Elliptische Kurven & Kryptologie Serie 2

Projektive Transformationen algebraischer Kurven Abgabe: 10. März

---

1. Gegeben seien die beiden Geraden $g_1: \; y - 2x - 1 = 0$ und $g_2: \; -2y + 3x + 4 = 0$.

Finde eine projektive Transformation, so dass die Geraden $\tilde{g}_1$ und $\tilde{g}_2$ im neuen Koordinatensystem parallel sind.

2. Die drei Punkte $P_0 = (-1, 1, 0)$, $P_1 = (3, 2, 1)$, $P_2 = (0, -2, 1)$, bilden die Ecken des Referenzdreiecks des neuen Koordinatensystems.

Zeichne die Geraden $\tilde{X} = 0$, $\tilde{Y} = 0$, $\tilde{Z} = 0$, in die affine Ebene $\mathbb{A}^2$ mit den alten Koordinaten.

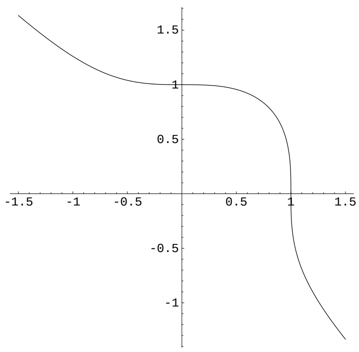
3. Gegeben sei die Ellipse $K_f: \; f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2 = 0$.

(a) Finde eine rationale projektive Transformation, welche die Ellipse K_f in eine Parabel $K_{\tilde{f}}: \; \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{y} - c\tilde{x}^2 = 0$ überführt.

(b) Bestimme damit $K_f(\mathbb{Q})$, *d.h.* die Menge der rationalen Punkte auf K_f.

4. Finde eine rationale projektive Transformation, welche den Einheitskreis $K_f : f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ in eine Hyperbel $K_{\tilde{f}}: \; \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}\tilde{y} - c = 0$ überführt.

5. Gegeben sei die cubische Kurve $C_f: \; f(x, y) = x^3 + y^3 - 1 = 0$ auf der xy-Ebene.



In der affinen Ebene $\mathbb{A}^2$ seien die neuen Koordinatenachsen gegeben durch

$$\tilde{X} = 0: \; X + Y - Z = 0\,, \quad \tilde{Y} = 0: \; X - Y\,, \quad \tilde{Z} = 0: \; X + Y = 0\,.$$

Wie sieht die Kurve $C_{\tilde{f}}$ in den neuen Koordinaten aus?