Lineare Algebra I

WS 00/01

Übungsblatt 9: Lineare Abbildungen und Matrizen

---

41. Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Abbildung für die gilt:

$$\begin{aligned}\Phi\big((1,\ 0,\ 1)\big) &:= (-8,\ 34,\ 17)\\ \Phi\big((1,\ -1,\ 0)\big) &:= (8,\ -34,\ 17)\\ \Phi\big((-1,\ 0,\ 0)\big) &:= (-8,\ -34,\ -17)\\ \Phi\big((1,\ -1,\ 1)\big) &:= (-8,\ -34,\ -17)\end{aligned}$$

Begründe warum Φ keine *lineare* Abbildung sein kann.

42. Seien $v_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $v_2 = (1,\ 1,\ 0)$ und $v_3 = (1,\ 1,\ 1)$, dann ist $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Seien φ und ψ zwei lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ für die gilt:

$$\begin{aligned}\varphi\big(v_1\big) &:= (-8,\ 34,\ 17)\\ \varphi\big(v_2\big) &:= (8,\ -34,\ 17)\\ \varphi\big(v_3\big) &:= (-8,\ -34,\ -17)\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\psi\big(v_1\big) &:= (-8,\ -34,\ 17)\\ \psi\big(v_2\big) &:= (8,\ 34,\ 17)\\ \psi\big(v_3\big) &:= (-8,\ 34,\ -17)\end{aligned}$$

wobei die Bildvektoren in der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ geschrieben sind. Ferner sei $x = 2v_1 - 3v_2 + v_3$.

(a) Bestimme die Matrix von φ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimme $\psi\big(v_2\big)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimme $4\psi\big(x\big)$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestimme $(3\varphi + \psi)\big(2x\big)$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

43. Sei $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ in den Standardbasen von $\mathbb{R}^5$ und $\mathbb{R}^3$ wie folgt definiert:

$$\varphi\big((x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)\big) := (x_1,\ x_3,\ x_5)$$

(a) Zeige, dass φ eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimme die Matrix von φ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^5$ und $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestimme die Matrix von φ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der Basis $\mathcal{B}_5$ von $\mathbb{R}^5$, definiert wie folgt:

$$\mathcal{B}_5 = \{(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1), (1,\ 2,\ -1,\ 0,\ 1), (1,\ 0,\ -1,\ 2,\ 1), \\ (-1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1), (1,\ 0,\ 1,\ 2,\ -1)\}$$

44. Sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ durch folgende Matrix A gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sei weiter $x^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $x = (1,\ 2,\ 3)$.

Berechne: (a) Ax^t (b) xA (c) xAx^t (d) xA^2x^t

45. Seien $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ zwei lineare Abbildungen. Bezüglich den Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ entsprechen φ bzw. ψ den Matrizen A bzw. B, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechne die folgenden Matrizen:

(a) BA (b) BA^2 (c) BA^{-1}