Lineare Algebra I

WS 00/01

Übungsblatt 13: Determinanten und charakteristisches Polynom

---

61. Eine $n \times n$-Matrix heisst *zirkulär*, wenn jede Zeile der Matrix eine zyklische Vertauschung der vorhergehenden Zeile ist. Z.B. sind die folgenden Matrizen zirkulär:

$$M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

Finde notwendige und hinreichende Bedingungen für die Zahlen a, b bzw. a, b, c, so dass die Matrix M_2 bzw. M_3 regulär ist.

62. Sei $\psi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ eine lineare Abbildung und sei

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix von ψ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{C}^3$.

(a) Welches sind die Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenwerte von ψ?

(b) Finde eine Basis in $\mathbb{C}^3$, so dass die Matrix von ψ bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt hat (d.h. nur die Einträge auf der Diagonale sind ungleich Null).

63. Seien A, B zwei $n \times n$-Matrizen wobei B regulär ist.

Zeige, dass gilt: $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(BAB^{-1})$.

Hinweis: Betrachte die Matrix B als eine Basistransformationsmatrix.

2^6. Sei $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und seien x_1, x_2 zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Basis v_1, v_2. Sei ferner Δ eine Determinantenfunktion in $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeige, dass

$$\frac{|\Delta(x_1, x_2)|}{|\Delta(v_1, v_2)|}$$

dem Flächeninhalt des von den Vektoren x_1 und x_2 aufgespannten Parallelogramms entspricht.

(b) Formuliere und beweise die analoge Aussage im $\mathbb{R}^3$.

(c) Definiere in analoger Weise das Volumen eines n-dimensionalen Parallelepipeds im $\mathbb{R}^n$ (aufgespannt durch die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$).

Schöne Semesterferien!