Hinweise[1] zu Blatt 5

Aufgabe 1

Das ist eine gute Übung um die Definitionen zu üben!

Aufgabe 2

Vorschlag: mache den Beweis mit folgender Struktur, bestehend aus drei Schritte:

1. $i) \Rightarrow ii)$
2. $ii) \Rightarrow iii)$
3. $iii) \Rightarrow i)$

(wobei "$i)$" die Aussage "A ist Lebesgue-messbar" aus der Aufgabenstellung ist, usw.).

Für den ersten Schritt, zeige die Aussage zunächst für den Fall, dass $\lambda_n^*(A) < \infty$. Dazu: nach Prop 2.31 gibt es eine Folge von kompakten Mengen K_j so, dass das $\lambda_n^*(K_j)$ dass Mass von A von unten appproximiert, und zwar immer genauer für aufsteigendes j (macht dies präzise!). Die Idee ist, dass man A_1 als $\bigcup K_j$ nehmen kann und A_2 als $A \backslash A_1$...

Für den Fall, dass $\lambda^*(A) = \infty$, betrachte die Mengen $A_k = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq k\}$, die beschränkt sind und deren Vereinigung A ist. Wende die Argumentation von oben auf jedes A_k an...

Für den zweiten Schritt: es gibt eine Naheliegende Wahl von B...

Übrigens: in der Mengentheorie, falls A und B zwei Mengen sind, so heisst die Menge $A\Delta B := A\backslash B \cup B\backslash A$ deren *symmetrische Differenz.*

Für den dritten Schritt: Zeigt, dass eine Teilmenge einer Nullmenge immer messbar ist (und dann auch Mass Null hat). Dann schreibt A als die Vereinigung von messbaren Mengen...

Aufgabe 3

Zu Teil $b)$: gegeben F, definiere ein äusseres Mass $\mu^* = \mu_F^*$ mit Hilfe einer ähnlichen Konstruktion wie die, die wir benützt haben, um das Lebesgue äussere Mass zu definieren.

Anleitung un Schritte: Zeige:

- μ^* ist ein äusseres Mass (nehmt Inspiration vom Beweis von Satz 2.26).

[1] Zuerst selber denken!

- $\mu^*((a;b]) = F(b) - F(a)$ (inklusive die Fälle, wo $a = -\infty$).
- $(a;b]$ ist μ^*-messbar für all $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in (a, \infty)$.
- die Einschränkung μ von μ^* auf die Borel σ-algebra ist ein Mass mit der Eigenschaft, dass $\mu((-\infty; b]) = F(b)$ für alle $b \in \mathbb{R}$, und dass dies μ eindeutig charakterisiert.

Aufgabe 4

Für Teil *a*) und *b*): nehmt wieder Inspiration vom Beweis von Satz 2.26.

Für Teil *c*): zeige $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ und $\mu^*(A) \geq \mu(A)$. Für Letzteres, nehme eine Überdeckung von A und konstruiere daraus eine Familie von Menge, die paarweise disjunkt sind und deren Vereingung A ist...

Für Teil *d*): man kann hier in wenigen Zeilen argumentieren...