Dr. Christian Rohde
Urs Kollbrunner Zürich, Juni 2003

5. Übung zur Vorlesung

**Distributionen und Sobolevräume**

**Aufgabe 1** [Distributionenräume]
Man zeige, dass für $d \in \mathbb{N}$

$$C^{\infty\prime}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

gilt. Existieren singuläre Distributionen, die

(a) in allen Räumen,

(b) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ aber nicht in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,

(c) in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ aber nicht in $\mathcal{C}^{\infty\prime}(\mathbb{R}^d)$

enthalten sind?
Hinweis: $C^{\infty\prime}(\mathbb{R}^d)$ ist die Menge aller linearen Abbildungen $T : C^\infty(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{K}$, die stetig sind. Das heißt in diesem Fall, daß für alle Folgen $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$|\varphi_n|_{\alpha,K} \to 0 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^d,\, K \subset\subset \mathbb{R}^d$$

die Beziehung $|\langle T, \varphi_n\rangle| \to 0$ folgt.
Dabei ist für $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$|\varphi|_{\alpha,K} := \max_{\beta\in\mathbb{N}_0^d, |\beta|\leq|\alpha|} \left\{ \|\varphi^{(\beta)}\|_{L^\infty(K)} \right\}.$$

**Aufgabe 2**
Zeige, daß für $d > 1$ die Funktion $u : B_1(0) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x) = \ln(\ln\left(1 + \frac{1}{|x|}\right))$$

aus $W^{1,d}(B_1(0))$ ist.

**Aufgabe 3** [Leibnizregel]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Zeige, daß für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}$, $p > 1$ auch $\varphi u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ liegt und

$$D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^d, \beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} u$$

gilt. Dabei ist

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_d \\ \beta_d \end{pmatrix}.$$