Lineare Algebra I

WS 00/01

Übungsblatt 4: Rechnen in $\mathbb{Z}_m$ und Gruppenisomorphismen

---

16. Sei $m \in \mathbb{N}^*$ und bezeichne $[x] = x + m\mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

    (a) Sind n und m teilerfremd, d.h. $\mathrm{ggT}(n,m)$=1, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $[kn] = [1]$.

    (b) Sind n und m nicht teilerfremd, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $[k] \neq [0]$ und $[kn] = [0]$.

17. (a) Ist $a \in \mathbb{Z}$, so gilt $4 \mid a^2$ oder $4 \mid (a^2 - 1)$. Mit anderen Worten: In $\mathbb{Z}_4$ gilt $[a^2] = [0]$ oder $[a^2] = [1]$.

    (b) Für $a \in \mathbb{N}$ bezeichne $\sigma(a)$ die Quersumme von a, d.h. die Summe der Ziffern (im Zehnersystem) von a. Zeige, dass in $\mathbb{Z}_9$ gilt: $[a] = [\sigma(a)]$. Mit anderen Worten: $a \equiv \sigma(a) \mod 9$.

18. (a) Zeige, dass die Gruppe $(\mathbb{Z}_3, +)$ bis auf Isomorphie die einzige Gruppe mit 3 Elementen ist.

    (b) Zeige, dass für eine Primzahl p die Gruppe $(\mathbb{Z}_p, +)$ bis auf Isomorphie die einzige Gruppe ist der Ordnung p.

    (c) Zeige: Die Gruppen $(Z_4, +)$ und $(Z_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ sind bis auf Isomorphie die einzigen beiden Gruppen der Ordnung 4.

19. Zeige, dass die Untergruppe $\langle 2 \rangle \subseteq (\mathbb{Q}^*, \cdot)$, also die Untergruppe von $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ welche von $\{2\}$ erzeugt wird, isomorph ist zur Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ (siehe auch Aufgabe 12.a).

20. Sei $\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$, also die Menge der positiven reellen Zahlen. Zeige: $(\mathbb{R}^+, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$.

(C) Sei W bzw. O bzw. D bzw. I die Würfelgruppe bzw. die Oktaedergruppe bzw. die Dodekaedergruppe bzw. die Ikosaedergruppe. Zeige:

(a) $W \cong O$ (b) $D \cong I$