Lineare Algebra I

WS 00/01

Musterlösung zum Übungsblatt 8 (Zwischentest)

---

36. Wir schreiben zuerst $\pi \in S_8$ als Produkt von disjunkten Zyklen und erhalten $\pi = (1,8,2,6)(3,4,7)$, wobei Zyklen mit nur einem Element weggelassen werden. Nun schreiben wir die Zyklen als Produkt von Transpositionen und erhalten

$$\pi = \underbrace{(1,8)(8,2)(2,6)}_{=(1,8,2,6)}\underbrace{(3,4)(4,7)}_{=(3,4,7)}$$

Das heisst, dass π das Produkt einer ungereaden Anzahl von Transpositionen ist, und somit ist $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$.

37. (a) Es ist leicht einzusehen, dass das Neutralelement von $G = \{a, b, c, d\}$ das Element b ist. Ferner sieht man, dass für alle $x \in G$ gilt: $x \circ x = b$, d.h. jedes Element aus G ist zu sich selbst invers. Das gilt nicht in $\mathbb{Z}_4$, also ist G isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

    (b) Ein Isomorphismus $\Phi : G \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ist z.B. $\Phi(b) := ([0],[0])$, $\Phi(a) := ([1],[1])$, $\Phi(c) := ([1],[0])$, $\Phi(d) := ([0],[1])$. (Es ist leicht nachzuprüfen, dass für alle $x, y \in G$ gilt: $\Phi(x \circ y) = \Phi(x) + \Phi(y)$.)

    (c) Bezeichnen x, y, z die drei verschiedenen Elemente von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \setminus \{([0],[0])\}$, so gilt: $x + y = z$, $y + z = x$ und $z + x = y$. Die drei Elemente x, y, z sind also "vertauschbar", und somit ist jede bijektive Abbildung $\Phi : G \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, welche die drei Elemente a, c, d auf x, y, z abbildet, ein Isomorphismus von G nach $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Also gibt es 6 Isomorphismen von G nach $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, weil es 6 bijektive Abbildungen von $\{a, c, d\}$ auf $\{x, y, z\}$ gibt.

38. (a) Der Vektor $(0,0,0,0,1)$ ist <u>kein</u> Vektor aus U, d.h. $\dim(U) \leq 4$. Wenn wir also 4 linear unabhängige Vektoren in U finden, so bilden diese 4 Vektoren eine Basis von U. Ein Vektor $(x_1, \ldots, x_5)$ liegt in U genau dann wenn $x_1 = x_1 + \ldots + x_5$, also $0 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5$. Es ist leicht zu sehen, dass die 4 Vektoren

$$(1,0,0,0,0), (0,1,-1,0,0), (0,0,1,-1,0), (0,0,0,1,-1)$$

    alle in U liegen und linear unabhängig sind. Somit bilden diese 4 Vektoren eine Basis von U.

    (b) Die beiden linear unabhängigen Vektoren $(1,0,0,0,0)$ und $(0,1,0,0,0)$ sind <u>keine</u> Vektoren aus W, d.h. $\dim(W) \leq 3$. Wenn wir also 3 linear unabhängige Vektoren in W finden, so bilden diese 3 Vektoren eine Basis von W. Ein Vektor $(x_1, \ldots, x_5)$ liegt in W genau dann wenn $x_1 = x_1 + \ldots + x_5$ und $x_1 = -x_2$, also $0 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ und $x_1 + x_2 = 0$. Es ist leicht zu sehen, dass die 3 Vektoren

$$(1,-1,0,0,1), (0,0,-1,0,1), (0,0,0,-1,1)$$

    alle in W liegen und linear unabhängig sind. Somit bilden diese 3 Vektoren eine Basis von W.

(c) Weil nun die fünf Vektoren

$$\underbrace{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0)}_{\notin W},\underbrace{(1,-1,0,0,1),(0,0,-1,0,1),(0,0,0,-1,1)}_{\in W}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^5$ bilden, folgt aus dem Beweis von Satz 3.4.1, dass die beiden Vektoren $(1,0,0,0,0)+W$ und $(0,1,0,0,0)+W$ eine Basis des Quotientenraums $\mathbb{R}^5/W$ bilden.

39. (a) Der Vektorraum W ist der Raum aller periodischen reellen Folgen. Sind $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ und $y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$ in W, so existieren $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $x_i = x_{i+k_1}$ und $y_i = y_{i+k_2}$. Also gilt für alle $i \in \mathbb{N}$: $x_i + y_i = x_{i+k_1k_2} + y_{i+k_1k_2}$, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}^*$, nämlich $k = k_1k_2$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $x_i + y_i = x_{i+k} + y_{i+k}$. Sind also $x, y \in W$, so ist auch $(x+y) \in W$. Ferner ist mit jedem $x \in W$ auch $\lambda x \in W$ (für $\lambda \in \mathbb{R}$), also ist W ein Unterraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(b) Der Vektorraum U_k ist der Raum aller periodischen reellen Folgen mit Periodenlänge k. Jede periodische reelle Folge mit Periodenlänge k lässt sich schreiben als Linearkombination der folgenden k Vektoren v_i^k $(0 \le i \le k-1)$ aus U_k:

$$v_i^k = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{i \text{ Koordinaten}},\underbrace{1,0,0,\dots,0}_{k \text{ Koordinaten}},\underbrace{1,0,0,\dots,0}_{k \text{ Koordinaten}},1,0,0,\dots)$$

Da die k Vektoren v_i^k linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U_k und es gilt: $\dim(U_k) = k$.

40. Es ist $\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,13,17,\dots\}$.

(a) Die 4 kleinsten Elemente der Menge $M\big((1,0,1,0,1,0,1,\dots)\big)$ sind $2, 10, 110$ und 1870, denn $2 = 2^1$, $10 = 2^1 3^0 5^1$, $110 = 2^1 3^0 5^1 7^0 11^1$ und $1870 = 2^1 3^0 5^1 7^0 11^1 13^0 17^1$.

(b) Sind $x = (x_0, x_1, \dots)$ und $y = (y_0, y_1, \dots)$ zwei verschiedene unendliche 0-1–Folgen, so existiert ein kleinstes $j \in \mathbb{N}$ mit $x_j \neq y_j$. O.B.d.A. sei $x_j = 1$ und $y_j = 0$. Daraus folgt, dass für alle $k \ge j$ gilt:

$$\prod_{i=0}^{k} p_i^{x_i} \neq \prod_{i=0}^{k} p_i^{y_i},$$

weil nämlich p_j die Zahl $\prod_{i=0}^{k} p_i^{x_i}$, nicht aber die Zahl $\prod_{i=0}^{k} p_i^{y_i}$ teilt. Somit können die Mengen $M(x)$ und $M(y)$ höchstens j Elemente gemeinsam haben (wobei die Zahl j von x und y abhängt).

Bemerkung: Zwei Mengen M_1, M_2 heissen *fast disjunkt* wenn $M_1 \cap M_2$ endlich ist. Weil die Menge der unendlichen 0-1–Folgen überabzählbar ist folgt aus (b), dass es überabzählbar viele paarweise fast disjunkte Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt.

(G) Z.B. sind die fünf Vektoren v_i^5 $(0 \le i \le 4)$, welche in Aufgabe 39 (b) definiert wurden, solche Vektoren, denn sie sind linear unabhängig in ℓ_∞ und keine nicht-triviale Linearkombination dieser Vektoren liegt im Raum c_0.