Ungleichungen I

Thomas Huber

Aktualisiert: 1. Dezember 2015
vers. 1.0.0

Inhaltsverzeichnis

1 Algebraische Umformungen

1.1 Kein Quadrat ist negativ

Wir beginnen dieses Skript mit der einfachsten aller Ungleichungen, nämlich

$$x^2 \geq 0.$$

Letztendlich lässt sich jede Ungleichung darauf zurückführen, dass kein Quadrat negativ ist, dennoch ist dies im Allgemeinen kein sehr praktikables Verfahren. Bevor wir im nächsten Abschnitt aber auf die klassischen Ungleichungen eingehen, soll hier gezeigt werden, wie viel man schon allein mit dieser simplen Beobachtung zeigen kann.

Beispiel 1. *Sei a eine reelle Zahl. Zeige, dass gilt*

$$4a - a^4 \leq 3.$$

Lösung. Die Idee ist, dass man versucht, die Quadrate zu vervollständigen und den ganzen Ausdruck als Summe von Quadraten zu schreiben. Dabei ist es hilfreich zu merken, dass für $a = 1$ Gleichheit gilt. Nach einigem Probieren findet man, dass die Ungleichung äquivalent ist zu

$$(a^2 - 1)^2 + 2(a - 1)^2 \geq 0,$$

was sicher richtig ist. Gleichheit gilt nur für $a = 1$. □

Als nächstes Beispiel beweisen wir die berühmte Ungleichung zwischen den vier Mitteln im Spezialfall von zwei Variablen. Wir kommen im nächsten Abschnitt darauf zurück.

Beispiel 2. *Seien a und b positive reelle Zahlen, dann gilt*

$$\min(a, b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \max(a, b).$$

Lösung. Die dritte Ungleichung zum Beispiel ist äquivalent zu $0 \leq a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, was sicher stimmt. Ähnlich beweist man die übrigen Ungleichungen. □

Man nennt die vier Ausdrücke in obigem Beispiel der Reihe nach das harmonische, geometrische, arithmetische und quadratische Mittel von a und b, kurz HM, GM, AM, QM. In der Tat sind das AM und das QM sogar für alle reellen Zahlen definiert und die Ungleichung AM $\leq$ QM gilt allgemein, wie man sich leicht überlegt.

Beispiel 3. *Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Lösung. Nach Multiplikation mit 2 ist die Ungleichung äquivalent zu

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

$\square$

1.2 Faktorisieren, Terme umordnen

Einige, sogar schwierige, Ungleichungen lassen sich damit beweisen, dass man die involvierten Ausdrücke solange umformt, bis ihre Richtigkeit klar wird. Wir starten mit fogender Aufgabe:

Beispiel 4. *(AUO 75) Für alle $a, b, c \geq 0$ gilt*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a).$$

Lösung. Die Ungleichung ist *symmetrisch* in a, b, c, daher können wir $a \leq b \leq c$ annehmen. Ausserdem ist sie *homogen* vom Grad 3. Dies bedeutet folgendes: multipliziert man alle drei Variablen mit einem Streckfaktor λ, dann ändern sich beide Seiten der Ungleichung um den Faktor λ^3. Inbesondere folgt daraus: gilt die Ungleichung für die drei Zahlen a, b, c, dann auch für die Zahlen $\lambda a, \lambda b, \lambda c$. Daher können wir die Variablen geeignet skalieren und annehmen, dass $a = 1$ gilt. Wir setzen nun $b = 1 + x$ und $c = 1 + y$ mit $x, y \geq 0$. Durch einsetzen in die ursprüngliche Ungleichung und Äquivalenzumformungen erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
& x^3 + y^3 + x^2 + y^2 \geq x^2y + xy + xy^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^3 + y^3 + x^2 - xy + y^2 - xy(x + y) \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^3 + y^3 + (x - y)^2 + xy - xy(x + y) \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy) + xy + (x - y)^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x + y + 1)(x - y)^2 + xy \geq 0
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist nun offensichtlich richtig, da alle Terme auf der linken Seite nicht negativ sind. Gleichheit gilt genau für $x = y = 0$, also für $a = b = c$. $\square$

Das letzte Beispiel ist der Fall $p = 1$ der folgenden berühmten und wichtigen Ungleichung von Schur, auf die wir später zurückkommen werden:

Satz 1.1 (Schur)**.** *Seien x, y, z nichtnegative reelle Zahlen und $p > 0$. Dann gilt*

$$x^p(x - y)(x - z) + y^p(y - z)(y - x) + z^p(z - x)(z - y) \geq 0.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = y = z$ oder wenn zwei der drei Variablen gleich sind und die dritte gleich 0.

Beweis. Da die Ungleichung symmetrisch ist, können wir $x \geq y \geq z$ annehmen. Nach einigen Umformungen wird die Ungleichung zu

$$(x-y)\left(x^p(x-z) - y^p(y-z)\right) + z^p(x-z)(y-z) \geq 0.$$

Wegen $x \geq y \geq z$ ist hier jede Klammer auf der linken Seite nichtnegativ und die Ungleichung damit bewiesen. □

Beachte: Obwohl dieser Beweis sehr einfach aussieht, ist er schwierig zu finden. Insbesondere ist mir kein einziger schöner Beweis bekannt, der die Standardungleichungen des nächsten Abschnittes verwendet. Man sollte Schur daher als eine Ergänzung zu den nächsten Abschnitten betrachten. Wir kommen im Zusammenhang mit symmetrischen homogenen Ungleichungen auf diesen Aspekt zurück.

2 Das Standardrepertoire

2.1 HM-GM-AM-QM

Inhalt dieses Abschnittes ist die Ungleichung zwischen dem harmonischen, arithmetischen, geometrischen und quadratischen Mittel. Für Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ definiert man das

harmonische Mittel	HM	$\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$
geometrische Mittel	GM	$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$
arithmetische Mittel	AM	$\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$
quadratische Mittel	QM	$\sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$

Das harmonische und das gometrische Mittel definiert man nur für positive a_k, während das arithmetische und das quadratische für alle reellen Zahlen definiert sind. Folgende Ungleichung ist zentral:

Satz 2.1 (Ungleichung zwischen den Mitteln)**.** *Für positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt*

$$\min(a_1, \ldots, a_n) \leq \mathrm{HM} \leq \mathrm{GM} \leq \mathrm{AM} \leq \mathrm{QM} \leq \max(a_1, \ldots, a_n).$$

In jeder der fünf Ungleichungen gilt genau dann Gleichheit, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Ungleichung

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}.$$

Dazu gehen wir von beliebigen positiven Zahlen a_k aus und verändern diese so, dass die linke Seite konstant bleibt, die rechte Seite aber strikt grösser wird. Am Schluss sind alle a_k gleich und in obiger Formel gilt das Gleichheitszeichen. Daraus folgt direkt, dass die Ungleichung richtig ist, ebenso wie die Gleichheitsbedingungen.

Sei a das arithmetische Mittel der a_k. Wenn nicht alle a_k gleich a sind, dann gibt es zwei Indizes i und j mit $a_i < a < a_j$ (wieso?). Ersetze nun a_i und a_j durch

$$b_i = a, \quad b_j = a_i + a_j - a.$$

Es gilt $b_i + b_j = a_i + a_j$ und

$$b_i b_j = a(a_i + a_j - a) = a_i a_j + (a_j - a)(a - a_i) > a_i a_j.$$

Durch diese Substitution haben wir also die Anzahl der a_k erhöht, die gleich dem arithmetischen Mittel a sind, sodass die linke Seite der Ungleichung konstant bleibt, die rechte aber strikt grösser wird. Nach endlich vielen solchen Schritten sind alle a_k gleich und die rechte Seite hat den Wert a. Damit ist alles gezeigt.

Als nächstes zeigen wir HM $\leq$ GM. Substituiere $b_k = 1/a_k$, dann folgt dies direkt aus GM $\leq$ AM.

Die Ungleichung AM $\leq$ QM gilt für beliebige reelle a_k und lässt sich mit der gleichen Methode beweisen, wie GM $\leq$ AM. Dies sei dem Leser als Übung überlassen, ebenso wie die beiden übrigen Abschätzungen. $\square$

Die verwendete Beweismethode hat grosse Bedeutung in der gesamten Mathematik und wird später eingehender besprochen. Es ist wichtig, dass man stets die Gleichheitsbedingungen im Kopf hat, denn oft wird in Aufgaben danach gefragt. Jetzt folgen einige Beispiele.

Beispiel 5. *Für $a > 0$ gilt $a + a^{-1} \geq 2$.*

Lösung. Nach AM-GM ist $a + a^{-1} \geq 2\sqrt{a \cdot a^{-1}} = 2$. $\square$

Beispiel 6. *Für alle $a, b, c \geq 0$ gilt*

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Lösung. Indem man AM-GM auf jeden Faktor einzeln anwendet, erhält man

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca} = abc.$$

Multipliziert man dies mit 8, erhält man die gewünschte Ungleichung. Gleichheit gilt nur für $a = b = c$. $\square$

Beispiel 7. *Für die positiven Zahlen x, y, z gelte $x+y+z=1$. Beweise die Ungleichung*

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\geq\frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}.$$

Lösung. Es gilt $1-x=y+z$ und $1+x=2x+y+z$, analog für die anderen Terme. Nach AM-HM ist nun

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\geq\frac{4}{(x+y)+(y+z)}=\frac{4}{x+2y+z},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x+y=y+z$, also wenn $x=z$. Analog dazu gilt auch

$$\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq\frac{4}{y+2z+x},$$
$$\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\geq\frac{4}{z+2x+y}.$$

Addiert man diese drei Ungleichungen und teilt durch 2, erhält man genau die gegebene Ungleichung. Das Gleichheitszeichen steht nur für $x=y=z$. □

Oft muss man AM-GM sehr geschickt anwenden, um zum Ziel zu kommen. Es ist nicht immer auf den ersten Blick klar, welche Terme man gruppieren und abschätzen muss. Auch hierzu ein Beispiel.

Beispiel 8. *Für $a, b, c > 0$ gilt*

$$a^2b+b^2c+c^2a\leq a^3+b^3+c^3.$$

Lösung. Nach AM-GM ist

$$a^3+a^3+b^3\geq 3\sqrt[3]{a^3\cdot a^3\cdot b^3}=3a^2b.$$

Ähnlich zeigt man $2b^3+c^3\geq 3b^2c$ und $2c^3+a^3\geq 3c^2a$. Addition liefert das Gewünschte. □

In solche Fällen muss man sich überlegen, wie die Exponenten auf beiden Seiten verteilt sind. Daraus kann man rekonstruieren, wieviele Terme von welcher Sorte man mit AM-GM verwursten muss.

2.2 Cauchy-Schwarz

Eine weitere fundamentale Ungleichung ist jene von Cauchy-Schwarz (CS). Man kann mit ihr tatsächlich die meisten Ungleichungen beweisen, oder zumindest vereinfachen. Allerdings gibt es diverse Einsatzmöglichkeiten dieser Ungleichung und es ist für AnfängerInnen oft nicht einfach, die richtige zu finden. Da hilft nur Übung. Zuerst schreiben wir sie aber mal hin.

Satz 2.2 (Cauchy-Schwarz)**.** *Für alle reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ gilt*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn die Vektoren $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ kollinear sind, also wenn einer ein skalares Vielfaches des anderen ist.

Beweis. Die Differenz der beiden Seiten ist gleich (nachrechnen!)

$$\sum_{i<j} (a_ib_j - a_jb_i)^2,$$

also nicht negativ. Gleichheit gilt genau dann, wenn $a_ib_j = a_jb_i$ für alle $i < j$. Dies ist äquivalent zur Existenz einer reellen Zahl λ mit $a_i = \lambda b_i$ für alle i oder mit $b_i = \lambda a_i$ für alle i. Dies nachzuprüfen sei dem Leser überlassen. □

Definiert man die beiden Vektoren $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ und $\overrightarrow{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, kann man CS auch schreiben als

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \leq \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\|,$$

was für $n = 3$ vielleicht aus der Schule bekannt ist (links steht das Skalarprodukt von zwei Vektoren).

Beispiel 9. *Seien $x_1, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen. Zeige, dass gilt*

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Lösung. Dies ist nichts anderes als CS mit $a_k = \sqrt{x_k}$ und $b_k = 1/\sqrt{x_k}$. Aus der Gleichheitsbedingung für CS folgt unmittelbar, dass das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $x_1 = \ldots = x_n$ (nachrechnen!). □

Beispiel 10. *Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x^2+y^2+z^2 = 1$. Bestimme das Maximum von $x+2y+3z$.*

Lösung. Nach CS gilt

$$(x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + 3^2) \geq (x + 2y + 3z)^2,$$

wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ also $|x + 2y + 3z| \leq \sqrt{14}$. Gleichheit gilt dann, wenn die beiden Vektoren (x, y, z) und $(1, 2, 3)$ kollinear sind. Eine kurze Rechnung zeigt, dass dies für $(x, y, z) = \pm(1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14})$ der Fall ist. Nur das + Zeichen führt zum Maximum $\sqrt{14}$. □

Beispiel 11. *Zeige, dass für $a, b, c > 0$ gilt*

$$\frac{a}{2b + 3c} + \frac{b}{2c + 3a} + \frac{c}{2a + 3b} \geq \frac{3}{5}\,.$$

Lösung. Sei A die linke Seite der Ungleichung und setze $B = a(2b+3c) + b(2c+3a) + c(2a+3b)$. Nach CS gilt
$$A \cdot B \geq (a+b+c)^2.$$
Also wissen wir $A \geq (a+b+c)^2/B$ und es genügt zu zeigen, dass die rechte Seite $\geq 3/5$ ist. Rechnen wir es aus:

$$\begin{aligned} 3B &\leq 5(a+b+c)^2 \\ \Leftrightarrow \quad 15(ab+bc+ca) &\leq 5(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) \\ \Leftrightarrow \quad ab+bc+ca &\leq a^2+b^2+c^2. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist richtig, wie wir bereits wissen (verwende z.B. AM-GM oder CS, siehe Beispiel 3). Damit ist alles gezeigt. Gleichheit gilt für $a = b = c$, wie man sich leicht überlegt, wenn man die Argumentation verfolgt. □

2.3 Geordnete Folgen

In diesem Abschnitt stellen wir zwei weitere wichtige Ungleichungen vor, die mannigfach Anwendung finden. Im Gegensatz zu den bisherigen Resultaten geht hier eine Ordnung der involvierten Grössen mit in die Betrachtungen ein, was zusätzliche Möglichkeiten (aber auch Probleme) schafft. Die erste der beiden Ungleichungen ist intuitiv klar. Mal angenommen, wir hätten je einen Haufen 10er, 20er und 50er Noten und könnten von einem Haufen eine, von einem anderen vier und vom dritten Haufen sechs Noten auswählen und behalten. Wieviele Noten würden wir von welchem Haufen nehmen? Na...? Hier stehts mathematisch:

Satz 2.3 (Hauptsatz). *Sei $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zwei Folgen reeller Zahlen, und sei $c_1, c_2, \ldots, c_n$ eine Umordnung der Folge b_k. Dann ist die Summe*

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k c_k$$

am grössten, wenn a_k und c_k gleich geordnet sind und sie ist am kleinsten, wenn a_k und c_k entgegengesetzt geordnet sind.

Beweis. Nehme an, es gibt zwei Indizes i und j, sodass $a_i > a_j$, aber $c_i < c_j$. Durch vertauschen der beiden Folgeglieder c_i und c_j ändert sich der Wert der Summe um

$$(a_i c_j + a_j c_i) - (a_i c_i + a_j c_j) = (a_i - a_j)(c_j - c_i) > 0.$$

Indem wir endlich viele solche Vertauschungen vornehmen, können wir die Folge c_k stets gleich wie die Folge a_k ordnen. Dabei erhöht sich der Wert der Summe bei jeder Vertauschung. Dies beweist die erste Behauptung (vgl. Beweis AM-GM). Analog zeigt man, dass die Summe am kleinsten ist, wenn a_k und c_k entgegengesetzt geordnet sind. □

Bevor wir zu den Beispielen kommen, führen wir eine praktische Notation ein:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Beispiel 12. *Zeige, dass für alle $a, b, c \geq 0$ gilt*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Lösung. Die Folgen a, b, c und a^2, b^2, c^2 sind gleich geordnet, also folgt aus dem Hauptsatz

$$a^3 + b^3 + c^3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix} = a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Dies ist genau die zu beweisende Ungleichung. □

Beispiel 13. *Sei $a_1, \ldots, a_n > 0$ und reelle Zahlen mit Summe s. Zeige, dass gilt*

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \ldots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Lösung. Wir bezeichnen die linke Seite mit A. Die Folgen $a_1, \ldots, a_n$ und $1/(s-a_1), \ldots, 1/(s-a_n)$ sind gleich geordnet, also folgt aus dem Hauptsatz für $2 \leq k \leq n$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \dfrac{1}{s-a_1} & \cdots & \dfrac{1}{s-a_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{k-1} \\ \dfrac{1}{s-a_1} & \dfrac{1}{s-a_2} & \cdots & \dfrac{1}{s-a_n} \end{bmatrix}.$$

Aufsummieren dieser $n-1$ Ungleichungen ergibt nun

$$(n-1)A = \frac{s - a_1}{s - a_1} + \ldots + \frac{s - a_n}{s - a_n} = n,$$

dies ist die gewünschte Ungleichung. □

Manchmal ist es nützlich, mehr als nur zwei Folgen zu betrachten. Wir dehnen die Definition der grossen Klammer auf mehr als zwei Folgen aus:

$$S = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \cdots r_k.$$

Aus dem Hauptsatz folgt leicht mit vollständiger Induktion nach der Anzahl Folgen das allgemeinere Resultat

Satz 2.4 (Hauptsatz, verallgemeinert). *Die oben definierte Summe S nimmt den grösstmöglichen Wert an, wenn die Folgen $a_k, b_k, \ldots, r_k$ alle gleich geordnet sind.*

Beispiel 14. *Seien $x_1, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen. Zeige, dass gilt*

$$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \ldots + x_n^{n+1} \geq x_1 x_2 \cdots x_n (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Lösung. Es gilt

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_1 \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

□

Als nächstes beweisen wir die zweite wichtige Ungleichung, in der es um geordnete Folgen geht, die Ungleichung von Chebychef.

Satz 2.5 (Chebychef)**.** *Sind $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ gleich geordnete Folgen, dann gilt*

$$\frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}.$$

Sind die beiden Folgen entgegengesetzt geordnet, dann gilt dieselbe Ungleichung mit umgedrehten Ungleichheitszeichen.

Beweis. Da beide Folgen gleich geordnet sind, folgen aus dem Hauptsatz die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n, \\ a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n &\geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \ldots + a_n b_1, \\ a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n &\geq a_1 b_3 + a_2 b_4 + \ldots + a_n b_2, \\ &\vdots \\ a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \ldots + a_n b_{n-1}. \end{aligned}$$

Addieren dieser Ungleichungen und faktorisieren ergibt

$$n(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) \geq (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n),$$

dies ist die erste Behauptung. Analog beweist man den Fall entegengesetzter Ordnung. □

Beispiel 15. *Seien x, y, z positive reelle Zahlen mit $xyz = 1$. Beweise, dass gilt*

$$\frac{x-1}{\sqrt{y+z}} + \frac{y-1}{\sqrt{z+x}} + \frac{z-1}{\sqrt{x+y}} \geq 0.$$

Lösung. Die Folgen x, y, z und $1/\sqrt{y+z}, 1/\sqrt{z+x}, 1/\sqrt{x+y}$ sind gleich geordnet. Mit Chebychef folgt somit

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}} &\geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{z+x}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right) \\ &\geq \sqrt[3]{xyz}\left(\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{z+x}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right),\end{aligned}$$

dabei haben wir in der zweiten Abschätzung noch AM-GM verwendet. Subtrahiert man die rechte Seite von der linken und benützt die Nebenbedingung $xyz = 1$, folgt gerade die gewünschte Ungleichung. □

3 Die Trickkiste

In diesem Kapitel geht es um allgemeine Ideen, die für die Lösung von Ungleichungen sehr wichtig und nützlich sind. Oft hat eine Ungleichung innere Symmetrien ganz verschiedener Art, was die Lösung erheblich vereinfachen können. Oder sie ist mit den bis jetzt besprochenen Standardungleichungen nicht angreifbar, weil keine geordneten Folgen sichtbar sind, das Ungleichheitszeichen in die falsche Richtung zeigt, um Cauchy Schwarz anwenden zu können, oder weil jede AM-GM Abschätzung sofort zu falschen Ungleichungen führt. Harte Fälle eben. Hier können subtilere Tricks helfen, die man aber erst einmal kennen lernen muss, um sie im konkreten Anwendungsfall auch wirklich verwenden zu können. Diese vorzustellen, ist Ziel der folgenden Abschnitte.

3.1 Symmetrie

Beginnen wir mit der Symmetrie. Einen Ausdruck in n Variablen nennt man (vollständig) *symmetrisch*, falls er sich nicht ändert, wenn man die Variablen in beliebiger Weise permutiert. Eine Ungleichung heisst *symmetrisch*, wenn sie sich bei Vertauschung der Variablen nicht ändert. Die meisten der bis jetzt besprochenen Ungleichungen sind symmetrisch. Insbesondere ist HM-GM-AM-QM eine symmetrische Ungleichung. Cauchy-Schwarz ist keine ganz symmetrische Ungleichung. Aber immerhin behält sie die gleiche Form, wenn man die a_k beliebig vertauscht und gleichzeitig die b_k in derselben Weise vertauscht.

Das Nützliche an der Symmetrie ist nun das folgende: Wenn wir eine symmetrische Ungleichung in n Variablen $x_1, \ldots x_n$ haben, dann können wir oBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) annehmen, dass $x_1 \geq \ldots \geq x_n$ ist. Das heisst, wir können die Variablen beliebig der Grösse nach ordnen. Ist dies nämlich nicht der Fall, dann vertauschen wir die Variablen so, dass die grösste an der Stelle von x_1 steht, die zweitgrösste an der Stelle von x_2 etc. und benennen die Variablen anschliessend um (versucht euch das klar zu machen!). Dies ist zwar selten von direktem Nutzen, aber es hilft dem Auge, gleichgeordnete Folgen zu finden, auf die man dann den Hauptsatz oder Tchebychef loslassen kann.

Hier sind zwei Beispiele von nicht symmetrischen Ungleichungen:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+c)(b+d)},$$

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3x_4} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1x_2} \leq n - 1.$$

Das erste Beispiel behält immerhin dieselbe Form, wenn man a mit b und gleichzeitig c mit d vertauscht. Wir können auch a mit c und b mit d vertauschen. Wegen diesen Symmetrien können wir zum Beispiel oBdA annehmen, dass a die grösste (oder kleinste) der vier Zahlen ist.

Das zweite Beispiel behält seine Form, wenn wir beliebig oft die Vertauschungen $x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n \to x_1$ ausführen. Man nennt Ungleichungen mit dieser Invarianz *zyklisch* symmetrisch. Zyklische Symmetrie spielt eine wichtige Rolle bei den Ungleichungen, denn sie erlaubt einem zumindest oBdA anzunehmen, dass x_1 die grösste (kleinste) der n Zahlen ist. Dies kann man oft bei Induktionsbeweisen nach der Anzahl Variablen verwenden.

Es lässt sich wohl mathematisch nicht genau erklären, wieso symmetrische Ungleichungen einfacher zu lösen sind als andere. Die Erfahrung zeigt dies aber klar. Vielleicht liegt es daran, dass alle Standardungleichungen hochgradig symmetrisch sind, und dass man beim Beweis einer nicht symmetrischen Ugleichung eben auch asymmetrisch argumentieren muss.

Beispiel 16. *Seien a, b, c reelle Zahlen. Zeige:*

$$\min(a+b-2c, b+c-2a, c+a-2b) \leq \min(a-b, b-c, c-a).$$

Lösung. Die linke Seite ist symmetrisch, die rechte aber nur zyklisch symmetrisch. Die Ungleichung ist also invariant unter dem Shift $a \to b \to c \to a$, daher können wir annehmen, dass a die grösste der drei Zahlen ist. Man rechnet nun nach, dass die linke Seite in diesem Fall gleich $b + c - 2a$ ist. Ausserdem gilt $a - b \geq c - a$, daher ist die rechte Seite entweder gleich $c - a$ oder gleich $b - c$ (beide Fälle sind möglich). Im ersten Fall lautet die Ungleichung $b + c - 2a \leq c - a$, oder vereinfacht $b \leq a$, ist also nach Annahme richtig. Im zweiten Fall lautet sie $b+c-2a \leq b-c$, also $2c \leq 2a$, was ebenfalls stimmt. □

3.2 Homogenität

Eine andere Art der Invarianz einer Ungleichung ist die Homogenität. Man nennt einen Ausdruck $A(x_1, \ldots, x_n)$ in n Variaben *homogen* vom Grad k, wenn für alle $\lambda > 0$ und alle $x_1, \ldots, x_n$ gilt

$$A(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k A(x_1, \ldots, x_n).$$

Das heisst, wenn man alle Variablen mit dem Faktor λ streckt, dann ändert sich der ganze Ausdruck um den Faktor λ^k. Eine Ungleichung heisst homogen vom Grad k, wenn beide Seiten es sind. Der Vorteil an homogenen Ungleichungen ist, dass man die Variablen geeignet skalieren kann, ohne die Allgemeinheit der gestellten Aufgabe einzuschränken. Denn wenn die Ungleichung für $x_1, \ldots, x_n$ richtig ist, dann auch für $\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n$. Man kann daher zum Beispiel annehmen, dass $x_1 + \ldots + x_n = 1$ gilt, oder dass $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 3$ ist, oder dergleichen. Ist dies nämlich nicht der Fall, dann strecke man alle Variablen mit einem geeigneten Faktor $\lambda > 0$, vergleiche dazu die Lösung von Beispiel 4. Als weiteres Beispiel geben wir einen alternativen Beweis für CS:

Beispiel 17. *Für alle reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ gilt*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2.$$

Lösung. Wenn wir alle a_k und b_k durch ihre Absolutbeträge ersetzen, bleibt die linke Seite gleich, die rechte wird höchstens grösser. Wir können uns daher auf den Fall $a_k \geq 0$ und $b_k \geq 0$ beschränken. Die Ungleichung ist homogen vom Grad 2 in den Variablen $a_1, \ldots, a_n$. Wir können daher annehmen, dass $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1$ gilt. Ebenso können wir $b_1^2 + \ldots + b_n^2 = 1$ annehmen. Wir müssen nun zeigen, dass

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq 1$$

gilt (daraus folgt die ursprüngliche Ungleichung, da alle Variablen nichtnegativ sind). Dies ergibt sich aber einfach aus AM-GM: für $1 \leq k \leq n$ ist $a_kb_k \leq (a_k^2 + b_k^2)/2$. Aufsummieren liefert

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{2} + \frac{b_1^2 + \ldots + b_n^2}{2} = 1.$$

□

In diesem Beispiel haben wir die Ungleichung wesentlich vereinfacht durch die *Dehomogenisierung*, also durch die Annahmen $\sum a_k^2 = \sum b_k^2 = 1$. Ein ähnlicher Beweis der ursprünglichen Ungleichung würde nicht funktionieren. Nicht immer ist dehomogenisieren aber von Vorteil. Man betrachte etwa folgendes Beispiel: Für $a, b, c > 0$ gilt folgende Ungleichung:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Diese Ungleichung ist homogen vom Grad 0, daher kann man zum Beispiel $abc = 1$ annehmen. Zusammen mit dieser *Nebenbedingung* ist die Ungleichung dann äquivalent zu

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8/a}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8/b}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8/c}} \geq 1.$$

Dies mag einfacher aussehen als die ursprüngliche Ungleichung, denn in den drei Termen links kommt jeweils nur noch eine einzige Variable vor. Dies wurde allerdings teuer erkauft, denn die eingeschleppte Nebenbedingung ist schwierig zu handhaben. Ausserdem sind sämtliche Standardungleichungen homogen. Die Ungleichung zwischen den Mitteln ist homogen vom Grad 1, Hauptsatz, Chebychef und CS sind (in der hier vorgestellten Form) homogen vom Grad 2. Will man eine Ungleichung mit den Methoden dieses Kapitels beweisen, ist es daher selten von Vorteil, sie extra unhomogen zu machen. In der Tat geht man meist den umgekehrten Weg und *homogenisiert* eine Ungleichung mit Hilfe einer gegebenen Nebenbedingung.

Beispiel 18. *Seien x, y, z positive reelle Zahlen mit $xyz = 1$. Zeige, dass gilt*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z.$$

Lösung. Es genügt zu zeigen, dass für alle positiven Zahlen x, y, z gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \sqrt[3]{xyz}(x + y + z).$$

Dies impliziert nämlich die ursprüngliche Ungleichung wegen der Nebenbedingung $xyz = 1$. Diese neue Ungleichung ist homogen (vom Grad 2) und hat als praktischen Zusatzeffekt auch keine Nebenbedingung mehr, man sagt dem *Homogenisierung* der ursprünglichen Ungleichung. Der Beweis verwendet nun erst AM-QM (oder Chebychef) und dann AM-GM:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{x + y + z}{3} \cdot (x + y + z) \geq \sqrt[3]{xyz}(x + y + z).$$

□

Weitere Beispiel zur Homogenisierung findet man in Beispiel 7 und der dritten Lösung zu Beispiel I.

3.3 Substitutionen

Manchmal wird eine Ungleichung einfacher, wenn man die alten Variablen durch geeignete neue ersetzt, siehe Beispiel 4. Man macht eine *Substitution.* Dabei ist aber genau darauf zu achten, dass eventuelle Nebenbedingungen richtig übersetzt werden, beziehungsweise ob neue Nebenbedingungen entstehen. Man muss sich auch überlegen, was der Definitionsbereich der neuen Variablen ist. Es folgen Beispiele.

Beispiel 19. *Seien x, y, z positive reelle Zahlen mit $x+y+z = xyz$. Beweise die folgende Ungleichung:*

$$\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} + \frac{1}{1 + z^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Lösung. Das Problem hier ist natürlich die unsägliche Nebenbedingung $x + y + z = xyz$. Die Ungleichung damit direkt zu homogenisieren ist schwierig, da die Nebenbedingung ja ebenfalls inhomogen ist. Wir wählen daher einen anderen Weg und führen neue Variablen ein, für welche die Nebenbedingung eine viel einfachere Form annimmt.
Beachte, dass die Nebenbedingung äquivalent ist zu $1/(xy) + 1/(yz) + 1/(zx) = 1$. Es liegt daher nahe, die Substitution $a = 1/(xy)$, $b = 1/(yz)$ und $c = 1/(zx)$ durchzuführen,

offenbar gilt dann $a, b, c > 0$ und $a + b + c = 1$. Auserdem ist $x^2 = b/(ac)$, $y^2 = c/(ba)$ und $z^2 = a/(cb)$, damit können wir die Ungleichung auf die neuen Variablen umschreiben und gleichzeitig homogenisieren, es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \frac{ac}{ac+b} = \frac{ac}{ac+b(a+b+c)} \\ &= \frac{ac}{(a+b)(b+c)} = \frac{ac(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.\end{aligned}$$

Die analogen Rechnungen für die anderen Summanden liefern nun eine homogene Ungleichung *ohne* Nebenbedingung. Nach Multiplikation mit dem gemeinsamen(!) Nenner ist sie äquivalent zu

$$ac(a+c) + ba(b+a) + cb(c+b) \geq \frac{3}{4}(a+b)(b+c)(c+a).$$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen ergibt schliesslich

$$a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2c + a^2c \geq 6abc,$$

was einfach aus AM-GM folgt. □

Eine Nebenbedingung, die recht oft bei Ungleichungen mit drei Variablen auftaucht, ist $abc = 1$ (oder $= k$ für eine geeignete Zahl $k > 0$). In der Regel ist sie nicht ganz einfach zu handhaben, es gibt aber einige Tricks, die wir jetzt vorstellen. Zuerst kann man versuchen, ob eine Substitution der Form $x = 1/a$, $y = 1/b$, $z = 1/c$ die Ungleichung vereinfacht. Der Vorteil ist, dass die Nebenbedingung (im Wesentlichen) dieselbe bleibt. In der Praxis aber viel wichtiger ist folgende Substitution:

$$a = \frac{x}{y}, \qquad b = \frac{y}{z}, \qquad c = \frac{z}{x},$$

wobei $x, y, z > 0$ sind. Dies ist eben gerade deshalb möglich, weil $abc = 1$ gilt, und offensichtlich sind x, y, z nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt, man kann z.B. $x = a, y = 1, z = 1/b$ wählen. Für die neuen Variablen besteht nun *keine* Nebenbedingung mehr, in der Regel lassen sich Ungleichungen auf diese Weise elegant homogenisieren. Zu beachten ist allerdings Folgendes: diese Substitution enthält nur eine *zyklische* Symmetrie, dies ist je nach Situation mehr oder weniger von Vorteil. Ist die zu beweisende Ungleichung symmetrisch, dann wird sie nach Einführung der neuen Variablen in der Regel nur noch zyklisch symmetrisch sein. Umgekehrt können aber zyklische Ungleichungen mit dieser Substitution unter Umständen völlig symmetrisch werden! Ausserdem kann man diese Substitution auch mit der anderen möglichen zyklischen Symmetrie ausstatten, nämlich

$$a = \frac{y}{x}, \qquad b = \frac{z}{y}, \qquad c = \frac{x}{z}.$$

Meist funktioniert die eine recht gut, die andere nicht! Welche die richtige ist, muss man ausprobieren, es kommt eben auf die Symmetrie in der Ungleichung an. Schliesslich sei noch erwähnt, dass es natürlich auch eine symmetrische Variante davon gibt, halt einfach

$$a = \frac{\sqrt{xy}}{z}, \qquad b = \frac{\sqrt{yz}}{x}, \qquad c = \frac{\sqrt{zx}}{y}.$$

Nun ist aber Zeit für ein Beispiel.

Beispiel 20. *Seien a, b, c positive Zahlen mit $abc = 1$. Zeige, dass gilt*

$$\frac{a}{\left(1 + a + \frac{1}{b}\right)^2} + \frac{b}{\left(1 + b + \frac{1}{c}\right)^2} + \frac{c}{\left(1 + c + \frac{1}{a}\right)^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Lösung. Wohl nicht ganz unerwartet substituieren wir $a = x/y$, $b = y/z$ und $c = z/x$. Nun gilt

$$\frac{a}{\left(1 + a + \frac{1}{b}\right)^2} = \frac{xy}{(x + y + z)^2},$$

analog für die anderen Terme. Durch diese Substitution haben wir also erstens die Ungleichung homogenisiert, zweitens symmetrisiert und drittens erreicht, dass alle Nenner gleich sind, optimal. Zu zeigen bleibt nur

$$3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2,$$

was nach Vereinfachen klar ist (Beispiel 3). □

Der Leser möge sich selber davon überzeugen, dass die beiden anderen oben erwähnten Substitutionen wesentlich kompliziertere Terme hinterlassen, sie sind hier weniger geeignet.

Beispiel 21. *Zeige, dass für alle $a, b, c > 0$ gilt*

$$\frac{a + b}{a + 2c + b} + \frac{b + c}{b + 2a + c} + \frac{c + a}{c + 2b + a} < 2.$$

Lösung. Wir setzen zur Vereinfachung $x = a + b$, $y = b + c$ und $z = c + a$. Nach Konstruktion sind x, y, z dann positiv. Die Ungleichung lautet nun

$$\frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} < 2.$$

Diese ist aber falsch! Setze zum Beispiel $x = y = 1$ und $z = 4$. Wo ist der Fehler? Zu diesen Werten von x, y, z gehören die Werte $a = c = 2, b = -1$ und diese sind eben *nicht* alle positiv. Offenbar stammt also nicht jedes positive Tripel (x, y, z) von einem *positiven* Tripel (a, b, c). In der Tat haben wir durch diese Substitution eine Nebenbedingung eingeführt, sie lautet:

$$x + y > z, \quad y + z > x, \quad z + x > y,$$

dies bedeutet, dass x, y und z die Seitenlängen eines Dreiecks sind (vgl. Satz 3.1 unten). Nun ist die Ungleichung zwar einfacher, aber die Nebenbedingung ist in dieser Form überhaupt nicht handlich. Wir geben nun einen Beweis dieser Ungleichung, der auf einer völlig trivialen Abschätzung beruht. Es gilt nämlich

$$\frac{a+b}{a+2c+b} < \frac{a+b}{a+c+b},$$

und zusammen mit den beiden analogen Abschätzungen folgt die Behauptung. Die Konstante 2 ist übrigens bestmöglich, dies sieht man zum Beispiel, indem man $a = t^2$, $b = t$ und $c = 1$ setzt und t sehr gross werden lässt. □

Das letzte Beispiel zeigt ein Phänomen, das wir bis anhin grosszügig ignoriert haben. Es ist nämlich wichtig sich zu überlegen, was denn der Definitionsbereich der neuen Variablen ist! Lassen wir also die ersten zwei Beispiele nochmals revue passieren: In Beispiel 19 ist die Substitution $(a,b,c) = (1/(xy), 1/(yz), 1/(zx))$ bijektiv! Das bedeutet, dass zu jedem Tripel (a,b,c) positiver reeller Zahlen genau ein Tripel (x,y,z) positiver reeller Zahlen gehört. Zusammen mit der korrekt übersetzten Nebenbedingung ist die Ungleichung in den neuen Variablen also wirklich äquivalent zur ursprünglichen. In Beispiel 20 ist die Substitution *nicht* in diesem Sinn bijektiv, zu jedem Tripel (a,b,c) mit $abc = 1$ gehören ja unendlich viele Tripel (x,y,z). Dies liegt daran, dass wir gleichzeitig die lästige Nebenbedingung $abc = 1$ entfernt haben. Trotzdem ist es klar, dass die alte Ungleichung genau dann für alle $a,b,c > 0$ mit $abc = 1$ gilt, wenn die transformierte Ungleichung für alle $x,y,z > 0$ gilt. Wieder ist die Substitution also eine Äquivalenzumformung. Im letzten Beispiel stimmt das jetzt eben nicht mehr. Es würde sicher genügen, wenn man die Ungleichung in den neuen Variablen $x,y,z > 0$ allgemein beweisen könnte. Da sie aber gar nicht stimmt, ist diese Substitution eher unsinnig, denn die zusätzlich eingeschleppten Nebenbedingungen sind sehr unhandlich.

Machmal sind Ungleichungen in drei Variablen a,b,c ausgestattet mit der Nebenbedingung, dass a,b,c die Seitenlängen eines Dreiecks sein sollen. In solchen Fällen kommt eben gerade die Substitution aus dem letzten Beispiel zum Zug. Es gilt nämlich

Satz 3.1. *Für drei positive reelle Zahlen a,b,c ist äquivalent:*

(i) Es gibt ein Dreieck mit Seitenlängen a,b,c.

(ii) Es gilt

$$a+b > c, \qquad b+c > a, \qquad c+a > b.$$

(iii) Es existieren positive reelle Zahlen x,y,z mit

$$a = x+y, \qquad b = y+z, \qquad c = z+x.$$

Der einfache Beweis wird dem Leser überlassen. Die drei Zahlen x,y,z aus (iii) haben eine schöne geometrische Bedeutung. Betrachte ein Dreieck ABC mit Seitenlängen a,b,c. Der Inkreis berühre die Seiten AB, BC, CA in den Punkten P,Q,R. Dann ist $y = |CR| = |CQ|$, $y = |BQ| = |BP|$, $z = |AP| = |AR|$. Lässt auch zu, dass x,y,z gleich 0 sein können (nicht alle gleichzeitig natürlich), dann erhält man degenerierte Dreiecke.

Bei Ungleichungen für Seiten eines Dreiecks ist die Substitution (iii) ein Muss. Natürlich funktioniert sie nicht immer optimal, manchmal werden die Terme sehr kompliziert. Trotzdem, versuchen sollte man sie auf jeden Fall!

3.4 Das Ungleichheitszeichen drehen

Es gibt Ungleichungen, die allen Angriffen irgendwie trotzen, weil alle Standardabschätzungen in die falsche Richtung gehen. Dann wäre es super, wenn man das Ungleichheitszeichen irgendwie drehen könnte. Die Paradesituation ist, dass auf der einen Seite der Ungleichung eine Summe von Brüchen steht, auf der anderen etwas einfaches, meist eine Konstante. Und man soll die Summe von Brüchen gegen oben Abschätzen. Dann lässt sich CS nicht verwenden, oder wenn schon in die andere Richtung, was nicht sehr flexibel ist. Der Trick ist, das Ungleichheitszeichen zu drehen. Dazu nochmals Beispiel 19:

Beispiel 22. *Zeige, dass für alle $a, b, c > 0$ gilt*

$$\frac{a+b}{a+2c+b} + \frac{b+c}{b+2a+c} + \frac{c+a}{c+2b+a} < 2.$$

Lösung. Wie bereits erwähnt, können wir keine CS Abschätzungen der Form $\mathrm{LS} \cdot (\ldots) \geq \ldots$ machen, dies geht in die falsche Richtung. Stattdessen subtrahieren wir die ganze Ungleichung von einer Konstanten, das dreht das Ungleichheitszeichen. Sei A die linke Seite. Die Ungleichung ist äquivalent zu $3 - A > 1$. Ausserdem ist

$$\begin{aligned} B = 3 - A &= \left(1 - \frac{a+b}{a+2c+b}\right) + \left(1 - \frac{b+c}{b+2a+c}\right) + \left(1 - \frac{c+a}{c+2b+a}\right) \\ &= \frac{2c}{a+2c+b} + \frac{2a}{b+2a+c} + \frac{2b}{c+2b+a}. \end{aligned}$$

Nach CS gilt nun

$$B \cdot (2c(a+2c+b) + 2a(b+2a+c) + 2b(c+2b+a)) \geq 4(a+b+c)^2,$$

und es genügt zu zeigen, dass

$$4(a+b+c)^2 > 2c(a+2c+b) + 2a(b+2a+c) + 2b(c+2b+a).$$

Nach ausmultiplizieren und vereinfachen lautet dies $4(ab + bc + ca) > 0$, was richtig ist. $\square$

Man kann sich jetzt fragen, wieso wir die Konstante 3 genommen haben, wäre es nicht einfacher zu zeigen, dass $2 - A > 0$ ist? Nein, denn dann treten negative Terme in den Zählern auf, was die Sache erheblich verkompliziert. Es ist nicht immer auf den ersten Blick klar, welches die geeignete Konstante ist, man muss eben ein Bisschen experimentieren.

3.5 Induktion

Wenn man Ungleichungen in n Variablen beweisen soll, kann man dies oft mit Hilfe von Induktion nach n machen. Der Fall von 2 oder 3 Variablen ist meist schnell erledigt. Im Induktionsschritt muss man sich dann überlegen, wie sich das ganze ändert, wenn eine Variable dazukommt. In der Regel haben solche Ungleichungen eine zyklische Symmetrie. Daher kann man annehmen, dass die neue Variable x_{n+1} die kleinste oder grösste von allen ist. Dies ist meist von zentraler Bedeutung. Das folgende Beispiel ist recht kompliziert, zeigt aber alle typischen Probleme, die auftauchen.

Beispiel 23. *(CSP 01) Zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, $n \geq 2$ gilt*

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)\cdots(a_n^3+1) \geq (a_1^2a_2+1)(a_2^2a_3+1)\cdots(a_n^2a_1+1).$$

Lösung. Wir verwenden Induktion nach n. Für $n = 2$ gilt der Reihe nach

$$\begin{aligned}(a_1^3+1)(a_2^3+1) &\geq (a_1^2a_2+1)(a_2^2a_1+1)\\ a_1^3a_2^3+a_1^3+a_2^3+1 &\geq a_1^3a_2^3+a_1^2a_2+a_1a_2^2+1\\ a_1^2(a_1-a_2)+a_2^2(a_2-a_1) &\geq 0\\ (a_1^2-a_2^2)(a_1-a_2) &\geq 0\\ (a_1-a_2)^2(a_1+a_2) &\geq 0\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist richtig wegen $a_1, a_2 > 0$. Nun nehmen wir an, die Ungleichung sei richtig für n Variablen und beweisen sie für $n+1$. Ein Vergleich der Ungleichungen für n und $n+1$ Variablen zeigt, dass es genügt, folgendes zu beweisen:

$$a_{n+1}^3+1 \geq \frac{(a_n^2a_{n+1}+1)(a_{n+1}^2a_1+1)}{a_n^2a_1+1}.$$

Die Behauptung folgt dann mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung. Umformen liefert nun

$$\begin{aligned}(a_{n+1}^3+1)(a_n^2a_1+1) &\geq (a_n^2a_{n+1}+1)(a_{n+1}^2a_1+1)\\ a_{n+1}^3a_n^2a_1+a_n^2a_1+a_{n+1}^3+1 &\geq a_{n+1}^3a_n^2a_1+a_{n+1}a_n^2+a_{n+1}^2a_1+1\\ a_n^2(a_1-a_{n+1})+a_{n+1}^2(a_{n+1}-a_1) &\geq 0\\ (a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n) &\geq 0\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist im Allgemeinen falsch. Da die urpsrüngliche Ungleichung aber *zyklisch* symmetrisch ist, können wir oBdA annehmen, dass a_{n+1} die grösste der $n+1$ Variablen ist. In diesem Fall sind alle drei Faktoren links grösser oder gleich 0, und der Induktionsschritt ist vollständig. □

3.6 Termweise Abschätzen

Manche Ungleichungen erweisen sich als besonders hartnäckig und trotzen allen Angriffen mit Standardmethoden. In solchen Fällen kann es hilfreich sein, gewisse Terme quasi durch einfachere zu ersetzen. Also irgendwie gutartige Schranken für die einzelnen Terme zu finden. Solche Schranken sind in der Regel überhaupt nicht einfach zu erkennen, sie fallen sozusagen vom Himmel. Wir erklären an einigen Beispielen, was damit gemeint ist, und stellen gleichzeitig die wichtigsten Schrankentypen vor.

Beispiel 24. *(Ungarn 99) Seien $0 \leq x, y, z \leq 1$ reelle Zahlen. Beweise, dass gilt*

$$\frac{x}{1+y+zx}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{3}{x+y+z}.$$

Lösung. Das ist jetzt wieder so eine Ungleichung, wo das Ungleichheitszeichen in die falsche Richtung geht, um z.B. CS anzuwenden. Ausserdem ist sie sehr inhomogen und nur zyklisch symmetrisch, dafür aber mit dubiosen Nebenbedingungen ausgestattet. Was tun, also? Das Ungleichheitszeichen zu drehen ist ebenfalls nicht erfolgsversprechend, alles würde noch komplizierter werden. Wir beweisen stattdessen die folgende obere Schranke für die einzelnen Terme:

$$\frac{x}{1+y+zx} \leq \frac{x}{x+y+z}.$$

Dies ist nämlich äquivalent zu $1+xz \geq x+z$, also zu $(x-1)(z-1) \geq 0$, und das ist wegen $x, z \leq 1$ richtig. Diese und die analogen Abschätzungen zeigen, dass die linke Seite sogar höchstens gleich

$$\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1$$

ist. Dies impliziert wegen $x+y+z \leq 3$ natürlich die ursprüngliche Ungleichung. □

Der Leser mag sich jetzt zu recht fragen, wie man denn auf diese Idee kommen sollte. Ja, das ist eben genau das Problem, die Schranken sind oft schwierig zu erraten und ergeben sich nicht aus der Aufgabenstellung. Diese Technik ist aber äusserst mächtig und führt manchmal zu sehr kurzen Lösungen. Die Schranke in obigem Beispiel ist typisch und kann recht häufig verwendet werden. Allgemeiner kann man Schranken der Form

$$\frac{x^{\alpha}}{x^{\alpha}+y^{\alpha}+z^{\alpha}}$$

mit noch zu bestimmender Kontante α probieren. Die richtige Wahl von α ist dabei entscheidend und hier hilft oft ein wenig Analysis. Denn der Graph eines solchen abschätzenden Terms muss den Graphen der ursprünglichen Funktion in gewissem Sinne tangential berühren. Das nächste Beispiel wird das illustrieren. Ich kann hier nicht widerstehen, die offizielle Musterlösung der IMO 01-Ungleichung zu präsentieren. Man sollte sich aber keine Sorgen machen, wenn das nicht die erste Idee ist, die einem in den Sinn kommt. Lediglich ein einziger Teilnehmer (aus China) hat diese Lösung gefunden.

Beispiel 25. *(IMO 01) Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise die Ungleichung*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Lösung. Wir versuchen termweise abzuschätzen und wählen einen Ansatz der Form

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^r}{a^r+b^r+c^r}, \tag{1}$$

wobei r noch zu bestimmen ist. Ein solcher Ansatz hat bestimmt eine gewisse Chance, denn in der ursprünglichen Ungleichung gilt Gleichheit für $a=b=c$ und dies ist auch in (1) der Fall. Um nun r zu bestimmen, setzen wir $b=c=1$ in (1) und betrachten beide Seiten als Funktionen in a. Damit eine solche Abschätzung richtig sein kann, müssen sich die Graphen von beiden Seiten im Punkt $a=1$ tangential berühren, das heisst, die Steigungen (Ableitungen) der beiden Seiten müssen in diesem Punkt übereinstimmen. Eine kurze Rechnung zeigt nun, dass die Ableitung der linken Seite dort gleich $8/27$, diejenige der rechten Seite gleich $2r/9$ ist. Dies liefert den Wert $r=4/3$. (Beachte, alle bisherigen Überlegungen dienen lediglich der Motivation der Lösung und sind nicht wirklich Teil des Beweises, insbesondere ist die Verwendung von analytischen Methoden völlig ok und muss nicht gerechtfertigt werden.)
Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis von (1) für $r=4/3$. Hochmultiplizieren der Nenner und Vereinfachen liefert die äquivalente Ungleichung

$$a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3} \geq \sqrt{a^{8/3}+8a^{2/3}bc}.$$

Quadrieren und Vereinfachen ergibt schliesslich

$$b^{8/3}+c^{8/3}+2(ab)^{4/3}+2(bc)^{4/3}+2(ca)^{4/3} \geq 8a^{2/3}bc,$$

und dies folgt einfach aus AM-GM. Damit ist der Beweis von (1) und somit auch der ursprünglichen Ungleichung abgeschlossen, Gleichheit gilt genau dann, wenn $a=b=c$. □

Ein wenig anders funktioniert die Abschätzung im nächsten Beispiel.

Beispiel 26. *(USA 03) Seien a,b,c positive reelle Zahlen. Zeige, dass gilt*

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

Lösung. Die Ungleichung ist homogen, wir können daher $a+b+c=3$ annehmen. Damit gilt

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}=\frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9}=f(a).$$

Wir versuchen nun, den letzten Ausdruck durch eine lineare Funktion abzuschätzen. Wir wollen also Konstanten α und β finden, sodass zumindest für $0 \leq t \leq 3$ gilt $f(t) \leq l(t) = \alpha t+\beta$. Da für $a=b=c=1$ das Gleichheitszeichen steht, muss in der linearen Abschätzung für $f(t)$ bei $t=1$ ebenfalls Gleichheit gelten. Mehr noch: der Graph von l muss bei $t=1$ sogar tangential an den Graphen von f sein, damit eine solche Abschätzung richtig sein kann (der Leser überzeuge sich anhand einer Skizze von dieser Tatsache). Mit anderen Worten, wir ersetzen f durch die Tangente am Punkt $t = 1$. Die Konstanten α und β ergeben sich aus den Gleichungen $l(1) = f(1)$ und $l'(1) = f'(1)$. Eine kurze Rechnung zeigt $l(t) = 4/3(t+1)$. Um nun zu beweisen, dass $f(t) \leq l(t)$ gilt, multipliziert man die Nenner hoch und bringt alles auf eine Seite. Faktorisieren ergibt die äquivalente Ungleichung $(t-1)^2(4t+3) \geq 0$, die für $t \geq 0$ sicher richtig ist (der Faktor $(t-1)^2$ ist natürlich kein Zufall, wir haben $l(t)$ ja gerade so konstruiert). Damit folgt nun für die linke Seite der Ungleichung die Abschätzung

$$\frac{4}{3}(a+1) + \frac{4}{3}(b+1) + \frac{4}{3}(c+1) = \frac{4}{3}(a+b+c) + 4 = 8.$$

□

Die Ungleichung im letzten Beispiel besitzt noch viele andere Lösungen, die meisten sind aber wesentlich aufwändiger als die vorgestellte. Das Prinzip, komplizierte Funktionen in einer Variablen durch die Tangente an einem bestimmten Punkt zu ersetzen, ist oft anwendbar. Allgemeiner kann man auch nach quadratischen Abschätzungen oder solchen der Form $\alpha x + \beta/x$ Ausschau halten, je nach Zweck und eventuellen Nebenbedingungen eben. Stets sind dabei geometrische Überlegungen wie in den letzten beiden Beispielen von Vorteil, um die Konstanten zu bestimmen.

3.7 Beispiel I

In diesem Abschnitt geben wir ein Beispiel einer Ungleichung, die mit sämtlichen bisher besprochenen Methoden gelöst werden kann. Dies soll vor allem eines zeigen: Es gibt im Allgemeinen sehr viele Lösungswege. Sollte ein bestimmter Ansatz einmal nicht funktionieren, dann kann man es mit einem anderen versuchen.

Beispiel 27 (CH 03)**.** *Beweise für positive reelle Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$ die folgende Ungleichung:*

$$\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geq 2$$

Lösung. Wir setzen zur Abkürzung

$$A = \frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y}.$$

1. Zuerst CS, dann AM-QM:

$$\begin{aligned}
A = A \cdot 1 &= \left(\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y}\right)(x+y+z) \\
&\geq (\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2})^2 \\
&\geq \left(\sqrt{2} \cdot \frac{x+y}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{y+z}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{z+x}{2}\right)^2 \\
&= (\sqrt{2} \cdot (x+y+z))^2 = 2.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{y} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{z} + \frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right) + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{z^2}{y} + \frac{z^2}{y} + \frac{y^2}{z}\right) \\
&\geq x + x + y + y + z + z = 2,
\end{aligned}$$

wenn man AM-GM auf jede Klammer anwendet.

3. Homogenisieren und dann brute force!

$$\begin{aligned}
A \geq 2 &\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geq 2(x+y+z) \\
&\Leftrightarrow x^3y + x^3z + y^3x + y^3z + z^3x + z^3y \geq 2(x^2yz + y^2zx + z^2xy)
\end{aligned}$$

Letzteres folgt aus AM-GM, indem man die Ungleichung

$$\frac{x^3y + x^3z + y^3x + z^3x}{4} \geq \sqrt[4]{x^8y^4z^4} = x^2yz$$

sowie die dazu analogen aufsummiert.

4. AM-QM ergibt

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + z^2 - z^2 \geq 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 - z^2 = \frac{1}{3} - z^2.$$

Aus dieser und den analogen Ungleichungen folgt

$$\begin{aligned}
A &\geq \frac{\frac{1}{3} - z^2}{z} + \frac{\frac{1}{3} - x^2}{x} + \frac{\frac{1}{3} - y^2}{y} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - (x+y+z) \\
&\geq \frac{3}{x+y+z} - (x+y+z) = 3 - 1 = 2,
\end{aligned}$$

wenn man noch AM-HM benützt.

5. AM-QM ergibt

$$\frac{x^2+y^2}{z} \geq \frac{2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}{z} = \frac{(x+y)^2}{2z} = \frac{(1-z)^2}{2z} = \frac{1}{2z} - 1 + \frac{z}{2}.$$

Aus dieser und den analogen Ungleichungen folgt

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} - 3 + \frac{x+y+z}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{5}{2} \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{9}{x+y+z} - \frac{5}{2} = 2. \end{aligned}$$

wenn man noch AM-HM benützt.

6. Die Folgen $(x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2)$ und $(1/z, 1/x, 1/y)$ sind gleich geordnet, also folgt mit Tschebyschef

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{3}(x^2+y^2+y^2+z^2+z^2+x^2)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ &= \frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2+2(x^2+y^2+z^2)) \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ &\geq \frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)\frac{3}{x+y+z} \\ &= \frac{2}{3}(x+y+z)^2\frac{3}{x+y+z} = 2, \end{aligned}$$

wobei der erste Faktor in der zweiten Zeile mit AM-GM oder dem Hauptsatz oder CS und der zweite Faktor mit AM-HM abgeschätzt wird.

7. Die Folgen $(x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2)$ und $(1/z, 1/x, 1/y)$ sind gleich geordnet, also folgt mit dem Hauptsatz

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{x^2+y^2}{x} + \frac{y^2+z^2}{y} + \frac{z^2+x^2}{z} = x+y+z+\frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} \\ &= 1 + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z}, \end{aligned}$$

sowie analog

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{x^2+y^2}{y} + \frac{y^2+z^2}{z} + \frac{z^2+x^2}{x} = x+y+z+\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \\ &= 1 + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}. \end{aligned}$$

Addieren ergibt $2A \geq 2 + A$, also $A \geq 2$.

8. Anwenden von AM-GM auf jeden Summanden ergibt

$$A \geq \frac{2xy}{z} + \frac{2yz}{x} + \frac{2zx}{y}.$$

Die Folgen $(2xy, 2yz, 2zx)$ und $(1/z, 1/x, 1/y)$ sind gleich geordnet, also folgt mit dem Hauptsatz

$$A \geq \frac{2xy}{x} + \frac{2yz}{y} + \frac{2zx}{z} = 2(x+y+z) = 2.$$

9. Setze $s = x^2 + y^2 + z^2$, dann ist

$$\begin{aligned} A &= \frac{s-z^2}{z} + \frac{s-x^2}{x} + \frac{s-y^2}{y} = s\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - (x+y+z) \\ &= (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 1. \end{aligned}$$

Die Folgen (x^2, y^2, z^2) und $(1/x, 1/y, 1/z)$ sind gegensätzlich geordnet, also folgt mit Tschebyschef

$$A \geq 3\left(\frac{x^2}{x} + \frac{y^2}{y} + \frac{y^2}{y}\right) - 1 = 3/(x+y+z) - 1 = 2.$$

$\square$