Elliptische Kurven & Kryptologie Serie 1

Kurven, Geraden, und pythagoräische Tripel Abgabe: 3. März

---

1. Gegeben seien die Geraden $g_1: \ y = -2x + 5$ und $g_2: \ \sqrt{2}x - 2y - 3 = 0$.

(a) Bestimme die rationalen Punkte der Geraden g_1 und g_2.

(b) Berechne den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2.

(c) Finde eine Parallele zu g_2, auf der keine rationalen Punkte liegen.

2. Gegeben sei der Kegelschnitt $K_f: \ f(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 3x - 2y - xy - 7 = 0$, sowie die beiden rationalen Geraden $g_1: \ y = 2x + 1$ und $g_2: \ 3x - 2y + 1 = 0$.

Berechne die Schnittpunkte der beiden Geraden mit der Kurve K_f.

3. Zeige, dass es unendlich viele pythagoräische Tripel gibt der Form:

(a) $(a, b, b + 1)$

(b)* $(a, a + 1, c)$

4. Sei $A = (1, 0)$, $B = (x, y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, $C = (0, 0)$, und $C' = (-1, 0)$. Für $\theta = \measuredangle BCA$ gilt also $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$.

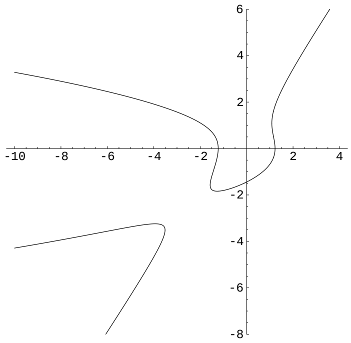
(a) Zeige, dass gilt: $\measuredangle BC'A = \theta/2$.

(b) Zeige, dass für $t = \tan(\theta/2)$ gilt: $x = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ und $y = 2t/(1 + t^2)$.

(c) Löse damit die Gleichung

$$\frac{\cos^2(\theta)}{3\sin^2(\theta)} = 12\,.$$

5. Gegeben sei die cubische Kurve $C_f: \ f(x, y) = y^3 - 2x^2 - \frac{3}{2}xy^2 + 3 = 0$ in der xy-Ebene.



Sei $F(X, Y, Z)$ die homogene Form von $f(x, y)$. Dehomogenisiere $F(X, Y, Z)$ nach den Variablen X beziehungsweise Y, dass heisst es soll $F(1, Y, Z)$ beziehungsweise $F(X, 1, Z)$ gebildet werden. Skizziere $C_{F(1,Y,Z)}$ und $C_{F(X,1,Z)}$ in den entsprechenden affinen Ebenen.