Lineare Algebra I

WS 00/01

Übungsblatt 5: Rechnen in $\mathbb{Z}_m$ und Permutationsgruppen

---

21. (a) Zeige, dass die Gleichung $x^2 \equiv -2 \mod 17$ lösbar ist.

    (b) Welche Werte kann a^2 modulo 8 annehmen?

    (c) Zeige, dass die Gleichung $2x \equiv 1 \mod 6$ nicht lösbar ist.

    (d) Zeige, dass für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $a(a+1)(a+2) \equiv 0 \mod 6$.

    (e) Berechne alle Lösungen der Gleichung $2x \equiv 5 \mod 9$.

22. (a) Wieviele Elemente hat die Permutationsgruppe S_n?

    (b) Wieviele Elemente hat die alternierende Gruppe A_n?

    (c) Wieviele (bzgl. der Permutation) verschiedene k-Zyklen enthält S_n, wobei $1 \leq k \leq n$?

23. (a) Finde eine Permutation $\pi \in A_4 \setminus \{\mathrm{id}\}$ mit $\pi^3 = \mathrm{id}$.

    (b) Zeige: Ist $\pi \in A_4$ und gilt $\pi^4 = \mathrm{id}$, so gilt auch $\pi^2 = \mathrm{id}$.

    (c) Finde eine Permutation $\tau \in S_5 \setminus A_5$ mit $\tau^6 = \mathrm{id}$ und $\tau^2 \neq \mathrm{id}$.

24. (a) Zeige, dass jede Permutation in S_n geschrieben werden kann als Produkt von Transpositionen der Form $(j, j+1)$, wobei $1 \leq j < n$. Ist diese Faktorisierung eindeutig?

    (b) Zeige, dass jede Permutation in S_n (für $n > 1$) geschrieben werden kann als Produkt von Transpositionen der Form $(1, j)$, wobei $1 < j \leq n$.

    (c) Zeige, dass jede Permutation in A_n (für $n > 2$) geschrieben werden kann als Produkt von 3-Zyklen der Form $(1, 2, j)$, wobei $2 < j \leq n$.

25. Sei W die Würfelgruppe. Seien ferner $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \in W$ die Drehungen um $\frac{2\pi}{3}$ um die vier Raumdiagonalen des Würfels. Zeige: $W \neq \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_4 \rangle$, d.h. W wird nicht erzeugt von den Drehungen um die Raumdiagonalen.
    Hinweis: Jede Abbildung $\varphi \in W$ permutiert die Flächen des Würfels.

(D) Sei T bzw. W bzw. D die Tetraedergruppe bzw. die Würfelgruppe bzw. die Dodekaedergruppe. Zeige:

(a) $T \cong A_4$ (b) $W \cong S_4$ (c) $D \cong A_5$

Hinweise: (a) Betrachte die 4 Eckpunkte des Tetraeders (b) Betrachte die 4 Raumdiagonalen des Würfels (c) Lege 5 Würfel so in einen Dodekaeder, dass jede Kante des Würfels in einer Fläche des Dodekaeders liegt.