Über das Mischen von Spielkarten, ein mathematisches Menü

Stephanie Gloor und Lorenz Halbeisen

Die Köche: Als Lorenz Halbeisen sieben Jahre alt war, wurde Stephanie Gloor 1971 in Bern geboren. Er verbrachte seine Jugend in Laufen, während sie in Basel und Zürich aufwuchs. Nachdem er sein Mathematikstudium an den Universitäten Basel und Zürich abgeschlossen hatte, studierte sie dasselbe an der ETH Zürich. Er hat vor ein paar Jahren an der ETH Zürich – wo sich ihre Wege kreuzten, als sie beide Assistenten waren – in kombinatorischer Mengenlehre promoviert. Während seinen Forschungsaufenthalten in Caen (Normandie) und Barcelona (Katalonien) hat sie an der Universität Zürich in Geometrie promoviert. Zurzeit sind beide in Berkeley und profitieren von der berühmten Logikgruppe am mathematischen Institut beziehungsweise vom noch berühmteren Silicon Valley. Während er gerne Rad fährt, bleibt sie lieber zu Hause und liest. Jedoch hören beide gerne klassische Musik, wo ihre bevorzugten Musikepochen sich im neunzehnten Jahrhundert bei Franz Schubert überschneiden.

Amuse-bouche: Eine gerade Anzahl Spielkarten wird so gemischt, dass man zuerst die Hälfte der Karten abhebt und dann die beiden Stapel nach dem Reissverschluss-Verfahren mischt (das heisst: die unterste Karte vom abgehobenen Stapel zuunterst, darauf die unterste Karte vom anderen Stapel, dann die zweitunterste vom abgehobenen Stapel, usw.). Die Frage ist nun, wie oft gemischt werden muss, um wieder zur Ausgangsstellung zurückzukehren. Wir werden eine vollständige Antwort auf diese Frage geben, und zum Beispiel sehen, dass man bei 4090 Spielkarten 4090 mal mischen muss, während bei 4094 Karten 12-maliges Mischen genügt. Diese Art zu mischen, wird insbesondere von Zauberkünstlern verwendet, braucht aber einige Fingerfertigkeit.

Die Vorspeise

Zuerst geben wir eine Frage wieder, die von Chantal Spleiss in *Elemente der Mathematik,* **52**(1997) S. 137 (Aufgabe No. 1127) formuliert wurde.

Ein Kartenspiel mit n Karten wird folgendermassen gemischt: Die Karten werden in zwei möglichst gleich grosse Stapel aufgeteilt. Der erste Stapel enthält allenfalls eine Karte mehr als der zweite. Dann werden die beiden Stapel, Bildseite nach unten, nach dem Reissverschluss-Verfahren gemischt: Zuerst kommt die erste Karte des ersten Stapels, dann die erste Karte des zweiten Stapels, dann die zweite Karte des ersten Stapels, etc. Ist es möglich, dass nach mehrfachem Wiederholen dieses Mischprozesses wieder die ursprüngliche Reihenfolge der Karten auftritt?

Da aus der Fragestellung nicht hervorgeht, ob der erste Stapel der untere oder der obere Stapel ist, ergeben sich folgende Fälle (mit ihren Unterfällen):

Fall 1 : Der erste Stapel ist der obere Stapel.
Fall 1.a : Die Anzahl der Spielkarten ist gerade.

Das ist derjenige Fall, den wir im folgenden Kapitel untersuchen werden.

Fall 1.b : Die Anzahl der Spielkarten ist ungerade.

In diesem Fall hat der obere Stapel eine Karte mehr als der untere Stapel und die oberste Karte bleibt immer zuoberst. Wir sind also eigentlich im Fall 1.a, weil wir die oberste Karte weglegen können.

Fall 2 : Der erste Stapel ist der untere Stapel.
Fall 2.a : Die Anzahl der Spielkarten ist gerade.

In diesem Fall bleibt die unterste und die oberste Karte an Ort. Wir sind also im Fall 1.a, weil wir die unterste und die oberste Karte weglegen können.

Fall 2.b : Die Anzahl der Spielkarten ist ungerade.

Hier bleibt die unterste Karte immer zuunterst und kann somit weggelegt werden. Da der erste (untere) Stapel eine Karte mehr hat, sind wir wiederum im Fall 1.a.

Es genügt also, den Fall 1.a zu untersuchen.

Es ist offensichtlich, dass jeder Mischvorgang eine Permutation der Spielkarten darstellt und weil wir immer auf dieselbe Art und Weise mischen, ist es immer dieselbe Permutation. Nun gibt es bei n Karten nur $n!$ Permutationen, und weil man eine Permutation auf genau eine Art rückgängig machen kann (jede Permutation hat genau ein Inverses), müssen wir nach spätestens $n!$ mal Mischen wieder in der Anfangsstellung sein. Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, dass die Anfangsstellung bereits nach spätestens n mal Mischen wieder auftritt.

Bemerkung: Falls nicht immer gleich gemischt wird, lässt es sich leicht einrichten, dass die Anfangsstellung nie mehr auftritt. Durch geschicktes Kombinieren der Fälle 1.a und 2.a ist es sogar möglich, eine beliebige Karte an einen beliebigen Platz zu bewegen wie S. Ramnath und D. Scully gezeigt haben (siehe unsere Empfehlungen).

Der Hauptgang

Aus dem Vorhergehenden wissen wir, dass es ohne Einschränkung der Allgemeinheit genügt, den Fall zu betrachten, wo n gerade ist und der erste Stapel den oberen Stapel bezeichnet. Im Folgenden sei also $n = 2m$, wobei m eine positive, natürliche Zahl ist.

Wie bereits erklärt, ist jeder Mischvorgang eine Permutation (wir bezeichnen sie mit σ) der Spielkarten. Wenn wir nun die Spielkarten von unten nach oben (von 1 bis n) durchnumerieren, so erhalten wir folgende Beziehung:

$$\sigma(k) = \begin{cases} 2k & \text{falls } k \leq m, \\ 2(k-m)-1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus dem Vorhergehenden wissen wir auch, dass es eine positive Zahl l gibt, so dass für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt, dass $\sigma^l(k) = k$ ist.

Sei

$$\begin{aligned} g_0(k) &:= 2k\,, \\ g_1(k) &:= 2(k-m)-1 = 2k-2m-1 = 2k-(n+1)\,. \end{aligned}$$

Für $k > m$ haben wir $\sigma(k) = g_1(k)$, und für $1 \le k \le m$ gilt $\sigma(k) = g_0(k)$.

Ist $s = \langle a_0, \dots, a_{l-1} \rangle$ eine endliche 0-1-Sequenz, so definieren wir für k mit $1 \le k \le n$

$$s(k) := g_{a_{l-1}} \circ \ldots \circ g_{a_0}(k)\,.$$

Falls $\sigma^h(k) = k'$ ist (für $k \in \{1, \dots, n\}$), gibt es eine 0-1-Sequenz $s = \langle a_0, \dots, a_{h-1} \rangle$ mit $s(k) = g_{a_{h-1}} \circ \ldots \circ g_{a_0}(k) = k'$. Es gilt auch das Umgekehrte. Wenn für eine beliebige 0-1-Sequenz $s = \langle a_0, \dots, a_{h-1} \rangle$ und für $k, k' \in \{1, \dots, n\}$ die Beziehung $s(k) = k'$ gilt, so ist $\sigma^h(k) = k'$. Falls nämlich $s(k) \notin \{1, \dots, n\}$ für $s = \langle a_0, \dots, a_{h-1} \rangle$, so ist $s'(k) \notin \{1, \dots, n\}$ für jede beliebige Fortsetzung $s' = \langle a_0, \dots, a_{h-1}, a_h, \dots, a_{h+j} \rangle$ $(j \ge 0)$ von s.

Für eine endliche 0-1-Sequenz s bezeichne $l(s)$ die Länge der Sequenz s.

Wir definieren nun die Funktion ϑ von der Menge aller endlichen 0-1-Sequenzen in die Menge der natürlichen Zahlen wie folgt:

$$\begin{aligned} \vartheta(\langle\,\rangle) &:= 0\,; \\ \vartheta(\langle a_0, \dots, a_l, 0 \rangle) &:= 2\,\vartheta(\langle a_0, \dots, a_l \rangle)\,; \\ \vartheta(\langle a_0, \dots, a_l, 1 \rangle) &:= 2\,\vartheta(\langle a_0, \dots, a_l \rangle) + (n+1)\,. \end{aligned}$$

Mit Induktion nach der Länge der Sequenz s lässt sich zeigen, dass für $s = \langle a_0, \dots, a_{l-1} \rangle$ $\vartheta(s) = (n+1) \sum_{i=0}^{l-1} a_i 2^{l-1-i}$ ist.

Das folgende Theorem beantwortet nun unsere Fragestellung.

Theorem *Sei l_n die kleinste positive Zahl mit $\sigma^{l_n}(k) = k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Es gilt*

$$l_n = \min\{i : (n+1) \textit{ teilt } (2^i - 1)\}\,.$$

Beweis: Mit Induktion nach der Länge der Sequenz s kann man leicht zeigen, dass $s(k) = 2^{l(s)}k - \vartheta(s)$ ist. Somit gilt $s(k) = k$ genau dann, wenn

$$k = \frac{\vartheta(s)}{2^{l(s)} - 1}\,.$$

Wir zeigen zuerst, dass $l_n \le \min\{i : (n+1) \text{ teilt } (2^i - 1)\}$ ist, beziehungsweise genauer: Falls $(n+1)$ die Zahl $(2^{i_0} - 1)$ teilt, gibt es für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ eine 0-1-Sequenz s_k der Länge i_0 mit $k = \frac{\vartheta(s_k)}{2^{i_0} - 1}$, was bedeutet, dass $\sigma^{i_0}(k) = k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ ist.

Falls $(n+1)$ die Zahl $(2^{i_0} - 1)$ teilt, ist

$$w := \frac{2^{i_0} - 1}{n+1}$$

eine natürliche Zahl. Für eine beliebige 0-1-Sequenz $s = \langle a_0, \dots, a_{i_0 - 1} \rangle$ gilt

$$\frac{\vartheta(s)}{2^{i_0} - 1} = \frac{(n+1) \sum_{j=0}^{i_0-1} a_j 2^{i_0-1-j}}{2^{i_0} - 1} = \frac{1}{w} \sum_{j=0}^{i_0-1} a_j 2^{i_0-1-j}\,.$$

Da $kw < 2^{i_0} - 1$ für $k \in \{1, \dots, n\}$, gibt es für jede solche Zahl k eine 0-1-Sequenz $s_k = \langle a_0, \dots, a_{i_0 - 1} \rangle$ mit

$$kw = \sum_{j=0}^{i_0-1} a_j 2^{i_0-1-j} \qquad \text{bzw.} \qquad k = \frac{1}{w} \sum_{j=0}^{i_0-1} a_j 2^{i_0-1-j} = \frac{\vartheta(s_k)}{2^{i_0} - 1}\,.$$

Mit Obigem ist die erste Ungleichung gezeigt.

Zu zeigen bleibt: $l_n \geq \min\{i : (n+1) \text{ teilt } (2^i - 1)\}$.

Wähle $k \in \{1, \dots, n\}$ so, dass k und $n+1$ teilerfremd sind, (z. Bsp. $k = n$). Aus Vorherigem wissen wir, dass es eine 0-1-Sequenz s_k der Länge l_n gibt so, dass

$$k \cdot (2^{l_n} - 1) = \vartheta(s_k) = (n+1) \cdot v$$

für ein $v \in \{1, \dots, 2^{l_n} - 1\}$. Da k und $n+1$ teilerfremd sind, muss $(n+1)$ die Zahl $2^{l_n} - 1$ teilen. Also gilt auch $l_n \geq \min\{i : (n+1) \text{ teilt } (2^i - 1)\}$ und somit

$$l_n = \min\{i : (n+1) \text{ teilt } (2^i - 1)\}\,,$$

was zu zeigen war.

BEMERKUNG: Die Sequenz s_k beschreibt den Weg der k-ten Karte durch die Stapel. Der Wert a_i gibt an, ob die k-te Karte nach i-maligem Mischen im oberen ($a_i = 1$) oder unteren ($a_i = 0$) Stapel ist.

ZUR ERINNERUNG: Für natürliche Zahlen n bezeichnet $\varphi(n)$ die Anzahl der positiven Zahlen $b \leq n$, die zu n teilerfremd sind. Offensichtlich gilt immer $\varphi(n+1) \leq n$. Der Eulersche Satz sagt nun, dass für teilerfremde a und m die Beziehung

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$$

gilt; oder anders ausgedrückt, m teilt $(a^{\varphi(m)} - 1)$.

COROLLAR *Aus dem Beweis des Theorems und dem Eulerschen Satz erhalten wir folgende Aussagen:*

(i) Alle Karten, welche eine Kartennummer k besitzen die mit $n+1$ teilerfremd ist, oder für die $(n+1) - k$ und $n+1$ teilerfremd sind, haben maximale Zyklenlänge l_n. Insbesondere muss man zur Bestimmung von l_n nur die Länge des Kartenzyklus der untersten Karte (d.i. $k = 1$) oder der obersten Karte ($k = n$) betrachten.

(ii) Es gilt $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \leq l_n \leq \varphi(n+1) \leq n$ (wobei $\lfloor r \rfloor$ die grösste ganze Zahl bezeichnet, die kleiner oder gleich r ist).

(iii) Ferner ist l_n das kleinste gemeinsame Vielfache aller vorkommenden Kartenzyklenlängen und ist gleich der maximalen Kartenzyklenlänge. Die Kartenzyklenlängen untereinander müssen sich hingegen nicht teilen.

BEWEIS: Die Aussage (i) folgt aus den letzten Zeilen des Beweises des Theorems, und daraus, dass es keine Rolle spielt, ob die Spielkarten mit den Bildern nach oben oder mit den Bildern nach unten gemischt werden. Die obere Abschätzung in (ii) erhalten wir aus dem Eulerschen Satz, die untere durch Abschätzen der Kartenzyklenlänge der untersten Karte. Dass die Kartenzyklenlängen sich untereinander nicht teilen müssen, sehen wir am Beispiel $n = 20$, womit auch (iii) folgt und das Korollar bewiesen ist.

Das Dessertbuffet

Für gewisse n lässt sich l_n explizit berechnen. Insbesondere ist, wie im folgenden gezeigt wird, für $n = 2^k$ die Mischzyklenlänge l_n gleich $2k$, und für $n = 2^k - 2$ ist $l_n = k$.

Im allgemeinen ist das Verhalten der Länge l_n des Mischzyklus ungeordnet, was aus folgender Tabelle ersichtlich wird.

n	l_n
2	2
4	4
6	3
8	6
10	10
12	12
14	4
16	8
18	18
20	6
22	11
24	20
26	18
⋮	⋮
36	36
⋮	⋮
52	52
54	20
56	18
58	58
60	60

n	l_n
1008	504
1010	42
1012	92
1014	84
1016	84
1018	1018
1020	340
1022	10
1024	20
1026	156
1028	294
1030	515
1032	258
1034	132
1036	120
⋮	⋮
4090	4090
4092	4092
4094	12
4096	24
4098	4098

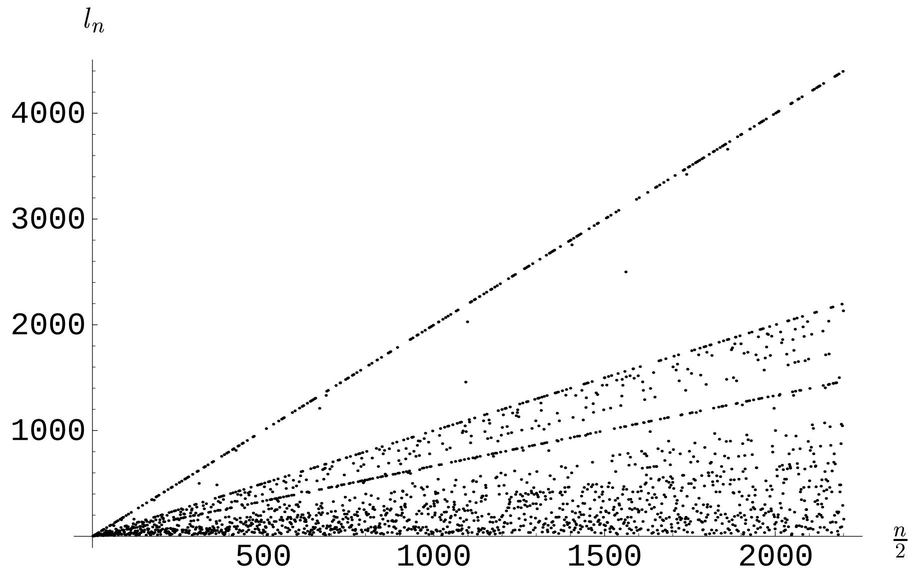
Wir zeigen nun, dass $l_{2^k} = 2k$ ist. Dazu kann man zum Beispiel den Verlauf der untersten Karte betrachten.

$$\begin{array}{rccccccccl} & 1 & \to & 2 & \to & 2^2 & \to & \dots & \to & 2^{k-1} & \text{Karte im unteren Stapel} \\ \to & 2^k & \to & 2^k-1 & \to & 2^k-3 & \to & \dots & \to & 2^k-2^{k-1}+1 & \text{Karte im oberen Stapel} \\ \to & 1 & & & & & & & & & \text{Karte im unteren Stapel} \end{array}$$

Der Kartenzyklus der untersten Karte hat somit die Länge $2k$, und nach dem Corollar stimmt dies mit l_{2^k} überein.

Für $n = 2^k - 2$ ist $l_n = k$, weil $(n+1) = (2^k - 1)$ die Zahl $(2^k - 1)$ teilt und somit $k = \min\{i : (n+1) \text{ teilt } (2^i - 1)\}$ ist. Man könnte natürlich auch wie im vorherigen Beispiel den Verlauf der untersten Karte betrachten.

Damit ist auch gezeigt, dass die untere Schranke, welche in (ii) des Corollars berechnet wurde, immer wieder angenommen wird. Interessanterweise scheint auch die obere Schranke immer wieder aufzutreten. Dies wird noch plausibler, wenn man l_n als Funktion von n graphisch darstellt.



Wegen dem Eulerschen Satz kann l_n nur dann gleich n sein, wenn $n+1$ eine Primzahl ist. Hingegen ist nicht für jede Primzahl p, $l_{p-1} = p-1$, wie man am Beipsiel $p = 7$ oder $p = 17$ sieht. Artin vermutete, dass es unendlich viele Primzahlen p mit $l_{p-1} = p-1$ gibt. Unseres Wissens ist diese Vermutung immer noch unbewiesen.

Was wir weiter empfehlen können

Das mathematische Menü, das sie soeben genossen haben, wurde hier nicht zum ersten Mal gekocht. Wir hoffen aber, eine besonders schmackhafte und leicht verdauliche Version vorgestellt zu haben. Für Gourmets empfehlen wir nach *MathSciNet* (`http://ams.mathematik.uni-bielefeld.de/mathscinet/`):

C. Hooley: On Artin's conjecture, *J. für die reine u. angew. Math.* **225**(1967) 209–220.

S. Medvendoff und K. Morrison: Groups of perfect shuffles, *Math. Mag.* **60**(1987) 3–14.

E. S. Packard und R. W. Packard: The order of a perfect k-shuffle, *Fibonacci Quart.* **32**(1994) 136–144.

S. Ramnath und D. Scully: Moving card i to position j with perfect shuffles, *Math. Mag.* **69**(1996) 361–365.

C. Ronse: A generalization of the perfect shuffle, *Disc. Math.* **47**(1983) 293–306.

J. W. Rosenthal: Card shuffling, *Math. Mag.* **54**(1981) 64–66.

Stephanie Gloor
Departement Mathematik
HG G53
ETH-Zentrum
8092 Zürich
Schweiz
E-mail: sgloor@math.ethz.ch

Lorenz Halbeisen
Centre de Recerca Matemàtica
Institut d'Estudis Catalans
Apartat 50
08193 Bellaterra (Barcelona)
Spanien
E-mail: halbeis@crm.es