Hinweise[1] zu Blatt 8

Aufgabe 1

Zeige die Aussage zuerst für einfache Funktionen. Dann benütze Satz 3.12 und den Hinweis auf dem Blatt.

Aufgabe 2

Ein Paar lose Zutaten, die nützlich sein können:

- Man kann die Mengen definieren $A_n = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leq 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Für jede messbare Menge B gilt $\int_E f d\lambda = \int_{E\cap B} f d\lambda + \int_{E\cap B^c} f d\lambda$.
- Für die Mengen A_n definiert oben, $\int_{E\cap A_n^c} f d\lambda \geq 1/n\ \lambda(E \cap A_n^c)$.

Aufgabe 3

a. Behandle zuerst den Fall, dass $\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\})$ keine Nullmenge ist. Dann nehme an, $\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\})$ ist eine Nullmenge und betrachte $f_N = \sum_{n=1}^{N} n\chi_{A_n}$, wo $A_n = \{x \in X \mid f(x) = n\}$. Zeige, dass

$$\int f d\mu = ... = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_n).$$

Die Reihenfolge der Summation kann man geschickt umorden (warum?); es bleibt dann nur ein Schritt, um die Aufgabe fertig zu lösen...
b. Beachte: endliches Mass! Idee eines Beweises: approximiere f von oben und von unten mit Treppenfunktionen:

$$g(x) := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid f(x) \geq n\} \qquad h(x) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid f(x) \leq n\}$$

wobei wir abmachen, dass $\inf \emptyset = +\infty$.

[1] Zuerst selber denken!

Aufgabe 4

b. Die naïve Rechnung, die man machen möchte, ist:

$$\begin{aligned}\int_X f(x)d\mu &= \int_X \int_{[0,\infty)} \chi_{\{x|f(x)\geq t\}}(x,t)d\lambda d\mu \\ &\stackrel{*}{=} \int_{[0,\infty)} \int_X \chi_{\{x|f(x)\geq t\}}(x,t)d\mu d\lambda \\ &= \int_{[0,\infty)} \mu(\{x \mid f(x) \geq t\})d\lambda \\ &= \int_{[0,\infty)} gd\lambda\end{aligned}$$

wo $\chi_{\{x|f(x)\geq t\}}(x,t) = 1$ genau dann wenn x und t so sind, dass $f(x) \geq t$, und sonst ist $\chi_{\{x|f(x)\geq t\}}(x,t) = 0$. Dies geht nicht, da wir (mit unseren jetztigen Mittel), den Schritt mit "*" nicht begründen können.

Jedoch, man kann diese Rechnung machen wenn f eine einfache Funktion ist (Integrale werden zu Summen), und dann benütze man Satz 3.12 ...