Hinweise[1] zu Blatt 6

Aufgabe 1

a. Benütze (und begründe!) dass $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(\bigcup_{k\geq n} A_k\big)$.

Aufgabe 2

Keine Tipps hier im Moment.

Aufgabe 3

a. Löse zuerst teil b., dann ist diese Teilaufgabe schnell gelöst.
b. Für die, die es noch nicht angeschaut haben: `https://www.youtube.com/watch?v=cyW5z-M2yzw`

Aufgabe 4

a. Zum Beispiel, man kann die drei Implikationen "$ii) \Rightarrow iv) \Rightarrow iii) \Rightarrow ii)$" zeigen.

- Zu "$ii) \Rightarrow iv)$": Eine Strategie: Angenommen $ii)$ gilt, zeige, dass für eine Borelmenge A (d.h. $ii)$ trifft auf A zu) gilt, dass
$$\mu(A^c) = \mu(\mathbb{R}^n) - \sup\{\mu(C) : C \subseteq A, C \text{absgeschlossen}\}.$$
Dann $iv)$ folgt daraus, weil...
- Zu "$iv) \Rightarrow iii)$": Wähle eine aufsteigende Folge von kompakten Mengen B_k, $k \in \mathbb{N}$, s.d. $\mathbb{R}^n = \bigcup B_k$. Gegeben eine Borelmenge A, betrachte die Folge $A \cap B_k$...
- Zu "$iii) \Rightarrow ii)$": man kann wie bei "$ii) \Rightarrow iv)$" vorgehen... eine kleine Anpassung ist aber notwendig.

b. Sei R die Menge der Borelmengen die $ii)$ und $iii)$ erfüllen. Wie auf dem Aufgabenblatt vorgeschlagen:

- zeige, dass offene Mengen in R liegen.
- zeige, dass R eine σ-algebra ist. Dazu ist folgende Charakterisierung vielleicht hilfreich: R enthält die Borelmengen A s.d. für alle $\varepsilon > 0$ es existieren eine offene Menge U und eine abgeschlossene Menge C so, dass $C \subseteq A \subseteq U$ und $\mu(U/C) \leq \varepsilon$.

[1] Zuerst selber denken!