Lineare Algebra I

WS 00/01

Übungsblatt 10: Matrizen, Basistransformation und lineare Gleichungssysteme

---

46. Sei $\{e_1, \ldots, e_5\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^5$ und sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ wie folgt definiert:

$$\varphi(e_1) = e_3,\ \varphi(e_2) = e_5,\ \varphi(e_3) = e_4,\ \varphi(e_4) = e_1,\ \varphi(e_5) = e_2.$$

   (a) Bestimme die Matrix A von φ bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^5$.

   (b) Berechne die Matrizen A^{100} und A^{1001}.

47. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

die Matrix der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bzgl. der Basis $\{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Bestimme die Matrix von φ bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

48. Sei S die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und sei $S' = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$. Sei weiter T die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ und sei $T' = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^4$. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung und sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

die Matrix von φ bzgl. den Standardbasen S und T.

Berechne die Matrix A' von φ bzgl. den Basen S' und T'.

49. Gegeben ist folgende 4×4-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass es kein $x^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ gibt mit $Ax^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

50. (a) Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

nach x_1, x_2 und x_3 auf.

(b) Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 1x_2 & + & 1x_3 & = & y_1 \\ 0x_1 & + & 2x_2 & + & 1x_3 & = & y_2 \\ 1x_1 & + & 0x_2 & + & 2x_3 & = & y_3 \end{array}$$

für alle Werte $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ lösbar ist.

Hinweis: Schreibe das Gleichungssystem als $Ax = y$, wobei A eine 3×3-Matrix ist und die Vektoren x und y Spaltenvektoren sind (m.a.W. 3×1-Matrizen).