Dr. Christian Rohde
Urs Kollbrunner

Zürich, Mai 2003

3. Übung zur Vorlesung

Distributionen und Sobolevräume

Aufgabe 1 [Direktes Produkt]

(a) Für $i = 1, 2, 3$ sei $d_i \in \mathbb{N}$ und $T_i = T_i(x^i) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d_i})$. Das direkte Produkt ist assoziativ, d.h.

$$(T_1(x_1) \otimes T_2(x_2)) \otimes T_3(x_3) = T_1(x_1) \otimes (T_2(x_2) \otimes T_3(x_3))$$

(b) Für $d_x, d_y \in \mathbb{N}$ sei $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d_x})$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d_y})$ und $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d_y})$. Für das direkte Produkt gilt:

$$\mathcal{D}'\text{–}\lim_{n\to\infty} T_n = T \Longrightarrow \mathcal{D}'\text{–}\lim_{n\to\infty} (T_n(y) \otimes S(x)) = T(y) \otimes S(x).$$

Aufgabe 2 [Faltung]
Es sei $E_0 := \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ die Dirac-Distribution. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $E_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ durch $E_k := \delta^{(k)}$ und E_{-k} durch $E_{-k} := T_{u_k}$. Dabei ist für $x \in \mathbb{R}$

$$u_k(x) = \begin{cases} x^{k-1}/(k-1)! & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

Zeige für $l, m \in \mathbb{Z}$, daß die Faltung $E_l * E_m$ existiert und $E_l * E_m = E_{l+m}$ gilt.

Aufgabe 3 [Friedrichsglättung]

(a) Es sei $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Dann existiert eine Konstante $A > 0$, die nicht von v und δ abhängt, so daß für $\delta > 0$ gilt:

$$\|v_\delta^{(n)} - v^{(n)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq A\delta \|v^{(n+1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

(b) Es sei $v \in L^p(\mathbb{R}^d)$ für $p \in [1, \infty)$ und $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Friedrichs-Glättung $v_\delta \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\delta > 0$, die Abschätzung

$$\|v_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

und

$$\lim_{\delta\to 0} \|v_\delta - v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Gelten die Aussagen auch für $p = \infty$?
Hinweis: Zeige zunächst

$$|v_\delta(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(x-y) v(y)^p \, dy \right)^{1/p} .$$

Aufgabe 4 [Wärmeleitungsgleichung]
Sei $\Omega := \mathbb{R}^{d+1}$, $d \in \mathbb{N}$. Betrachte für $u = u(x,t) : \Omega \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega. \qquad (*)$$

(a) Zeige, daß die Funktion $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\gamma(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) & : \quad x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ 0 & : \quad x \in \mathbb{R}^d, t \leq 0 \end{cases}$$

aus $C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ und $L^1_{loc}(\Omega)$ ist.

(b) Zeige: γ ist Fundamentallösung von $(*)$ in Ω.
