Dr. Christian Rohde
Urs Kollbrunner Zürich, Mai 2003

4. Übung zur Vorlesung

Distributionen und Sobolevräume

Aufgabe 0 ist optional aber sinnvoll, falls man sich nicht mit der Fundamentallösung für die Wärmeleitung beschäftigt hat...

Aufgabe 0 [Fundamentallösung der Wellengleichung]
Betrachte den Wellenoperator

$$\Box T = \partial_t^2 T - \partial_x^2 T$$

für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Zeige, daß die Funktion $\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\gamma(x,t) = \begin{cases} 1/2 & : \quad t > |x|, \\ 0 & : \quad t \leq |x| \end{cases}$$

eine Fundamentallösung T_γ von $\Box$ erzeugt.
Hinweis: Führe die Variablentransformation $(t,x) \mapsto (\xi, \eta)$ mit

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+x), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(t-x).$$

durch.

Aufgabe 1 [Klassische Fouriertransformation]
Bestimme die Fouriertransformationen $\hat{u}$ der folgenden Funktionen $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ (, falls sie existieren)

(a) $u(x) = \operatorname{sgn}(x) \exp(-a|x|)$, $a > 0$, $d = 1$,

(b) $u(x) = 1/(1+|x|)$, $d = 1$,

(c) $u(x) = p(x) \exp(-t|x|^2)$, p Polynom, $t > 0$, $d \in \mathbb{N}$.

Welche Funktionen sind aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$?

Aufgabe 2 [Faltung und Fouriertransformation]
Seien $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Zeige, daß alle folgenden Ausdrücke wohldefiniert sind und

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad F[u * v] = (2\pi)^{d/2} F[u] F[v], \\ &\text{(b)} \quad F[uv] = (2\pi)^{-d/2} F[u] * F[v] \end{aligned}$$

gilt.

Aufgabe 3 [Anfangswertproblem]
Betrachte für die unbekannte Funktion $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ das partielle Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) &= 0 \qquad (x \in \mathbb{R}, t > 0), \\ u(x,0) &= u_0(x) \qquad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned} \qquad (*)$$

Dabei sei $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Das Problem $(*)$ besitze eine Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, so daß für alle $t \geq 0$ gilt

$$u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Zeige für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\, dy.$$

Hinweise: 1) Wende die Fouriertransformation auf den Ausdruck $u_t(.,t) - u_{xx}(.,t) = 0$ für $t > 0$ an. 2) Wende dann Aufgabe 1 (c) an.

Man bestimme die Fouriertransformierte der Funktion u bzgl. $z := (x,t)$
