Dr. Christian Rohde
Urs Kollbrunner Zürich, April 2003

1. Uebung zur Vorlesung

Distributionen und Sobolevräume

Aufgabe 1 Sind die folgenden Abbildungen $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ Distributionen?

(a) $$\langle T, \varphi \rangle := \varphi(0)^2, \quad d \in \mathbb{N}$$

(b) $$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(n), \quad d = 1,$$

(c) $$\langle T, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx \right], \quad d = 1,$$

(d) $$\langle T, \varphi \rangle := \int_{\Gamma} \varphi(s) \, ds, \quad d = 2.$$

In (d) sei $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve.

Aufgabe 2 [Distributionsableitungen]

(a) Sei $u = u(x) = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$. Bestimme $T_u^{(n)}$ für $n \in \mathbb{N}$.
Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $T_u^{(n)} \in \mathcal{D}'_R(\mathbb{R})$?

(b) Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}$. Zeige zunächst, daß die Abbildung $T(.+b) : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit

$$\langle T(.+b), \varphi \rangle := \langle T, \varphi(.-b) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

eine Distribution ist.
Zeige, daß dann für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle T', \varphi \rangle = \lim_{h \to 0} \frac{\langle T(.+h), \varphi \rangle - \langle T, \varphi \rangle}{h}.$$

Aufgabe 3 [Wellengleichung]
Sei $c \in \mathbb{R}$. Betrachte für $u = u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ die *Wellengleichung*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Für $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^1)$ ist dann die Funktion

$$u(x,t) = u_0(x - ct)$$

eine Distributionslösung der Wellengleichung, d.h.

$$\langle T_{tt}, \varphi \rangle - c^2 \langle T_{xx}, \varphi \rangle = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Hinweis: Führe die Variablentransformation $(x,t) \mapsto (y,z)$ mit $y = x - kt$ und $z = x + kt$ in dem Ausdruck für die Distributionslösung durch.