Dr. Christian Rohde
Urs Kollbrunner Zürich, April 2003

2.Übung zur Vorlesung

Distributionen und Sobolevräume

Aufgabe 1 [Konvergenz im Distributionensinne]
Seien $f, f_1, f_2, \ldots$ stückweise stetige reellwertige Funktionen in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
Beweise oder widerlege:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Rightarrow \mathcal{D}' - \lim_{n\to\infty} T_{f_n} = T_f.$$

Aufgabe 2 [Nichtlineare Differentialgleichungen]
Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Betrachte die *nichtlinearen* Differentialgleichungen

$$u_t + [f(u)]_x = 0 \text{ in } \Omega \qquad (*)$$

und

$$u_t + f(u_x) = 0 \text{ in } \Omega \qquad (**)$$

für $u = u(x,t) := \Omega \to \mathbb{R}$.
a) Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt eine **schwache Lösung von** $(*)$ g.d.w.

$$< \partial_t T_u, \varphi > + < \partial_x T_{f(u)}, \varphi >= 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),\ \mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega,$$

gilt. Zeige: Jede klassische Lösung ist schwache Lösung.
b) Seien $u^\pm, s \in \mathbb{R}$ und

$$u = u(x,t) = \begin{cases} u^- & : \quad x - st < 0 \\ u^+ & : \quad x - st \geq 0. \end{cases}$$

Zeige: u ist eine schwache Lösung in Ω g.d.w. $s = (f(u^+) - f(u^-))/(u^+ - u^-)$ gilt.
c) Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ sei eine **schwache Lösung von** $(**)$ genannt g.d.w.

$$< \partial_t T_u, \varphi > + f(< \partial_x T_u, \varphi >) = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),\ \mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega,$$

gilt. Ist dann eine klassische Lösung eine schwache Lösung?

Aufgabe 3 [Teilresultate im Beweis Theorem 2.27]
(a) Sei $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Testfunktionen in $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Es gelte $\mathcal{D} - \lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$.
Zeige: Es existiert eine Teilfolge $\{\varphi_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, für die

$$\varphi := \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{n_m}$$

existiert und in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ liegt.
(b) Sei $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ und φ wie in (a). Zeige: Dann gilt

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \langle T, \varphi_{n_m}\rangle.$$
