4.3 Das $(n-1)$EV Prinzip

Inhalt dieses Abschnitts ist ein tiefliegendes Resultat, welches sich qualitativ an die Sätze des letzten Abschnitts anlehnt, jedoch auch erhebliche Unterschiede dazu aufweist. Als Illustration des allgemeinen Falls beginnen wir mit einem prototypischen Beispiel, welches auch einen elementaren Beweis besitzt.

Satz 4.6 (abc Prinzip)**.** *Seien a, b, c feste positive Zahlen und seien x, y, z ebenfalls positiv mit*

$$x + y + z = a + b + c \quad \text{und} \quad xyz = abc.$$

Dann nimmt $xy + yz + zx$ den grösstmöglichen Wert an, wenn $x = y \geq z$, und den kleinstmöglichen Wert, wenn $x \geq y = z$. Beide Extrema werden also dann angenommen, wenn zwei der Variablen gleich gross sind.

Beweis. Setze $u = x + y + z, v = xy + yz + zx$ und $w = xyz$, dann sind u, w fest und wir suchen die Extrema von v. Das reelle Polynom $P(x) = x^3 - ux^2 + vx - w$ besitzt genau die drei Nullstellen x, y, z. Wir nehmen im Folgenden $x \geq y \geq z$ an, dann ist P nichtnegativ auf dem Intervall $[z, y]$ und nichtpositiv auf dem Intervall $[y, x]$. Wenn wir v nun durch einen grösseren Wert v' ersetzen, dann addieren wir die auf $\mathbb{R}_{>0}$ positive Funktion $(v' - v)x$ zu $P(x)$. Dadurch wird das Intervall, auf dem das neue Polynom nichtnegativ ist, grösser sowie das Intervall auf dem das neue Polynom nichtpositiv ist, kleiner. Dies bedeutet, dass die beiden grösseren Nullstellen näher zusammenrücken, während die beiden kleineren sich voneinander entfernen. Der grösstmögliche Wert von v wird also dann angenommen, wenn die beiden grösseren Nullstellen zusammenfallen, das ist die Behauptung. Analog argumentiert man für das Minimum. □

Die entscheidende Voraussetzung war, dass zwei verschiedene Potenzmittel (das arithemtische und geometrische) der Zahlen x, y, z einen vorgegeben Wert hatten. Dies verallgemeiner wir auf beliebige Potenzmittel:

Satz 4.7 ($(n-1)$EV Prinzip)**.** *Seien $0 < \alpha < \beta$, $n \geq 3$ und $p \neq 1$ fest gewählt und seien $a_1, \ldots, a_n \in]\alpha, \beta[$. Seien $x_1 \leq \ldots \leq x_n \in]\alpha, \beta[$ Zahlen, sodass gilt*

$$M_1(x_1, \ldots, x_n) = M_1(a_1, \ldots, a_n), \quad \textit{und} \quad M_p(x_1, \ldots, x_n) = M_p(a_1, \ldots, a_n).$$

Sei f eine differenzierbare Funktion auf $]\alpha, \beta[$, sodass die Funktion

$$g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$$

streng konvex ist auf dem Intervall $]\alpha^{1-p}, \beta^{1-p}[$ (für $p < 1$) respektive dem Intervall $]\beta^{1-p}, \alpha^{1-p}[$ (für $p > 1$). Setze

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n).$$

Falls F ein Maximum bzw. ein Minimum hat, dann kann dieses nur bei n-Tupeln der Form $x_1 = \ldots = x_{n-1} \leq x_n$ bzw. $x_1 \leq x_2 = \ldots = x_n$ angenommen werden.

Beispiel 24. *Beweise, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen x, y, z gilt*

$$\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{y^2+z^2} + \frac{1}{z^2+x^2} \geq \frac{10}{(x+y+z)^2}.$$

Lösung. Offensichtlich gilt für $x = y = z$ nicht Gleichheit. Ein bisschen Experimentieren liefert den Gleichheitsfall $x = y, z = 0$. Dadurch motiviert erledigen wir zuerst den Fall $z = 0$. Es gilt

$$\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{1}{x^2+y^2} + 4 \cdot \frac{1}{2xy} \geq \frac{25}{(x^2+y^2) + 4 \cdot 2xy} \geq \frac{10}{(x+y)^2},$$

wobei wir zuerst AM-GM, dann AM-HM und schliesslich nochmals AM-GM angewendet haben. Gleichheit gilt nur für $x = y$. Wir nehmen im Folgenden an, dass x, y, z alle positiv sind und setzen $u = x^2, v = y^2$ und $w = z^2$. Wegen der Homogenität der Ungleichung können wir $u + v + w = 1$ annehmen, wir setzen ausserdem $s = \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}$. Die Ungleichung ist äquivalent zu

$$\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1-v} + \frac{1}{1-w} \geq \frac{10}{s^2}$$

und damit von der benötigten Form, um Satz 4.7 mit $p = \frac{1}{2}$ anzuwenden. Wir fixieren also s und betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ auf dem Intervall $]0, 1[$. Man rechnet leicht nach, dass die Hilfsfunktion

$$g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{1-p}}\right) = \frac{1}{(1-x^2)^2}$$

streng konvex ist auf $]0,1[$, daher nimmt die linke Seite ihr Minimum bei $u \leq v = w$ an, sofern sie es überhaupt annimmt. Wir können s nun im Nachhinein doch wieder variieren lassen und haben gezeigt, dass es genügt, den Fall $x \leq y = z$ zu betrachten. Aus Homogenitätgründen können wir $y = z = 1$ annehmen. Nach Hochmultiplizieren der Nenner ist die Ungleichung äquivalent zu $x(x^3 + 4x^2 - 11x + 20) \geq 0$. Wegen $x > 0$ und $4x^2 + 9 \geq 12x$ ist die linke Seite aber strikt positiv, die Ungleichung ist also richtig mit striktem Ungleichheitszeichen. Insgesamt gilt nur Gleichheit, wenn zwei der Variablen gleich sind und die dritte gleich 0. $\square$

5 Gewichte und Beweise

5.1 Potenzmittel, Hölder, Minkowski

In diesem Abschnitt formulieren wir alle bisherigen Resultate in einer gewichteten Form und beweisen sie. Diese gewichteten Ungleichungen haben abgesehen von ihrer eher bescheidenen Anwendungsmöglichkeit für IMO-Probleme grosse theoretische Bedeutung. Wir erinnern an den Begriff des Gewichtssatzes. Ein n-Tupel $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ nichtnegativer reeller Zahlen heisst *Gewichtssatz*, falls $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Wir definieren zuerst die gewichteten Potenzmittel:

Definition 5.1. Sei λ ein Gewichtssatz und sei $r \neq 0$ eine reelle Zahl. Für positive reelle $x_1, \ldots, x_n$ ist das r-te gewichtete Potenzmittel der x_k definiert als

$$M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1^r + \ldots + \lambda_n x_n^r)^{\frac{1}{r}}.$$

Für $r = 0$ ergänzt man diese Definition mit

$$M_\lambda^0(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}.$$

Die Definition des 0-ten Potenzmittels ist motiviert durch den Grenzübergang $r \to 0$. Es gilt nämlich nach Bernoulli de l'Hôpital

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}(\lambda x_1^r + \ldots + \lambda_n x_n^r)^{\frac{1}{r}} &= \exp\left(\lim_{r\to 0} \frac{\ln(\lambda_1 x_1^r + \ldots + \lambda_n x_n^r)}{r}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{r\to 0} \frac{\lambda_1(\ln x_1)x_1^r + \ldots + \lambda_n(\ln x_n)x_n^r}{\lambda_1 x_1^r + \ldots + \lambda_n x_n^r}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\lambda_1(\ln x_1) + \ldots + \lambda_n(\ln x_n)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}\right) \\
&= x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}.
\end{aligned}$$

Mit dieser Festlegung ist die Funktion $r \mapsto M_\lambda^r(x_1, \ldots, x_n)$ also überall stetig. Das nächste Resultat besagt gerade, dass diese auch streng monoton steigend ist, wenn nicht alle x_k gleich gross sind.

Satz 5.1 (Potenzmittelungleichung)**.** *Sei λ ein Gewichtssatz und seien $x_1, \dots, x_n$ positiv. Für $r > s$ gilt*

$$M_\lambda^r(x_1, \dots, x_n) \geq M_\lambda^s(x_1, \dots, x_n).$$

Sind alle Gewichte positiv, dann gilt genau dann Gleichheit, wenn $x_1 = \dots = x_n$.

Beweis. Wir beginnen mit zwei Spezialfällen. Sei zuerst $r > s = 1$. Die Funktion $f(x) = x^r$ ist streng konvex auf $\mathbb{R}_{>0}$, folglich gilt nach Jensen

$$\lambda_1 x_1^r + \dots + \lambda_n x_n^r \geq (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)^r.$$

Nimmt man hier die r-te Wurzel, ergibt dies gerade die Behauptung. Die Gleichheitsbedingungen folgen ebenfalls aus Jensen. Sei nun $1 = r > s = 0$. Die Funktion $f(x) = \ln x$ ist streng konkav auf $\mathbb{R}_{>0}$, also gilt nach Jensen

$$\ln(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}) = \lambda_1 \ln(x_1) + \dots + \lambda_n \ln(x_n) \leq \ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n).$$

Wendet man auf beiden Seiten die Exponentialfunktion an, ergibt sich wieder das Gewünschte, die Gleichheitsbedingungen folgen ebenfalls aus Jensen. Wir unterscheiden nun drei Fälle.

(i) Sei $r > s \geq 0$. Für $s > 0$ setzen wir $t = \frac{r}{s}$, dann gilt nach dem schon Gezeigten

$$M_\lambda^r(x_1, \dots, x_n) = (M_\lambda^s(x_1^s, \dots, x_n^s))^{\frac{1}{s}} \geq (M_\lambda^1(x_1^s, \dots, x_n^s))^{\frac{1}{s}} = M_\lambda^s(x_1, \dots, x_n).$$

Für $s = 0$ hingegen erhalten wir

$$M_\lambda^r(x_1, \dots, x_n) = (M_\lambda^1(x_1^r, \dots, x_n^r))^{\frac{1}{r}} \geq (M_\lambda^0(x_1^r, \dots, x_n^r))^{\frac{1}{r}} = M_\lambda^0(x_1, \dots, x_n).$$

(ii) Sei $0 \geq r > s$. Dieser Fall folgt direkt aus i), wenn man die Identität

$$M_\lambda^r(x_1, \dots, x_n) = (M_\lambda^{-r}(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}))^{-1}$$

benützt.

(iii) Sei $r > 0 > s$. Kombination von i) und ii) ergibt

$$M_\lambda^r(x_1, \dots, x_n) \geq M_\lambda^0(x_1, \dots, x_n) \geq M_\lambda^s(x_1, \dots, x_n).$$

□

Den wichtigsten Spezialfall der Potenzmittelungleichung formulieren wir noch einmal einzeln.

Satz 5.2 (AM-GM gewichtet)**.** *Für jeden Gewichtssatz λ und alle positiven $x_1, \dots, x_n$ gilt*

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}.$$

Sind alle Gewichte positiv, dann gilt genau dann Gleichheit, wenn $x_1 = \dots = x_n$.

Satz 5.3 (Doppelte Potenzmittelungleichung)**.** *Seien λ und μ Gewichtssätze und seien $x_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ positiv. Für $r > s$ gilt*

$$M_\lambda^r\left(M_\mu^s(x_1), \ldots, M_\mu^s(x_m)\right) \leq M_\mu^s\left(M_\lambda^r(x_1), \ldots, M_\lambda^r(x_n)\right).$$

Sind alle Gewichte positiv, dann gilt genau dann Gleichheit, wenn $x_1 = \ldots = x_n$.

Beweis. Wir gehen ähnlich vor wie im Beweis der Potenzmittelungleichung und beweisen zuerst zwei Spezialfälle. Sei zunächst $r = 1$ und $s = 0$. Da die Ungleichung homogen ist, können wir

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{ij} = 1, \quad 1 \leq j \leq n$$

annehmen und müssen folgende Ungleichung beweisen:

$$\sum_{i=1} \lambda_i \cdot x_{i1}^{\mu_1} \cdots x_{in}^{\mu_n} \leq 1.$$

Nach gewichtetem AM-GM gilt $\sum_j \mu_j x_{ij} \geq x_{i1}^{\mu_1} \cdots x_{in}^{\mu_n}$ für $1 \leq i \leq m$. Aufsummieren ergibt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x_{i1}^{\mu 1} \cdots x_{in}^{\mu_n} \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1.$$

Als nächstes betrachten wir den Fall $r > s = 1$. Die zu beweisende Ungleichung ist äquivalent zu

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_{ij}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{ij}^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Beweis fertig? Trivial? □

5.2 Beweis von Bunching

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus gewichtetem AM-GM. Das Problem dabei ist die Konstruktion des richtigen Gewichtssatzes. Dies übernimmt das folgende Hilfsresultat.

Lemma 5.4. *Sei $(a_1, \ldots, a_n) \succ (b_1, \ldots, b_n)$. Es gibt nichtnegative Zahlen λ_σ mit Summe 1, sodass gilt*

$$\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = (b_1, \ldots, b_n).$$

Mit gewichtetem AM-GM ergibt sich

$$\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma x_1^{a_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{a_{\sigma(n)}} \geq \prod_{\sigma \in S_n} (x_1^{a_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{a_{\sigma(n)}})^{\lambda_\sigma} = x_1^{\sum_\sigma \lambda_\sigma a_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{\sum_\sigma \lambda_\sigma a_{\sigma(1)}} = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}.$$

Damit folgt nun einerseits

$$\sum_{sym} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma x_1^{a_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{a_{\sigma(n)}} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n},$$

andererseits ist aber

$$\begin{aligned}
\sum_{sym} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma x_1^{a_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{a_{\sigma(n)}} &= \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \sum_{sym} x_1^{a_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{a_{\sigma(n)}} \\
&= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \right) \cdot \sum_{sym} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = \sum_{sym} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n},
\end{aligned}$$

denn die symmetrische Summe nach dem ersten Gleichheitszeichen hängt nicht von der Permutation σ ab. Damit ist alles gezeigt. $\square$