Distributionen und Sobolevräume

Kurzskript zu einer Vorlesung gehalten im SS 03

an der Universität Zürch von

Christian Rohde

September 1, 2003

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Im Gegensatz zur Vorlesung gibt es die Unterscheidung Sätze/Theoreme nicht mehr. Es ist kein Beweis in das Kurzskript aufgenommen. Die Beispiele sind nur sehr verkürzt wiedergegeben.
Die Einträge [1]-[7] des Literaturzeichnisses beziehen sich auf die Distributionentheorie/Fourieranalysis, die Einträge [8]-[12] dagegen auf Sobolevräume. Das wesentliche Material dazu ist aus [10].

Kapitel 1

Einführung: Probleme des klassischen Differentialkalküls

1.1 Lineare Transportprozesse

Klassische und schwache Lösungen für das folgende Cauchyproblem.
Sei $a \in \mathbf{R}$. Finde $u = u(x,t) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{\geq 0}$ mit

$$\begin{aligned} u_t + a u_x &= 0 \quad &&\text{in } \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{\geq 0}, \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad &&\text{in } \mathbf{R}. \end{aligned}$$

1.2 Nichtlineare Transportprozesse und Verkehrsmodellierung

Klassische und schwache Lösungen für das folgende Cauchyproblem. Bildung von Singularitäten (im Beispiel Staus auf der Autobahn) in endlicher Zeit.
Sei $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Finde $u = u(x,t) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{\geq 0}$ mit

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \quad &&\text{in } \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{\geq 0}, \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad &&\text{in } \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Im Falle der Verkehrsmodellierung steht u für die Dichte der Fahrzeuge. Spezielle Wahl von f für Verkehrsmodellierung:

$$f(u) = a_{max} \left(1 - \frac{u}{u_{max}} \right) u.$$

Dabei ist a_{max} die Maximalgeschwindigkeit und u_{max} die maximale Dichte.

Kapitel 2

Distributionen

2.1 Motivation

Diskussion des elektrischen Schwingkreises für insbesondere in der Zeit stückweise konstante äussere Spannungen (Ein/Ausschaltvorgang)

2.2 Testfunktionen

Wir führen einige Notationen ein. Für $d \in \mathbf{N}$ sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)^T \in \mathbf{N}_0^d$ und $x = (x_1, \ldots, x_d)^T \in \mathbf{R}^d$.

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_d, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d}, \\ D^\alpha &:= D_1^{\alpha_1} \ldots D_d^{\alpha_d} = \tfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}. \end{aligned}$$

Weiter sei für $k \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} C^k(\mathbf{R}^d) &:= \{u : \mathbf{R}^d \to \mathbf{K} \,|\, D^\alpha u \text{ existiert und ist stetig, } 0 \leq |\alpha| \leq k\}, \\ C^\infty(\mathbf{R}^d) &:= \textstyle\bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbf{R}^d). \end{aligned}$$

Definition 2.1 (Träger,Testfunktion). *(i) Sei ϕ eine stückweise stetige Funktion auf $\mathbf{R}^d$. Dann heißt die Menge*

$$\operatorname{supp}(\phi) := \overline{\{x \in \mathbf{R}^d \,|\, \phi(x) \neq 0\}}$$

Träger von ϕ.

(ii) Betrachte die Menge

$$C_0^\infty(\mathbf{R}^d) := \{\phi \in \mathbf{R}^d \,|\, \operatorname{supp}(\phi) \ \textit{kompakt}\}.$$

ϕ heißt **Testfunktion**.
Wir verwenden (aus historischen) Gründen die Bezeichnung

$$\mathcal{D}(\mathbf{R}^d) := \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^d).$$

Beispiel 2.2 (Konstruktion von Testfunktionen). *(i) Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ und analytisch $\Rightarrow \phi \equiv 0$.*

(ii) Sei $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ mit

$$g(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & : \quad t > 0, \\ 0 & : \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Dann ist $f = f(x) = g(1 - |x|^2)$ eine Testfunktion.

Definition 2.3 (Standardtestfunktion, Diracfolge). *(i) Eine gerade Funktion $\bar{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ heißt* **Standardtestfunktion** *g.d.w. gilt*

$$\int_{\mathbf{R}^d} \bar{\phi}(y)\, dy = 1,\ \bar{\phi} \geq 0 \text{ und } \operatorname{supp}(\bar{\phi}) \subset B_1(0).$$

(ii) Sei $\bar{\phi}$ eine Standardtestfunktion. Die Funktionenfolge $\{\bar{\phi}_\delta\}_{\delta>0}$ heißt **Diracfolge** *g.d.w. gilt*

$$\bar{\phi}_\delta(x) = \frac{1}{\delta^d}\bar{\phi}(\frac{x}{\delta}) \quad (\delta > 0,\, x \in \mathbf{R}^d).$$

Lemma 2.4. *Sei $\{\bar{\phi}_\delta\}_{\delta>0}$ eine Diracfolge Dann gilt*

(i)

$$\int_{\mathbf{R}^d} \bar{\phi}_\delta(y)\, dy = 1, \bar{\phi}_\delta \geq 0,$$

(ii) supp$(\bar{\phi}_\delta) \subset B_\delta(0)$,

(iii) $\lim_{\delta\to 0} \bar{\phi}_\delta(x) = 0$ for all $x \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$.

Lemma 2.5 (Variationslemma). *Seien $u, v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ und es gelte*

$$\int_{\mathbf{R}^d} u(x)\phi(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^d} v(x)\phi(x)\, dx\, \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d).$$

Dann ist $u = v$ fast überall.

Definition 2.6 (Konvergenz von Testfunktionen). *Seien $\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$.*
Die Folge $\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert gegen ϕ im Testfunktionensinne (in Zeichen: $\mathcal{D} - \lim \phi_n = \phi$) *g.d.w. gilt*

(i) Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$ existiert eine Nullfolge $\{\varepsilon_n^\alpha\}_{n\in\mathbf{N}}$ mit

$$|D^\alpha \phi_n(x) - D^\alpha \phi(x)| \leq \varepsilon_n^\alpha \quad (x \in \mathbf{R}^d).$$

(ii) Es existiert ein Kompaktum $K \subset \mathbf{R}^d$ mit supp$(\phi_n) \subset K$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

2.3 Distributionen: Definition und elementare Operationen

Definition 2.7 (Distribution). *Eine Abbildung* $T : \mathcal{D}(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{K}$ *heißt* **Distribution auf** $\mathbf{R}^d$ *g.d.w. gilt*

(i) T *ist* **linear**, *d.h. für alle* $a_1, a_2 \in \mathbf{K}$ *und* $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ *gilt*

$$\langle T, a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \rangle = a_1\langle T, \phi_1\rangle + a_2\langle T, \phi_2\rangle,$$

(ii) T *ist* **stetig**, *d.h.*

$$\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R}^d),\ \mathcal{D} - \lim\phi_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\langle T, \phi_n\rangle = 0.$$

Die Menge der Distributionen auf $\mathbf{R}^d$ *wird mit* $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ *bezeichnet und ist ein linearer Raum über* $\mathbf{K}$.

Lemma 2.8 (Charakterisierung von Distributionen). *Sei* $T : \mathcal{D}(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{K}$ *eine lineare Abbildung. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$,

(ii) Für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbf{R}^d$ *existiert eine Konstante* $C = C(K) > 0$ *und eine natürliche Zahl* $i = i(K)$, *so daß die Abschätzung*

$$|\langle T, \phi\rangle| \le C \sum_{\alpha\in\mathbf{N}_0^d,\, |\alpha|\le i} \|D^\alpha\phi\|_{L^\infty(K)}$$

für alle $\phi \in C_0^\infty(K)$ *gilt.*

Beispiel 2.9 (Existenz nichttrivialer Distributionen). *Sei* $u \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$. *Dann ist die Abbildung*

$$T_u : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbf{R}^d) & \to & \mathbf{R} \\ \phi & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} u(x)\phi(x)\,dx \end{cases} \tag{2.1}$$

eine Distribution.

Definition 2.10 (Reguläre/Singuläre Distributionen). *Sei* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$.
T *heißt* **reguläre Distribution** *g.d.w. eine* **erzeugende Funktion** $u \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ *mit der Eigenschaft*

$$\langle T, \phi\rangle = \langle T_u, \phi\rangle\ \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$$

existiert. Dabei ist T_u *vermöge (2.1) definiert.*
Falls T *nicht regulär ist, heißt* T *singulär. Die Menge der regulären (singulären) Distributionen wird mit* $\mathcal{D}'_R(\mathbf{R}^d)$ $(\mathcal{D}'_S(\mathbf{R}^d))$ *bezeichnet.*

Theorem 2.11 (Identifikation von $\mathcal{D}'_R(\mathbf{R}^d)$ und $L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$). *Seien $T_u, T_v \in \mathcal{D}'_R(\mathbf{R}^d)$ mit erzeugenden Funktionen $u, v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ gegeben. Dann gilt*

$$T_u = T_v \Leftrightarrow u = v \text{ fast überall.}$$

Definition 2.12 (Operationen auf $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$). *Seien $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$. Wir definieren die linearen Abbildungen $S + T, \psi T, D^\alpha T : \mathcal{D}(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{K}$ vermöge*

(i) $\langle S + T, \phi\rangle := \langle S, \phi\rangle + \langle T, \phi\rangle$,

(ii) $\langle \psi T, \phi\rangle := \langle T, \psi\phi\rangle$,

(iii) $\langle D^\alpha T, \phi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \phi\rangle$.

$D^\alpha T$ heißt **Distributionenableitung der Ordnung α von T**.

Lemma 2.13. *Die Abbildungen $S + T$, ψT und $D^\alpha T$ aus Definition 2.12 sind Distributionen.*

Theorem 2.14 (Konsistenztheorem). *Seien $u, v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ und $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ Dann gilt*

(i) $T_u + T_v = T_{u+v}$,

(ii) $\psi T_u = T_{\psi u}$

und, falls wir zusätzlich $u \in C^k(\mathbf{R}^d)$ haben,

(iii) $D^\alpha(T_u) = T_{D^\alpha u}$, $\alpha \in \mathbf{N}_0^k$.

Beispiel 2.15 (Distributionenableitung der Heavisidefunktion). *Sei $H \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ die Heavisidefunktion. Dann ist*

$$\langle T'_H, \phi\rangle = \phi(0) \quad (\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})).$$

Definition 2.16 (Dirac-Distribution). *Sei $a \in \mathbf{R}^d$. Die Abbildung $\delta_a : \mathcal{D}(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ mit*

$$\langle \delta_a, \phi\rangle = \phi(a) \quad (\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d))$$

heißt **Dirac-Distribution** *(und ist eine Distribution!).*

Lemma 2.17 (Eine spezielle Testfunktion: Abschneidefunktion). *Sei $K \subset \mathbf{R}^d$ eine kompakte Menge. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert dann eine Funktion $\phi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ mit den Eigenschaften*

(i) $0 \le \phi_\varepsilon(x) \le 1$ *für* $x \in \mathbf{R}^d$,

(ii) $\operatorname{supp}(\phi_\varepsilon) \subset \{x \in \mathbf{R}^d \mid \operatorname{dist}(x, K) \le \varepsilon\}$,

(iii) $\phi_\varepsilon(x) = 1$ *für* $x \in K$.

Proposition 2.18. *Sei $a \in \mathbf{R}$ und δ_a die Dirac-Distribution auf $\mathbf{R}$.
Dann ist δ_a eine singuläre Distribution.*

Beispiel 2.19 (Klasssiche Lösungen und Distributionslösungen von linearen partiellen Differentialgleichungen).

2.4 Distributionenfolgen und Approximation

Definition 2.20 (Konvergenz im Distributionensinne). *Sei* $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ *und* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$. $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ **konvergiert gegen** T **im Distributionensinne (in Zeichen** $\mathcal{D}' - \lim T_n = T$**)** *g.d.w.*

$$\langle T_n, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ *gilt.*

Bemerkung 2.21. *(i) In der Funktionalanalysis der Banachräume entspricht die Konvergenz im Distributionensinne dem Begriff der schwachen Konvergenz.*

(ii) Die Voraussetzung $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ *in Definition 2.20 kann weggelassen werden, vergleiche dazu Theorem 2.26 unten.*

Theorem 2.22 (Konvergenz im Distributionensinne/Elementaroperationen). *Seien* $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{S_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$, $S, T, \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$, $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ *und* $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$.
Falls $\mathcal{D}' - \lim T_n = T$ *und* $\mathcal{D}' - \lim S_n = S$ *gilt, folgt*

(i) $\mathcal{D}' - \lim(T_n + S_n) = S + T$,

(ii) $\mathcal{D}' - \lim(\psi T_n) = \psi T$,

(iii) $\mathcal{D}' - \lim(D^\alpha T_n) = D^\alpha T$.

Beispiel 2.23. *Eigenschaft (iii) in Theorem 2.22 gilt nicht für Funktionenfolgen bzgl. gleichmäßiger Konvergenz. Betrachte dazu*

$$u_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx) \quad (x \in [-1,1]).$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^\infty[-1,1])} = 0,$$

aber es existiert kein $w \in L^\infty([-1,1])$, *so daß* $\lim_{n\to\infty} \|u_n' - w\|_{L^\infty[-1,1])} = 0$.

Beispiel 2.24 (Diracfolge). *Mit der Diracfolge* $\{\phi_\delta\}_{\delta>0}$ *aus Def. 2.3 gilt*

$$\mathcal{D}' - \lim_{\delta\to 0} T_{\phi_\delta} = \delta_0.$$

Theorem 2.25 (Approximation singulärer Distributionen). *Sei* $T \in \mathcal{D}'_S(\mathbf{R}^d)$.
Dann existiert eine Distributionenfolge $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}'_R(\mathbf{R}^d)$ *mit* $\mathcal{D}' - \lim T_n = T$.

Beweis: erst in Kapitel 3, Theorem 3.18.

Theorem 2.26 ($\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ **abgeschlossen bzgl. distributioneller Konvergenz).** *Sei die Folge* $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *aus* $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ *und* $T : \mathcal{D}(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{R}$ *eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\langle T_n, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle \,\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d) \Rightarrow T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d).$$

2.5 Die Struktur von Distributionen

Beispiel 2.27 (Struktur von $\mathcal{D}'_S(\mathbf{R}^d)$). *Wir diskutieren die folgende Vermutung. Für alle $T \in \mathcal{D}'_S(\mathbf{R}^d)$ existiert ein $u \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$, so daß gilt*

$$\langle T, \phi \rangle = \langle D^\alpha T_u, \phi \rangle \quad \forall \, \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d).$$

Definition 2.28 ($T_1 = T_2$, wesentliche Punkte). *Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ und $G \subset \mathbf{R}^d$ offen.*

(i) Man sagt, daß T_1 **in** *G* **verschwindet** *($T_1 = 0$* **in** *G) g.d.w. gilt*

$$\langle T_1, \phi \rangle = 0 \, \forall \, \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d), \;\; \mathrm{supp}(\phi) \subset G.$$

(ii) Man sagt, daß $T_1 = T_2$ **in** *G gilt g.d.w. $T_1 - T_2 = 0$ in G gilt.*

(iii) Ein Punkt $x_0 \in \mathbf{R}^d$ heißt **wesentlicher Punkt** *für T_1 g.d.w. für jede offene Umgebung $U = U(x_0) \subset \mathbf{R}^d$ von x_0 eine Funktion $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ mit* supp $\subset$ *$U(x_0)$ und $\langle T, \phi \rangle \neq 0$ gilt.*

Beispiel 2.29. *(i) 0 ist (der einzige) wesentliche Punkt von δ_0.*

(ii) Sei $u \in C^0(\mathbf{R}^d)$. Dann ist

$$x_0 \in supp(u) \Leftrightarrow x_0 \text{ wesentlicher Punkt von } T_u.$$

Lemma 2.30 (Zerlegung der Eins). *Sei $K \subset \mathbf{R}^d$ kompakt und $G_1, \ldots, G_p \subset \mathbf{R}^d$ offen für $p \in \mathbf{N}$.*
Falls $K \subset G := \bigcup_{i=1}^p G_i$ gilt, existieren $\phi_1, \ldots, \phi_p \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ mit

$$0 \leq \phi_i \leq 1, \; supp(\phi_i) \subset G_i \quad (i = 1, \ldots, p)$$

und

$$\sum_{i=1}^p \phi_i(x) = 1 \quad (x \in K).$$

Lemma 2.31. *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ und für eine Indexmenge I die Menge aller offenen Mengen $G_i \subset \mathbf{R}^d$ mit $T = 0$ in G_i für $i \in I$ mit $M = \{G_i\}_{i \in I}$ bezeichnet. Sei $G := \bigcup_{i \in I}$. Dann gilt $T = 0$ in G, d.h. es existiert genau eine größte offene Menge G, in der T verschwindet.*

Definition 2.32 (Träger von T). *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ und G wie in Lemma 2.31. Die abgeschlossene Menge $\mathbf{R}^d \setminus G$ heißt* **Träger von** *T.*

Bemerkung 2.33. *(i) Sei $T \in \mathcal{D}'_R(\mathbf{R}^d)$ mit erzeugender Funktion $u \in C^0(\mathbf{R}^d)$. Dann gilt* $\mathrm{supp}(T) = \mathrm{supp}(u)$,

(ii) $\mathrm{supp}(\delta_0) = \{0\}$,

(iii) *Sei* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, $\operatorname{supp}(T) \cap \operatorname{supp}(\phi) = \emptyset$. *Dann gilt* $\langle T, \phi \rangle = 0$.

(iv) $\operatorname{supp}(T)$ *ist die Menge aller wesentlichen Punkte von* T.

Definition 2.34 (Ordnung von Distributionen). *Sei* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ *und* $K \subset \mathbf{R}^d$ *kompakt.*

(i) *Die Zahl* $\operatorname{Ord}_K(T) \in \mathbf{N}_0$ *mit*

$$\operatorname{Ord}_K := \Big\{ i \in \mathbf{N}_0 \,|\, \exists\, C > 0\, \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d), \operatorname{supp}(\phi) \subset K : \\ |\langle T, \phi \rangle| \le C \sum_{|\alpha| \le i} \|D^\alpha \phi\|_{L^\infty(K)}. \Big\}$$

heißt **Ordnung von** T **in** K.

(ii) $\operatorname{Ord}(T) := \sup_{K \subset \mathbf{R}^d,\, K \text{ kompakt}} \{\operatorname{Ord}_K(T)\}$ *heißt* **Ordnung von** T.

Beispiel 2.35. *(i)* $T \in \mathcal{D}'_R(\mathbf{R}^d) \Rightarrow \operatorname{Ord}_K(T) = 0$ *für alle kompakten Teilmengen* K *von* $\mathbf{R}^d$.

(ii) $T = \delta_0 \Rightarrow \operatorname{Ord}_K(T) = 0$ *für alle kompakten Teilmengen* K *von* $\mathbf{R}^d$.

(iii) $d = 1$, $T = \delta_0' \Rightarrow \operatorname{Ord}_K(T) = 1$ *für alle kompakten Teilmengen* K *von* $\mathbf{R}^d$.

(iv) *Für* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ *sei*

$$\langle T, \phi \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n(n).$$

Dann folgt

$$\operatorname{Ord}_{B_{n+1/2}(0)}(T) = n \Rightarrow \operatorname{Ord}(T) = \infty.$$

Theorem 2.36 (Struktursatz). *Sei* $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ *und* $G \subset \mathbf{R}^d$ *offen und beschränkt. Dann existiert* $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$ *und* $u \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ *mit*

$$T = D^\alpha T_u \text{ in } G.$$

Dabei ist $|\alpha| = \operatorname{Ord}_{\overline{G}}(T) + 1$.

Kapitel 3

Faltungen

3.1 Das direkte Produkt

Für $d_X, d_Y \in \mathbf{N}$ sei $Y = \mathbf{R}^{d_Y}$ und $X = \mathbf{R}^{d_X}$. Für eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(Y)$ benutzen wir auch die Schreibweise $T(y) := T$ um die freie Variable kenntlich zumachen.

Lemma 3.1. *(i) Sei $T = T(y) \in \mathcal{D}'(Y)$ und $\phi \in \mathcal{D}(X \times Y)$. Dann ist die Funktion $\psi : X \to \mathbf{R}$ mit*

$$\psi(x) = \langle T(y), \phi(x,.)\rangle \quad (x \in X)$$

eine Testfunktion auf X. Es gilt für $\alpha \in \mathbf{N}_0^{d_X}$

$$D^\alpha \phi(x) = \langle T(y), D^\alpha \phi(x,.)\rangle \quad (x \in X).$$

(ii) Sei $T = T(y) \in \mathcal{D}'(Y)$ und $\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(X \times Y)$ mit $\mathcal{D} - \lim \phi_n = 0$ in $X \times Y$. Dann gilt für die Folge $\{\psi_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(X)$ mit

$$\psi_n(x) = \langle T(y), \phi_n(x,.)\rangle \quad (x \in X)$$

die Beziehung

$$\mathcal{D} - \lim \psi_n = 0$$

in X.

Definition 3.2 (Direktes Produkt). *Die Abbildung*

$$\otimes : \begin{cases} \mathcal{D}'(X) \times \mathcal{D}'(Y) & \to \quad \mathcal{D}'(X \times Y) \\ (S,T) & \mapsto \quad S \otimes T \end{cases}$$

heißt **direktes Produkt** *g.d.w. für $R := S \otimes T$*

$$\langle R, \phi\rangle := \langle S(x), \langle T(y), \phi(x,y)\rangle\rangle \quad (\phi \in \mathcal{D}(X \times Y)). \tag{3.1}$$

Bemerkung 3.3. *Wegen Lemma 3.1 ist R aus (3.1) tatsächlich eine Distribution auf $X \times Y$ und damit das direkte Produkt wohldefiniert.*

Lemma 3.4. *Seien die Distributionen $R_1, R_2 \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ und die Menge*

$$Q := \Big\{ \phi \in \mathcal{D}(X \times Y) \,|\, \exists\, \phi_1 \in \mathcal{D}(X),\ \phi_2 \in \mathcal{D}(Y) : \\ \phi(x,y) = \phi_1(x)\phi_2(y)\, \forall (x,y) \in X \times Y \Big\}$$

gegeben. Dann gilt

$$\langle R_1, \phi\rangle = \langle R_2, \phi\rangle\, \forall \phi \in Q \Leftrightarrow R_1 = R_2.$$

Theorem 3.5. *Sei $T \in \mathcal{D}'(Y)$ und $S \in \mathcal{D}'(X)$.*

(i) (Zerfällungsregel) Sei $R \in \mathcal{D}'(X \times Y)$. Dann gilt für alle $\phi_1 \in \mathcal{D}(X), \phi_2 \in \mathcal{D}(Y)$

$$R = S \otimes T \Leftrightarrow \langle R, \phi_1\phi_2\rangle = \langle T(y), \phi_2(y)\rangle\langle S(x), \phi_1(x)\rangle.$$

(ii) (Vertauschung, Fubini)

$$\langle T \otimes S, \phi\rangle = \langle S \otimes T, \phi\rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(X \times Y).$$

(iii) $\operatorname{supp}(T \otimes S) = \operatorname{supp}(T) \times \operatorname{supp}(S)$.

(iv) (Nullteilerfreiheit)

$$T \otimes S = 0 \Leftrightarrow T = 0 \textit{ oder } S = 0.$$

(v) Für $\alpha \in \mathbf{N}_0^{d_Y}$ und $\beta \in \mathbf{N}_0^{d_X}$ gilt

$$D_y^\alpha D_x^\beta (T \otimes S) = D_y^\alpha T \otimes D_x^\beta S.$$

3.2 Faltung für Funktionen und Distributionen

Beispiel 3.6 (Funktionenfaltung/Faltung in $\mathcal{D}'_R(\mathbf{R}^d)$). *(i)*

$$u, v \in L^1(\mathbf{R}^d) \Rightarrow u * v := \int_{\mathbf{R}^d} u(x-y)v(y)\,dy.$$

Diese Faltungsdefinition versagt für $u, v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ (z.B. u=v=1)!

(ii) Für $u, v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ ist aus demselben Grund wie in (i) die Definition der Faltung für reguläre Distributionen vermöge

$$T_u * T_v = T_{u*v}$$

nicht wohldefiniert.

Definition 3.7 (Nicht-finite Testfunktionen). *Sei $M \subset \mathbf{R}^d$ abgeschlossen. Wir definieren die Funktionenmenge $\mathcal{E}_M$ vermöge*

$$\mathcal{E}_M := \{\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^d) \,|\, M \cap \mathrm{supp}(\phi) \text{beschränkt}\}.$$

Bemerkung 3.8. *Für kompakte Mengen M gilt $\mathcal{E}_M = C^\infty(\mathbf{R}^d)$. Für $M = \mathbf{R}^d$ ist $\mathcal{E}_M = \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$.*

Definition 3.9 (Fortsetzung der Distribution auf $\mathcal{E}_M$). *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ und $M := \mathrm{supp}(T) \subset \mathbf{R}^d$. Für $\phi \in \mathcal{E}_M$ sei $\chi = \chi(\phi) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ eine Testfunktion, die in einer Umgebung der beschränkten Menge $M \cap \mathrm{supp}(\phi)$ den Wert 1 annimmt.*
Wir definieren die Abbildung $\tilde{T} : \mathcal{E}_M \to \mathbf{K}$ vermöge

$$\langle \tilde{T}, \phi \rangle := \langle T, \chi(\phi)\phi \rangle \quad (\phi \in \mathcal{E}_M).$$

Beachte, daß $\chi(\phi)\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ gilt.

Bemerkung 3.10. *Die Funktion χ ist nicht eindeutig bestimmt in Definition 3.9. Es wird gezeigt, daß $\tilde{T}$ trotzdem wohldefiniert ist.*

Definition 3.11 (Streifenbedingung). *Seien $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$.*
Man sagt, daß S **und** *T* **die Streifenbedingung erfüllen** *g.d.w. für alle $a > 0$ die Menge*

$$M_a := \mathrm{supp}(S \otimes T) \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^{2d} \,|\, |x + y| \leq a\}$$

beschränkt ist.

Korollar 3.12. *S und T aus $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ mögen die Streifenbedingung erfüllen. Sei $M := \mathrm{supp}(S \otimes T)$ und $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$.*
Dann gilt für $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ mit $\psi(x, y) = \phi(x + y)$ die Beziehung $\psi \in \mathcal{E}_M$.

Lemma 3.13 (Kriterium für Streifenbedingung). *Seien $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$. Dann gilt:*

(i) Falls $\mathrm{supp}(S)$ oder $\mathrm{supp}(T)$ beschränkt ist, ist die Streifenbedingung erfüllt.

(ii) Falls ein $c \in \mathbf{R}$ existiert, so daß

$$\mathrm{supp}(S) \cap \mathrm{supp}(T) \subset \{x = (x_1, \ldots, x_d)^T \in \mathbf{R}^d \,|\, x_i \geq c, i = 1, \ldots, d\}$$

gilt, ist die Streifenbedingung erfüllt.

Theorem 3.14 (und Definition der Distributionenfaltung). *Seien $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ Distributionen, die die Streifenbedingung erfüllen. Betrachte für $M := \mathrm{supp}(S \otimes T)$ die Abbildung*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \mathcal{E}_M & \to & \mathbf{R} \\ \psi & \mapsto & \langle \widetilde{S \otimes T}, \psi \rangle. \end{cases}$$

Dann ist $S * T$ mit $\langle S * T, \phi \rangle = \mathcal{F}(\phi(x + y))$ eine Distribution auf $\mathbf{R}^d$.
Diese Distribution wird als **Faltung** *bezeichnet.*

Theorem 3.15 (Eigenschaften der Faltung). *$S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ mögen der Streifenbedingung genügen.*

(i) $\operatorname{supp}(T * S) \subset \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S)$.

(ii) Die Faltung ist kommutativ, d.h. $S * T = T * S$,

(iii) Sei $R \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$. Falls S und R die Streifenbedingung erfüllen, dann ist für $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ die Streifenbedingung für $\lambda R + \mu T$ und S erfüllt. Weiter ist

$$(\lambda R + \mu T) * S = \lambda R * S + \mu T * S.$$

(iv) Sei $R \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ und $\operatorname{supp}(R)$ kompakt. Dann erfüllen R, S sowie $R*S, T$ und $R, S*T$ die Streifenbedingung. Die Faltung ist assoziativ, d.h. $R*(S*T) = (R*S)*T$.

(v) Für $u, v \in L^1(\mathbf{R}^d)$ genügen T_u, T_v der Streifenbedingung und es gilt $T_{u*v} = T_u * T_v$.

(vi) T und δ_0 erfüllen die Streifenbedingung. Es gilt $\delta_0 * T = T * \delta_0 = T$.

(vii) Für $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$ genügen $D^\alpha T, S$ und $T, D^\alpha S$ der Streifenbedingung. Es gilt

$$D^\alpha(T * S) = D^\alpha T * S = T * D^\alpha S.$$

(viii) Sei $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ und $\operatorname{supp}(T_n) \subset B_r(0)$ für $r > 0$. Falls $T := \mathcal{D}' - \lim(T_n)$ existiert, folgt

$$\mathcal{D}' - \lim(T_n) * S = T * S.$$

3.3 Faltungen mit regulären Distributionen

Theorem 3.16 (Regularisierung durch Faltung).

Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ und $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. Dann gilt

(i) $T * T_u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$.

(ii) Sei $h : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ mit

$$h(x) = \langle T(y), u(x-y)\rangle$$

gegeben. Dann ist $h \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$.

(iii) Weiter ist $T * T_u \in \mathcal{D}'_R(\mathbf{R}^d)$ mit erzeugender Funktion h.

Lemma 3.17. *Sei $\{\phi_\delta\}_{\delta>0}$ Diracfolge und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. Weiter sei ψ_δ für $\delta > 0$ vermöge*

$$\psi_\delta(x) = \int_{\mathbf{R}^d} \phi_\delta(z)\psi(x-z)\,dz \quad (x \in \mathbf{R}^d)$$

definiert (also $\psi_\delta = \phi_\delta * \psi$).
Dann ist ψ_δ eine Testfunktion und es existiert eine Kostante $A > 0$, so daß gilt

$$\|D^\alpha\psi - D^\alpha\psi_\delta\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \le \delta A \sum_{\beta\in\mathbf{N}_0^d, |\beta|=|\alpha+1|} \|D^\beta\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}.$$

Theorem 3.18 (Approximation von Distributionen). *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ und $\{\phi_\delta\}_{\delta>0}$ eine Diracfolge gerader Funktionen. Dann gilt*

(i) $T_\delta := T * T_{\phi_\delta} \in \mathcal{D}'_R(\mathbf{R}^d)$ *für* $\delta > 0$.

(ii) $\mathcal{D}' - \lim_{\delta\to 0}(T * T_{\phi_\delta}) = T$.

(iii) Für T mit $\mathrm{Ord}(T) = k$ *für $k \in \mathbf{N}_0$ existiert eine Konstante $A > 0$, so daß*

$$|\langle T - T_\delta, \psi\rangle| \le \delta A \sum_{\alpha\in\mathbf{N}_0^d, |\alpha|\le k+1} \|D^\alpha\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}$$

gilt.

Die Distribution T_δ heißt **Regularisierung von** T.

Bemerkung 3.19. *Die Aussage von Theorem 2.25 folgt aus Theorem 3.18.*

Für $\delta > 0$ und $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ ist die **Friedrichsglättung** v_δ **von** v durch

$$v_\delta(x) = \langle T_v(y), \phi_\delta(x-y)\rangle \quad (x \in \mathbf{R}^d)$$

definiert.
Weiter benötigen wir

$$\mathrm{supp}(v) := \bigcap_{w\in[v]} \mathrm{supp}(w).$$

Theorem 3.20 (Friedrichs-Glättung). *Sei $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ und $\delta > 0$.*

(i) Dann ist $v_\delta \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$.

(ii) $\mathrm{supp}(v)$ *kompakt* $\Rightarrow v_\delta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$.

(iii) Sei für $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$ die Distribution $D^\alpha T_v \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ regulär mit erzeugender Funktion $w_\alpha \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$. Dann gilt

$$\lim_{\delta\to 0} \|w_\alpha - D^\alpha v_\delta\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} = 0.$$

(iv) Für $v \in L^p(\mathbf{R}^d)$, $p \in [1,\infty)$, gilt $\|v_\delta\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} \le \|v\|_{L^p(\mathbf{R}^d)}$ und

$$\lim_{\delta\to 0} \|v - v_\delta\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} = 0.$$

Bemerkung 3.21. *Bedeutung Friedrichsglättung für Theorie der Sobolevräume.*

3.4 Faltungen und partielle Differentialgleichungen

Beispiel 3.22 (Poissongleichung). *Bedeutung der Fundamentallösung für inhomogene Probleme am Beispiel illustriert.*

Definition 3.23 (Fundamentallösung). *Seien $a_\alpha \in \mathbf{K}$ für $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$. Betrachte für $i \in \mathbf{N}$ den Differentialoperator $P : \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d) \to \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ mit*

$$P[T] := \sum_{\alpha \in \mathbf{N}_0^d, |\alpha| \leq i} a_\alpha D^\alpha T \quad (T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)). \tag{3.2}$$

Eine Distribution $\Gamma \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ heißt **Fundamentallösung zu** *P g.d.w.*

$$P[\Gamma] = \delta_0.$$

Theorem 3.24 (Malgrange-Ehrenpreis). *Sei P ein Differentialoperator wie in (3.2). Falls $P[T]$ nicht für alle $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ verschwindet, existiert eine Fundamentallösung zu T.*

Beweis: Beweis aus Zeitgründen leider nicht durchgeführt.
Zu einem gegebenen Differentialoperator P und einer Distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ betrachten wir das (verallgemeinerte) inhomogene Problem

$$P[T] = F \tag{3.3}$$

für $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$

Theorem 3.25. *Sei $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ und $\operatorname{supp}(F)$ kompakt. Der Differentialoperator P besitze die Fundamentallösung $\Gamma \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$.*

(i) $T := \Gamma * F$ ist eine distributionelle Lösung von (3.3).

(ii) Sei $F \in \mathcal{D}'_R(\mathbf{R}^d)$ mit $F = T_f$ für $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$. Dann gilt $\Gamma * F \in \mathcal{D}'_R(\mathbf{R}^d)$. Die erzeugende Funktion ist in $C^\infty(\mathbf{R}^d)$.

Beispiel 3.26 (Elektostatik). *Explizite Lösung von Problemen mit rechter Seite vom Punktladungstyp.*

Definition 3.27 (Hypoelliptische Differentialoperatoren). *Sei $P : \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d) \to \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ ein Diffferentialoperator und $\gamma \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$.*
P heißt **hypoelliptisch für** *γ g.d.w. gilt*

(i) T_γ ist eine Fundamentallösung für P und

(ii) $\gamma \in C^\infty(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$.

Der Laplaceoperator und der Wärmeleitungsoperator sind hypoelliptisch.

Theorem 3.28. *Sei P ein Differentialoperator, der hypoelliptisch für $\gamma \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ ist. Weiter sei $F \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ mit $\mathrm{supp}(F) \subset \mathbf{R}^d$ kompakt gegeben.*
Dann existiert für alle beschränkten, offenen Mengen $U \subset \mathbf{R}^d$ mit $\mathrm{supp}(F) \cap U = \emptyset$ eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$, so daß gilt

(i) $u|_U \in C^\infty(U)$,

(ii) $T_\gamma * F = T_u$ *in* U.

Die Distributionenlösung $T_\gamma * F$ von $P[T] = F$ ist also regulär außerhalb des Trägers vom F.

Beispiel 3.29 (Fundamentallösung für die Wellengleichung/physikalische Interpretation).

Kapitel 4

Fouriertransformation und Distributionen

Motivation: Verfahren zur Bestimmung von Fundamentallösungen.

4.1 Fouriertransformation für L^1-Funktionen

Definition 4.1. *Sei $u \in L^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{K})$. Dann ist die* **Fouriertransformierte von** u *gegeben durch $\hat{u} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{K}$ mit*

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\xi \cdot x} u(x)\, dx.$$

Wir bezeichnen die zugehörige Abbildung F mit $F[u] = \hat{u}$ als **Fourierabbildung**.

Lemma 4.2. *Die Fouriertransformierte $\hat{u}$ zu $u \in L^1(\mathbf{R}^d)$ ist stetig und beschränkt, d.h. $F : L^1(\mathbf{R}^d) \to C^0(\mathbf{R}^d)$.*

Beispiel 4.3. *(i) Sei $d = 1$ und für $T > 0$*

$$u_T = u_T(x) = \begin{cases} 1 : x \in [-T, T] \\ 0 : x \in \mathbf{R} \setminus [-T, T] \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Dann ist

$$F[u_T] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T \frac{sin(T\xi)}{T\xi}.$$

Betrachte den Grenzübergang $T \to \infty$.

(ii) Es gilt für $u(x) = e^{-x^2/2}$

$$F[u] = u.$$

Lemma 4.4 (Rechenregeln). *Sei $u \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln für $\xi \in \mathbf{R}^d$:*

(i) $F[u(-x)](\xi) = \hat{u}(-\xi)$,

(ii) $c \in \mathbf{R}^d \Rightarrow F[u(x+c)](\xi) = e^{i\xi\cdot c}\hat{u}(\xi)$,

(iii) $\lambda \in \mathbf{R}_+ \Rightarrow F[u(\lambda x)](\xi) = \lambda^{-d}\hat{u}(\xi/\lambda)$.

4.2 Fouriertransformation im Raum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$

Wir bestimmen einen Unterraum X von $L^1(\mathbf{R}^d)$ mit den Eigenschaften

$$X \subset C^\infty(\mathbf{R}^d) \text{ und } u \in X \Leftrightarrow \hat{u} \in X.$$

Definition 4.5 (Der Raum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$). *Eine Funktion $u \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ gehört zu $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ g.d.w. für alle $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^d$ eine Konstante $C = C(\alpha, \beta)$ existiert mit*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^d} \{|x^\beta D^\alpha u(x)|\} \leq C.$$

$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ heißt **Schwartzscher Raum** *oder Raum der* **schnell fallenden Funktionen**.

Bemerkung 4.6. *(i)* $u(x) = e^{-x^2/2} \Rightarrow u \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$,

(ii) $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \subset C^\infty(\mathbf{R}^d)$,

(iii) *$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ ist (linearer) Unterraum von $C^\infty(\mathbf{R}^d)$,*

(iv) *$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ ist abgeschlossen bzgl. Multiplikation mit Polynomen und Differentiation:*

$$u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \Rightarrow x^\beta u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d),\ D^\alpha u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^d).$$

Definition 4.7 (Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$). *Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$* **konvergiert im Schwartzschen Sinne** *gegen 0 ($\mathcal{S} - \lim u_n = 0$) g.d.w. für alle $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^d$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^\beta D^\alpha u_n\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} = 0.$$

Lemma 4.8 (Äquivalenz). *Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent für eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.*

(i) $\mathcal{S} - \lim u_n = 0$.

(ii) *Es gelten die Aussagen*

(a) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^d\ \exists\, C > 0 : \|x^\beta D^\alpha u_n\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \leq C\ (n \in \mathbf{N})$,

(b) $\forall \alpha \in \mathbf{N}_0^d,\ K \subset\subset \mathbf{R}^d : \lim_{n\to\infty} \|D^\alpha u_n\|_{L^\infty(K)} = 0$.

Theorem 4.9 (Multiplikation $\leftrightarrow$ Differentiation). *Sei $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$. Dann gilt für $\xi \in \mathbf{R}^d$:*

(i) $F[D^\alpha u](\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$.

(ii) $D^\alpha \hat{u}(\xi) = F[(-i\xi)^\alpha u(x)](\xi)$.

Theorem 4.10 (Invarianz von $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ unter Fouriertransformation). *Die Abbildung $F : L^1(\mathbf{R}^d) \to C^0(\mathbf{R}^d)$ erfüllt*

(i) $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \Rightarrow \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

(ii) $F|_{\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)}$ *ist linear und stetig, d.h. für* $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ *gilt*

$$\mathcal{S} - \lim(u_n) = u \in Sd \Rightarrow \mathcal{S} - \lim(\hat{u}_n) = \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d).$$

(iii) Für $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ *gilt die Umkehrformel*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi \quad (x \in \mathbf{R}^d).$$

(iv) $F|_{\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)}$ *ist bijektiv.*

Theorem 4.11 (Parseval/Plancherel). *Seien $u, v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ und $\bar{u}, \bar{v}$ die zu u, v konjugiert komplexen Funktionen. Dann gilt:*

(i) $F[\bar{u}] = \overline{F[u(-\cdot)]}$.

(ii) $\int_{\mathbf{R}^d} u(x) F[v](x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^d} v(x) F[u](x)\, dx$.

(iii) $\int_{\mathbf{R}^d} u(x)\bar{v}(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^d} \hat{u}(x)\bar{\hat{v}}(x)\, dx$.

Lemma 4.12 (Fouriertrafo/Faltung). *Seien $u, v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Dann gilt:*

(i) Durch $(u, v) \mapsto v * u$ wird eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ nach $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ definiert.

(ii) $F[u * v] = (2\pi)^{d/2} F[u] F[v]$.

(iii) $F[uv] = (2\pi)^{-d/2} F[u] * F[v]$.

4.3 Der Raum $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ der temperierten Distributionen

Definition 4.13 (Der Raum $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$). *Eine Abbildung $T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \to \mathbf{K}$ heißt* **eine temperierte Distribution aus $\mathbf{R}^d$** *g.d.w. gilt*

(i) T linear,

(ii) T stetig, d.h.

$$\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d),\ \mathcal{S}-\lim u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |T(u_n)| = 0.$$

Wir verwenden wie für $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$ die Notation

$$\langle T, u\rangle := T(u) \quad (u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)).$$

Die Menge der temperierten Distributionen auf $\mathbf{R}^d$ bildet einen Vektorraum, der mit $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ bezeichnet sei.

Beispiel 4.14 (Reguläre temperierte Distributionen).

Definition 4.15. *Eine Funktion $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ heißt* **langsam wachsend** *g.d.w. Konstanten $C, r_0 > 0$ und $m \in \mathbf{N}_0$ existieren, so daß für $r > r_0$*

$$\int_{B_r(0)} |v(x)|\, dx \le Cr^m$$

gilt.

Definition 4.16 ($\mathcal{S}'_R(\mathbf{R}^d)$). *Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. T heißt eine* **reguläre temperierte Distribution** *g.d.w. eine langsam wachsende Funktion $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ existiert, für die*

$$\langle T, u\rangle := \int_{\mathbf{R}^d} v(x)u(x)\, dx \quad (u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$$

gilt. Die Funktion v heißt **erzeugende Funktion von** T. *Wir schreiben auch $T_v := T$. Der Unterraum der regulären temperierten Distributionen wird mit $\mathcal{S}'_R(\mathbf{R}^d)$ bezeichnet. Weiter definieren wir*

$$\mathcal{S}'_S(\mathbf{R}^d) := \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \setminus \mathcal{S}'_R(\mathbf{R}^d).$$

Bemerkung 4.17. *(i) Für $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ langsam wachsend gilt $T_v \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.*

(ii) Da $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ ist, erhalten wir folgende Aussage für $T_v, T_w \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, $v, w \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ langsam wachsend:

$$\langle T_v, u\rangle = \langle T_w, u\rangle\ \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \Leftrightarrow v = w \text{ fast überall.}$$

Theorem 4.18 (und Definition zur Differentiation und Multiplikation in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$). *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$.*

(i) Für $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$ ist durch

$$\langle D^\alpha T, u\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha u\rangle \quad (u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$$

eine temperierte Distribution definiert.

(ii) Sei $\gamma \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$. Für alle $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$ existiere ein $C > 0$ und $m \in \mathbf{N}_0$ mit

$$|D^\alpha \gamma(x)| \le C(1 + |x|)^m \quad (x \in \mathbf{R}^d).$$

Dann ist durch

$$\langle \gamma T, u\rangle := \langle T, \gamma u\rangle$$

eine temperierte Distribution definiert.

Beispiel 4.19 (Dirac-Distribution). *Definition der Dirac-Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ über Ableitung der von der Heaviside-Funktion erzeugten temperierten Distribution.*

Definition 4.20 (Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$). *Sei $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ und $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. $\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}}$* **konvergiert im (temperierten) Distributionensinne** *($\mathcal{S}' - \lim T_n = 0$) g.d.w. gilt*

$$\lim_{n\to\infty} |\langle T_n, u\rangle| = 0 \;\forall u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d).$$

Beispiel 4.21 (Zusammenhang $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d), \mathcal{S}(\mathbf{R}^d), C^\infty(\mathbf{R}^d)$).

Beispiel 4.22 (Zusammenhang $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d), \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d), C^{\infty\prime}(\mathbf{R}^d)$, Dualräume).

4.4 Fouriertransformation in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$

Definition 4.23 (Fouriertransformation von $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$). *Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. Dann ist die* **Fouriertransformierte $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ von** *T durch*

$$\langle \hat{T}, u\rangle = \langle T, \hat{u}\rangle \quad (u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$$

definiert. Wir schreiben auch $F[T] := \hat{T}$.

Theorem 4.24 (Theorem 4.10 für $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$). *Für die Fourierabbildung*

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) & \to & \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \\ T & \mapsto & \hat{T} \end{array} \right.$$

gilt

(i) $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \Rightarrow F[T] \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

(ii) F ist linear und stetig, d.h.

$$\{T_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d),\, T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d),\, \mathcal{S}' - \lim(T_n - T) = 0$$
$$\Rightarrow \mathcal{S}' - \lim(F[T_n] - F[T]) = 0.$$

(iii) *F ist bijektiv und für die Inverse $F^{-1}: \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ von F gilt*

$$\langle F^{-1}[T], u\rangle = \langle T, F^{-1}[u]\rangle.$$

Dabei ist $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ und $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. F^{-1} ist stetig.

Beispiel 4.25 (Fouriertransformation der Dirac-Distribution/Gauß-Glocke).

Proposition 4.26 (Analogon zu Theorem 4.9). *Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$. Dann gilt für $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$:*

(i) $\langle F[D^\alpha T], u\rangle = \langle (i\xi)^\alpha \hat{T}, u\rangle.$

(ii) $\langle D^\alpha \hat{T}, u\rangle = \langle F[(-i\xi)^\alpha T], u\rangle.$

Beispiel 4.27 (Fouriertransformation der von Monomen erzeugten temperierten Distributionen).

4.5 Fouriertranformation in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ und Fundamentallösungen

Wir betrachten die Methode der Bestimmung von Fundamentallösungen für lineare Differentialoperatoren.
Die Methode wird konkret durchgeführt für

Beispiel 4.28 (Wärmeleitungsgleichung).

Kapitel 5

Einführung in die Theorie der Soboleväume

Die Distributionentheorie stellt alle Hilfsmittel zur Behandlung linearer insbesondere partieller Diffferentialgleichungen zur Verfügung. Die Theorie der sogenannten Sobolvräume ermöglicht darüberhinaus unter anderem auch die Behandlung nichtlinearer Differentialgleichungen.

Beispiel 5.1 (Nichtlineares Wachstum einer Bakterienpopulation).

5.1 Die Hölderräume

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ eine offene Menge.

Definition 5.2 (Hölderstetigkeit). *Sei $u \in C^0(\Omega)$ und $\gamma \in (0,1], k \in \mathbf{N}_0$.*

(i) u heißt **Hölderstetig zum Exponenten** *γ g.d.w. eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß für alle $x, y \in \Omega$ gilt*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma.$$

(ii) Die Abbildung $\|\cdot\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} : C^0(\Omega) \to \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ mit

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} &:= \|u\|_{C^0(\Omega)} + |u|_{C^{0,\gamma}}(\Omega), \\ |u|_{C^{0,\gamma}}(\Omega) &:= \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}. \end{aligned}$$

heißt **Höldernorm**.

(iii) Der **Hölderraum** $C^{k,\gamma}(\Omega)$ *enthält alle Funktionen* $u : \Omega \to \mathbf{R}$, *für die alle Ableitungen der Ordnung* k *existieren und stetig sind und für die gilt*

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\Omega)} := \sum_{\alpha \in \mathbf{N}_0^d,\, |\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{C(\Omega)} + \sum_{\alpha \in \mathbf{N}_0^d,\, |\alpha| = k} |D^\alpha u|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} < \infty.$$

Für einen normierten Raum X mit Norm $\|\cdot\|_X$ verwenden wir die Bezeichnung $(X, \|\cdot\|_X)$. $\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\Omega)}$ ist eine Norm auf $C^{k,\gamma}(\Omega)$.

Theorem 5.3 (Vollständigkeit der Hölderräume). *Für* $k \in \mathbf{N}_0$ *und* $\gamma \in (0,1]$ *ist der Hölderaum* $(C^{k,\gamma}(\Omega), \|\cdot\|_{C^{k,\gamma}}(\Omega))$ *ein Banachraum.*

5.2 Schwache Ableitungen

Definition 5.4 (Testfunktionen auf Ω). *Eine Funktion* $\phi \in C^\infty(\Omega)$ *heißt* **Testfunktion auf** Ω *g.d.w. eine kompakte Menge* $K \subset\subset \Omega$ *existiert, so daß* $\operatorname{supp}(\phi) \subset K$ *gilt.*
Die Menge aller Testfunktionen auf Ω *sei mit* $\mathcal{D}(\Omega)$ *bezeichnet.*

Definition 5.5 (Schwache Ableitung). *Seien* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *und* $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$.
Dann heißt v **schwache Ableitung von** u **der Ordnung** α *g.d.w.*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi(x)\, dx = \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} v(x) \phi(x)\, dx$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *gilt. Wir schreiben in diesem Fall* $D^\alpha u := v$.

Bemerkung 5.6. *(i) Eine distributionelle Ableitung von* T_u, $u \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ *existiert immer, eine schwache Ableitung von* u *nicht.*

(ii) Sei $u \in C^k(\Omega)$ *für* $k \in \mathbf{N}_0$. *Dann stimmt für* $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$, $|\alpha| \le k$, *die schwache Ableitung mit der klassischen Ableitung überein.*

Lemma 5.7 (Eindeutigkeit). *Die Funktion* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *besitze zwei schwache Ableitungen der Ordnung* $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$, *die mit* $v_1, v_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ *bezeichnet seien. Dann gilt* $v_1 = v_2$ *fast überall.*

Beispiel 5.8. *Schwache Ableitungen der Betragsfunktion.*

Beispiel 5.9 (Nochmal Bakterienpopulation). *Sinnvolle Definition von schwachen Lösungen für ein nichtlineares Problem mittels Sobolevräumen.*

5.3 Die Sobolevräume $W^{k,p}(\Omega)$ und $W_0^{k,p}(\Omega)$

Wir führen für $p \ge 1$ die Bezeichnung

$$[p, \infty] := [p, \infty) \cup \{\infty\}$$

ein.

Definition 5.10 (Der Raum $W^{k,p}(\Omega)$). *(i) Wir definieren für $k \in \mathbf{N}_0$ und $p \in [1,\infty]$*

$$W^{k,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^1_{loc}(\Omega) \,\Big|\, \forall\, \alpha \in \mathbf{N}_0^d,\ |\alpha| \le k : \\ D^\alpha u \text{ existiert und } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \Big\}.$$

$W^{k,p}(\Omega)$ heißt **Sobolevraum zu** *(k,p).*

(ii) Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ definieren wir die **Sobolevnorm zu** *(k,p) durch*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{\alpha \in \mathbf{N}_0^d,\, |\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} & : p \in [1,\infty), \\ \sum\limits_{\alpha \in \mathbf{N}_0^d,\, |\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & : p = \infty. \end{cases}$$

(iii) Seien $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset W^{k,p}(\Omega)$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbf{N}_0$ und $p \in [1,\infty]$. Wir sagen, daß $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ **gegen** *u* **in** *$W^{k,p}(\Omega)$* **konvergiert** *g.d.w.*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Bemerkung 5.11. *(i) $k = 0, p \in [1,\infty] \Rightarrow W^{k,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.*

(ii) Für $p = 2$ schreibt man auch $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.

Definition 5.12 ($W_0^{k,p}(\Omega)$). *Wir definieren für $k \in \mathbf{N}_0$ und $p \in [1,\infty]$*

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \Big\{ u \in W^{k,p}(\Omega) \,\Big|\, \exists\, \{u_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega) : \\ \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \Big\}.$$

$W_0^{k,p}(\Omega)$ ist also der Abschluß von $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ bzgl. der Sobolevnorm zu (k,p).

Beispiel 5.13 (Standardbeispiel). *Für welche $a \in \mathbf{R}$ liegt die Funktion $u : B_1(0) \to \mathbf{R}$ mit*

$$u(x) := \begin{cases} |x|^{-a} : x \in B_1(0) \setminus \{0\}, \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

in welchen Sobolevräumen?

Proposition 5.14 (Differentiationsregeln). *Seien $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbf{N}_0$ und $p \in [1,\infty]$. Dann gilt für $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^d$, $|\alpha| \le k$, $|\alpha| + |\beta| \le k$ und $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$,

(ii) $D^\alpha(D^\beta u) = D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}(u)$,

(iii) $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$,

(iv) $\tilde{\Omega} \subset \Omega \Rightarrow u \in W^{k,p}(\tilde{\Omega})$,

(v) für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *ist auch* $\phi u \in W^{k,p}(\Omega)$ *und es gilt die Leibnizregel*

$$D^\alpha(\phi u) = \sum_{\gamma \in \mathbf{N}_0^d, \gamma_i \le \alpha_i} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} D^\gamma \phi D^{\alpha-\gamma} u, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} := \Pi_{i=1}^d \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}.$$

Theorem 5.15 (Vollständigkeit). *Sei* $k \in \mathbf{N}_0$ *und* $p \in [1,\infty]$. *Dann ist der Raum* $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ *ein Banachraum.*

5.4 Approximation durch C^∞-Funktionen

Für die Diracfunktion ϕ_δ, $\delta > 0$, definieren wir

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega \,|\, \mathrm{dist}(x, \Omega) > \delta\}.$$

Weiter sei für $W^{k,p}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ die (Friedrichs) Glättung $u_\delta : \Omega_\delta \to \mathbf{R}$ durch

$$u_\delta(x) := (u * \phi_\delta)(x) \quad (x \in \Omega_\delta)$$

gegeben.

Theorem 5.16 (Lokale Approximation). *Sei* $k \in \mathbf{N}_0$, $p \in [1,\infty)$ *und* $u \in W^{k,p}(\Omega)$. *Dann gilt für alle* $K \subset\subset \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \|u_\delta - u\|_{W^{k,p}(K)} = 0.$$

Theorem 5.17 (Globale Approximation). *Sei* Ω *beschränkt und* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *für* $k \ge 1$ *und* $p \in [1,\infty)$. *Dann existiert eine Folge* $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, *so daß gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Wir benötigen

$$\begin{aligned} C^k(\bar{\Omega}) &:= \big\{u \in C^k(\Omega) \,\big|\, \forall\, \alpha \in \mathbf{N}_0^d,\ |\alpha| \le k,\ U \subset \Omega \text{ offen, beschränkt:} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u \text{ glm. stetig}\big\}, \\ C^\infty(\bar{\Omega}) &:= \textstyle\bigcap_{k=0}^\infty C^k(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Definition 5.18 (C^k-Rand). *Sei* Ω *offen und beschränkt. Für* $k \in \mathbf{N}$ *heißt der Rand von* Ω $(\partial\Omega)$ *ein* C^k-**Rand** *g.d.w. für alle* $s \in \partial\Omega$ *eine Konstante* $r = r(s) > 0$ *und eine Funktion* $\gamma \in C^k(\mathbf{R}^{d-1})$ *existieren, so daß –abgesehen von Umorientierung/Umbenennung der Koordinaten– gilt*

$$\Omega \cap B_r(s) = \{x \in B_r(s) \,|\, x_d > \gamma(x_1, \ldots, x_{d-1})\}.$$

Theorem 5.19 (Globale Approximation durch $C^\infty(\bar{\Omega})$-Funktionen). *Sei Ω eine beschränkte Menge und $\partial\Omega$ ein C^1-Rand. Weiter sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$ für $k \geq 1$ und $p \in [1,\infty)$.*
Dann existiert eine Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ so daß gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

5.5 Erweiterungs- und Spursätze

Theorem 5.20 (Erweiterungssatz). *Ω sei eine beschränkte offene Menge mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Weiter sei $\hat{\Omega} \subset \mathbf{R}^d$ offen mit $\bar{\Omega} \subset \hat{\Omega}$.*
Für $p \in [1,\infty]$ existiert dann eine beschränkte lineare Abbildung

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$$

mit den Eigenschaften

(i) $E(u) = u$ *fast überall in* Ω, $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

(ii) $\operatorname{supp}(E(u)) \subset \hat{\Omega}$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

E heißt **Erweiterungsoperator**.

Theorem 5.21 (Spursatz). *Ω sei eine beschränkte offene Menge mit C^1-Rand. $\partial\Omega$. Für $p \in [1,\infty)$ existiert ein beschränkter linearer Operator*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

mit den Eigenschaften

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \Rightarrow T(u) = u|_{\partial\Omega}$,

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

T heißt **Spuroperator** *und $T(u)$ die* **Spur vom** *u.*

Beispiel 5.22 (Gebietszerlegungsmethoden). *Kurze Einführung in Gebietszerlegungsmethoden im parallelen Rechnen und zum Beweis der Existenz von Lösungen des Poissonproblems auf komplizierten Gebieten nach Schwarz. Für die Wohlgestelltheit der verwendeten Methoden ist der Spursatz notwendig.*

5.6 Sobolev-Ungleichungen

Beispiel 5.23 (Inklusion der L^p-Räume).

Beispiel 5.24 (Energieabschätzung für Wärmeleitungsgleichung).

Definition 5.25 (Sobolevzahl). *Sei $p \in [1,d]$ für $d \in \mathbf{N}$. Die* **Sobolevzahl zu** (p,d) *ist*

$$p^* = p^*(p,d) = \frac{dp}{d-p} > p.$$

Theorem 5.26 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev für glatte Funktionen auf $\mathbf{R}^d$). *Sei $p \in [1,d)$ für $d \in \mathbf{N}$, $d > 1$.*
Es existiert eine Konstante $C > 0$, $C = C(p,d)$, so daß für alle $u \in C_0^1(\mathbf{R}^d)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbf{R}^d} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^d)}$$

gilt. Dabei ist

$$\begin{aligned} \nabla u &:= (D^{e_1}u, \ldots, D^{e_d}u)^T, \\ \|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} &:= \||\nabla u|\|_{L^p(\mathbf{R}^d)}. \end{aligned}$$

Theorem 5.27 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev für $W^{1,p}$-Funktionen auf Ω). *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ offen und beschränkt mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Weiter sei $p \in [1,d)$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt*

(i) $u \in L^{p^*}(\Omega)$,

(ii) $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Beispiel 5.28 (Der Fall $d = p$ für $d = 1$ und $d > 1$).

Theorem 5.29 (Morrey's Ungleichung für C^1-Funktionen auf $\mathbf{R}^d$). *Es sei $p \in (d,\infty]$ für $d \in \mathbf{N}$.*
Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $u \in C^1(\mathbf{R}^d) \cap W^{1,p}(\mathbf{R}^d)$

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbf{R}^d)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^d)}$$

gilt. Dabei ist $\gamma : 1 - d/p$.

Theorem 5.30 (Morrey's Ungleichung für $W^{1,p}$-Funktionen auf Ω). *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ offen und beschränkt mit C^1-Rand $\partial\Omega$.*
Für $p \in (d,\infty]$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$ existiert dann eine Funktion $u^* \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ mit den Eigenschaften

(i) $u^* = u$ *fast überall in* Ω,

(ii) $\|u^*\|_{C^{0,\infty}(\bar{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Theorem 5.31 (Sobolevungleichungen). *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ beschränkt und offen mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Weiter sei $d \in \mathbf{N}$ und $p \in [1,\infty]$.*

(i) Für $k < d/p$ gelten die folgenden Aussagen

(a) $u \in W^{k,p}(\Omega) \Rightarrow u \in L^q(\Omega)$. *Dabei ist* $q = pd/(d-pk)$.

(b) $\exists\, C > 0 :\ \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ *für alle* $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

(ii) Für $k > d/p$ gelten die folgenden Aussagen

(a) $u \in W^{k,p}(\Omega) \Rightarrow u \in C^{k-[d/p]-1,\gamma}(\Omega)$. *Dabei ist*

$$\gamma = \begin{cases} \left[\dfrac{d}{p}\right] + 1 - \dfrac{d}{p} : \dfrac{d}{p} \notin \mathbf{N}, \\ \text{jede Zahl in } (0,1) : \dfrac{d}{p} \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

(b) Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $u \in W^{k,p}(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{C^{k-[d/p]-1,\gamma}} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Lemma 5.32 (Interpolationsungleichung). *Seien $\theta \in (0,1)$ und $s, r, t \in [1, \infty]$ mit $s \leq r \leq t$ und*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}.$$

Weiter sei $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$. Dann ist $u \in L^r(\Omega)$ und

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^s(\Omega)}^{\theta} \|u\|_{L^t(\Omega)}^{1-\theta}.$$

Theorem 5.33 (Kompaktheitssatz von Rellich). *Sei Ω beschränkt und offen mit C^1-Rand $\partial\Omega$.*

(i) Sei $p \in [1, d)$ für $d > 1$. Für jede in $W^{1,p}(\Omega)$ gleichmäßig beschränkte Folge $\{u_n\}_{n\in N} \subset W^{1,p}(\Omega)$ existiert eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ und $u \in L^q(\Omega)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \|u - u_{n_k}\|_{L^q(\Omega)} = 0.$$

Dabei ist $q \in [1, p^*)$.

(ii) Sei $p \geq 1$ für $d = 1$. Dann gilt Aussage (i) für $q \in [1, \infty]$.

Literatur

[1] R. Brigola, *Fourieranalysis, Distributionen und Anwendungen.* Vieweg Lehrbuch Angewandte Mathematik (1997).

[2] F.G. Friedländer, *Introduction to the Theory of Distributions.* Cambridge University Press (1982).

[3] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 257. Springer-Verlag, 2te Auflage (1990).

[4] L. Jantscher, *Distributionen.* De Gruyter Lehrbuch (1971).

[5] I. Richards and H. Youn, *Theory of Distributions: A Non-Technical Introduction.* Cambridge University Press, Reprint (1995).

[6] R. Strichartz, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms.* Studies in Advanced Mathematics, CRC Press (1994).

[7] W. Walter, *Einführung in die Theorie der Distributionen.* Mannheim-Wien-Zürich: Bibliographisches Institut, B.I.- Wissenschaftsverlag. (1974).

[8] R.A. Adams, *Sobolev Spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press (1975).

[9] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Collection Mathematiques Appliquees pour la Maitrise, Paris (1983).

[10] L.C. Evans, *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19. American Mathematical Society (1998).

[11] L.C. Evans and R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Studies in Advanced Mathematics, (1992).

[12] J.T. Marti, *Introduction to Sobolev spaces and finite element solution of elliptic boundary value problems.* Academic Press (1986).

[13] W.P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions. Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 120. Springer (1989).