Hinweise[1] zu Blatt 1

Aufgabe 1

- Es reicht zu zeigen, dass $\int_0^x \beta(s)y(s)ds \leq \int_0^x \alpha(s)\beta(s)\exp(\int_s^x \beta(r)dr)ds$ (warum?).
- Betrachte $\gamma(x) := \exp(-\int_0^x \beta(r)dr)\int_0^x \beta(s)y(s)ds$ und zeige, dass $\gamma(0) = 0$ und $\gamma'(x) = ...$ Folgere daraus, dass $\gamma'(x) \leq ...$, und, nach integration (von 0 bis x), dass somit auch $\gamma(x) \leq ....$
- Schliesse den Beweis ab unter Anwendung der Unlgeichung für γ...

Aufgabe 2

a.

Wende die differentielle Version des Lemmas von Gronwall auf die Funktion $1 + ||y(x)||^2$ an...

b.

Betrachte die Funktion $-y(x)$...

Aufgabe 3

a.

Zum physikalischen/geometrischen Bild: die rechte Seiten der beiden Differentialgleichungen beschreiben die Tangentialvektoren zu den Kurven $\varphi(x)$ und $\psi(x)$. Der Faktor $\alpha(\psi(x))$ is eine (ortsabhängige) skalare Streckung.

- Mann kann zuerst zeigen, dass $\mathrm{Im}\psi \subseteq \mathrm{Im}\varphi$. Definiere dazu eine Reparametrizierung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Kurve φ auf folgende geschickte Weise: nämlich definiere γ als die eindeutige Lösung von der AWP $\gamma'(x) = (\alpha\circ\varphi)(\gamma(x))$, $\gamma(x_0) = x_0$ (wieso Eindeutig?). Argumentiere dann mit Hilfe der reparametrizierte Kurve $\tilde{\psi} := \varphi \circ \gamma$...
- Für die Inklusion in der anderen Richtunh argumentiere mann analog...

b.

Satz 1.12...

[1] Zuerst selber denken!

Aufgabe 4

Das AWP kann explizit gelöst werden mithilfe einer geeigneten Substitution ($\phi(x) = |y(x)|^2$) (argumentiere, wieso man $y \neq 0$ annehmen darf...). Die erhaltene Lösung hängt vom Parameter ε ab. Mann untersuche dann das verhalten je nach dem, ob ε positiv oder negativ ist...