Hinweise[1] zu Blatt 9

Aufgabe 1

Bemerke, dass $h_n \geq 0$ und $h_n \leq 2f$; benütze dominierte Konvergenz...

Aufgabe 2

Bei der Suche nach Gegenbeispiele: ziehe die Einsicht von Aufgabe 1 heran.

Aufgabe 3

Lösungswegvorschlag: Vorgehen in 4 Schritte:

1. Zeige, dass $\int_{[y;x)} f d\lambda = 0$ für alle $a < y \leq x \leq b$.
2. Zeige, dass $\int_U f d\lambda = 0$ für alle offene Mengen $U \subseteq (a;b)$. Dazu: vgl. Satz 2.32 im Skript (Man kann offene Intervallen darstellen als abzählbahre Vereinigung von halbohffenen Intervallen). Benütze dominierte Konvergenz.
3. Zeige, dass $\int_A f d\lambda = 0$ für alle messbare Mengen $A \subseteq (a;b)$. Approximiere A mit offenen Mengen. Benütze dominierte Konvergenz.
4. Zeige, dass $\int_{(a;b)} |f| d\lambda = 0$. Definiere Mengen A_+ und A_-...

Aufgabe 4

a. Sei $x \in X$ fix. Dass $f_n(x)$ NICHT gegen $f(x)$ konvergiert für $n \to \infty$ bedeutet, dass es existiert $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ es existiert $m > n$ so, dass $|f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon$. In anderen Worten:

$$x \in \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} \{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

c. Betrachte $f_n(x) = \chi_{\{x\in\mathbb{R}: x\geq n\}}$.

[1] Zuerst selber denken!