Matrices aléatoires non commutatives et mesure de Plancherel

Valentin Féray

Laboratoire d'Informatique de l'Institut Gaspard-Monge, Université Paris-Est

Séminaire du laboratoire, 8 avril 2008

Cadre de travail

- Notation : S_n groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$
- Représentations irréductibles de $S_n \simeq$ partitions $\lambda \vdash n$.
- Objectif : Etudier *asymptotiquement* la forme de certaines partitions.

Plan

Plan

Plan

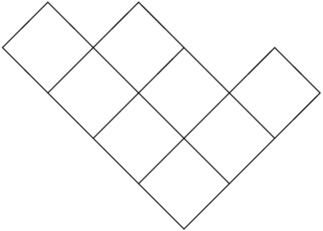
1. Matrice de Biane et mesure de Plancherel
   - Diagramme de Young et mesure de transition
   - Outil d'étude
2. Lien avec le comportement de matrices gaussiennes
   - Trace et chemins
   - Cas d'une matrice gaussienne
   - Cas de la matrice de Biane
3. Étude combinatoire plus fine

Partitions et diagrammes de Young

Une partition λ d'un entier $n \geq 0$ est une suite décroissante $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r$ de somme n.

Partitions et diagrammes de Young

Une partition λ d'un entier $n \geq 0$ est une suite décroissante $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r$ de somme n.
Représentation graphique par un digramme de Young (à la russe) :

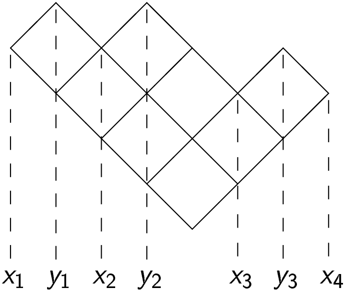


$$\lambda_1 = 3; \lambda_2 = \lambda_3 = 2; \lambda_4 = 1; \lambda_5 = \ldots = 0.$$

Partitions et diagrammes de Young

Une partition λ d'un entier $n \geq 0$ est une suite décroissante $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r$ de somme n.

Représentation graphique par un digramme de Young (à la russe) :



Mesure de transition

diagramme de Young $\lambda \vdash n$ $\longrightarrow$ mesure de transition $\mathfrak{m}_\lambda$

La mesure $\mathfrak{m}_\lambda$ est la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mathfrak{m}_\lambda(s)}{z-s} = \frac{\prod_i z - y_i}{\prod_i z - x_i}$$

Mesure de transition

$$\begin{array}{c}\text{diagramme de}\\ \text{Young } \lambda \vdash n\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\text{mesure de}\\ \text{transition } \mathfrak{m}_\lambda\end{array}$$

La mesure $\mathfrak{m}_\lambda$ est la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mathfrak{m}_\lambda(s)}{z-s} = \frac{\prod_i z - y_i}{\prod_i z - x_i}$$

$\mathfrak{m}_\lambda$ est supportée par

$$\{x_i\} \simeq \left\{ \begin{array}{c} \text{endroits où on peut ajouter} \\ \text{une case au diagramme } \lambda \vdash n \\ \text{pour obtenir un autre diagramme } \mu \vdash n+1 \end{array} \right\}$$

Génération aléatoire de diagramme

- Interprétation : mesure de transition entre diagrammes.
- Itération depuis $\square \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{mesure de Plancherel :} \\ \text{mesure de proba } P^n \text{ sur} \\ \text{les diagrammes à } n \text{ cases} \end{array} \right.$

Objectif : Calculer les moments de la mesure

$$\mathfrak{m}_{P^n} = \sum_{\lambda \vdash n} P^n(\lambda) \mathfrak{m}_\lambda$$

.

$\longrightarrow$ permet de connaître la forme limite des diagrammes.

Autre question liée

- On tire une permutation de longueur n au hasard

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{matrix}$$

Autre question liée

- On tire une permutation de longueur n au hasard

1	2	3	4	5	6	7
	1	5	6		7	

- Distribution de la longueur maximale d'une sous suite croissante (ici 4) ?

Autre question liée

- On tire une permutation de longueur n au hasard

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & 1 & 5 & 6 & & 7 & \end{array}$$

- Distribution de la longueur maximale d'une sous suite croissante (ici 4) ?

Proposition

Distribution de la longueur maximale d'une sous-suite croissante = *Distribution de la première ligne d'une partition sous la mesure de Plancherel*

Formule pour les moments

Notation (Matrice de Biane)

Soit $(i\ j)$ la transposition échangeant i et j de S_n, posons :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & (1\ 2) & \dots & (1\ n) \\ 1 & (2\ 1) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & (n-1\ n) \\ 1 & (n\ 1) & \dots & (n\ n-1) & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition

$$\mathcal{M}_s(\mathfrak{m}_{P^n}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(B_n^s)\right) \ \textit{où} \ \begin{cases} \mathbb{E}(\mathrm{Id}) = 1 \\ \mathbb{E}(\sigma) = 0 \quad \textit{si } \sigma \neq \mathrm{Id} \end{cases}$$

En fait...

- Le comportement limite de la mesure P^n est bien connu : forme limite, oscillation autour de la forme limite, oscillation d'un nombre fixé de lignes autour de leur longueur moyenne...
- Mais... la matrice de Biane *pourrait* permettre d'étudier d'autres mesures apparaissant dans la théorie des représentations du groupe symétrique.

Combinatoire de la trace d'une puissance matricielle

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice $n \times n$.

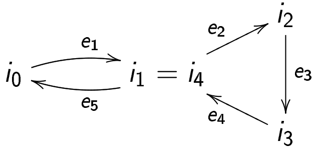
$$\mathrm{tr}(A^s) = \sum_{1\leq i_0,\dots,i_{s-1}\leq n} a_{i_0,i_1} a_{i_1,i_2} \dots a_{i_{s-2},i_{s-1}} a_{i_{s-1},i_0}$$

Combinatoire de la trace d'une puissance matricielle

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice $n \times n$.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A^s) &= \sum_{1 \leq i_0, \dots, i_{s-1} \leq n} a_{i_0,i_1} a_{i_1,i_2} \dots a_{i_{s-2},i_{s-1}} a_{i_{s-1},i_0} \\ &= \sum_{\mathcal{C}=(e_i)_{1 \leq i \leq s}} a_{e_1} \dots a_{e_s}\end{aligned}$$

où la somme parcourt les chemins fermés de longueurs s dans le graphe complet à n sommets.



Asymptotique

Question : asymptotique de $\mathbb{E}(\mathrm{tr}(A^s))$ quand $\begin{cases} n \longrightarrow \infty \\ s \text{ fixe} \end{cases}$?

Hypothèse :

$$\mathbb{E}(a_{i_0,i_1} a_{i_1,i_2} \dots a_{i_{s-2},i_{s-1}} a_{i_{s-1},i_0})$$

ne dépend que de la forme du chemin correspondant (et pas des étiquettes des sommets).

Asymptotique

Question : asymptotique de $\mathbb{E}(\mathrm{tr}(A^s))$ quand $\begin{cases} n \to \infty \\ s \text{ fixe} \end{cases}$?

Hypothèse :

$$\mathbb{E}(a_{i_0,i_1} a_{i_1,i_2} \dots a_{i_{s-2},i_{s-1}} a_{i_{s-1},i_0})$$

ne dépend que de la forme du chemin correspondant (et pas des étiquettes des sommets).

$$\text{Alors } \mathbb{E}(\mathrm{tr}(A^s)) = \sum_{\substack{\mathcal{C} \text{ forme} \\ \text{de chemin}}} n(n-1)\dots(n-|V(\mathcal{C}|+1)\ \mathbb{E}(\mathcal{C})$$

On cherche les chemins avec un nombre de sommets maximal parmi ceux vérifiant $\mathbb{E}(\mathcal{C}) \neq 0$.

Modèle gaussien

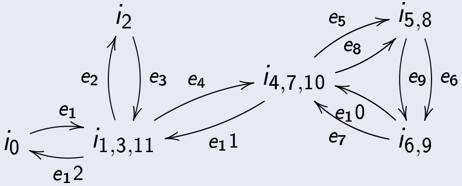
Hypothèse : A symétrique et les $(a_{i,j})_{i \geq j}$ sont des variables gaussiennes de variance 1 **indépendantes**.

Modèle gaussien

Hypothèse : A symétrique et les $(a_{i,j})_{i \geq j}$ sont des variables gaussiennes de variance 1 **indépendantes**.

Alors seuls les chemins pairs (*i.e.* les chemins où toutes les arêtes sont parcourues un nombre pair de fois) ont une contribution non nulle à $\mathbb{E}$.

Exemple (chemin pair)



Terme dominant

Soit **i** un chemin pair avec $|\{i_j\}| \geq s+1$.

$\exists$ sommet i_k par lequel on ne passe qu'une fois.

Alors $i_{k-1} = i_{k+1}$.

Terme dominant

Soit **i** un chemin pair avec $|\{i_j\}| \geq s+1$.

$\exists$ sommet i_k par lequel on ne passe qu'une fois.

Alors $i_{k-1} = i_{k+1}$.

Cardinal maximal : $s+1$

Nombre de *formes de chemins* correspondantes : $C_s = \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s}$

Transposition du cas gaussien

Remarque : On oubliera la présence de la ligne et de la colonne de 1 qui ne change pas le résultat.

Soit **i** une suite (dite admissible) telle que :

$$(i_0\, i_1)(i_1\, i_2)\dots(i_{s-2}\, i_{s-1})(i_{s-1}\, i_0) = \mathrm{Id}$$

Alors, si $\nexists j \neq k : i_j = i_k$, nécessairement

$$i_{k-1} = i_{k+1}$$

Comparaison des asymptotique

$\longrightarrow$ Même comportement asymptotique des chemins que les matrices gaussiennes :

Théorème

$$\mathcal{M}_{2s}(\mathfrak{m}_{P^n}) \sim C_s n^s$$

Avec des renormalisations adéquates, la limite de la mesure $\mathfrak{m}_{P_n}$ est la distribution asymptotique des valeurs propres d'une matrice Gaussienne (i.e. loi du demi cercle).

Et pour s plus grand...

Proposition

L'asymptotique

$$\mathcal{M}_{2s}(\mathfrak{m}_{P_n}) \sim C_s n^s$$

est encore valable pour $s = o(n^{1/3})$

Motivation : comportement des *premières lignes* d'une partition aléatoire ?

Proposition $\Rightarrow$ oscillation des premières lignes est d'ordre inférieure ou égale à $n^{1/3}$

Suites admissibles et chemins de Dick

$$\mathbf{i} \text{ suite admissible} \longrightarrow \quad y_k = \Big| \overbrace{\underbrace{(i_0 i_1) \dots (i_{k-1} i_k)}_{\sigma_k}}^{\text{Chemin de Dick}} \Big|$$

Exemple

$$1 \nearrow 2 \nearrow 3 \searrow 2 \nearrow 4 \nearrow 5 \searrow 1 \nearrow 4 \searrow 5 \searrow 2 \searrow 1$$

Suites admissibles et chemins de Dick

$$\mathbf{i} \text{ suite admissible} \longrightarrow \quad y_k = \Big| \overbrace{\underbrace{(i_0 i_1) \dots (i_{k-1} i_k)}_{\sigma_k}}^{\text{Chemin de Dick}} \Big|$$

Exemple

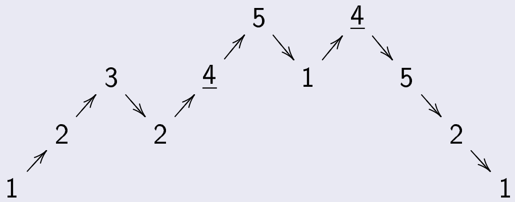
$$1 \nearrow 2 \nearrow 3 \searrow 2 \nearrow 4 \nearrow 5 \searrow \underline{1} \nearrow 4 \searrow 5 \searrow 2 \searrow 1$$

Choix canonique pour les descentes : $i_{k+1} = \sigma_k^{-1}(i_k)$ (ici 1 choix non canonique).

Suites admissibles et chemins de Dick

$$\mathbf{i} \text{ suite admissible} \longrightarrow \overset{\text{Chemin de Dick}}{y_k = \Big| \underbrace{(i_0 i_1) \dots (i_{k-1} i_k)}_{\sigma_k} \Big|}$$

Exemple



1 répétition parmi les arrivées des pas montants

Esquisse de preuve

Terme dominant à s fixe : suites sans répétitions $\Rightarrow$ que des choix canoniques.

Esquisse de preuve

Terme dominant à s fixe : suites sans répétitions $\Rightarrow$ que des choix canoniques.

Lemme

Le nombre de choix non canoniques est majoré par le nombre de répétitions *non effaçables*.

Esquisse de preuve

Terme dominant à s fixe : suites sans répétitions $\Rightarrow$ que des choix canoniques.

Lemme

Le nombre de choix non canoniques est majoré par le nombre de répétitions *non effaçables*.

Introduire un choix non canonique multiplie le nombre de suite par :

- αs (nombre de positions)
- $\alpha y_k \sim \alpha\sqrt{s}$ (nombre de valeurs possibles)
- $\alpha s\sqrt{s}$ (idem : position et valeurs de la répétition)
- $\alpha\frac{1}{n}$ (un choix de valeurs en moins dû à la répétition)

i.e. par $\alpha\frac{s^3}{n}$, CQFD !