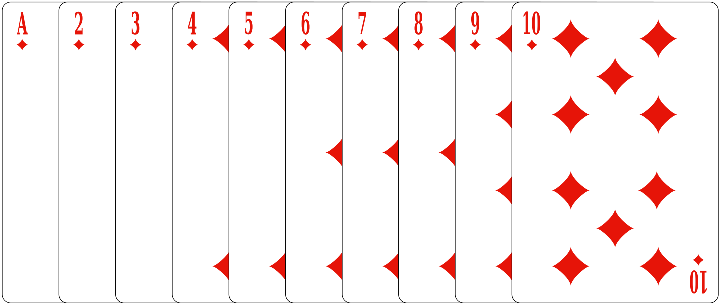
La plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire

Valentin

Valcenis, Août 2014

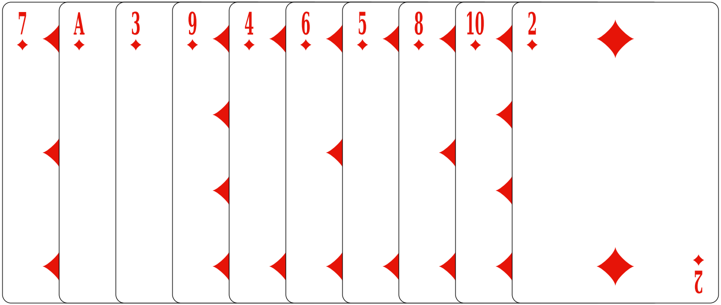
Trier des cartes

Considérons un jeu de cartes (simplifié) :



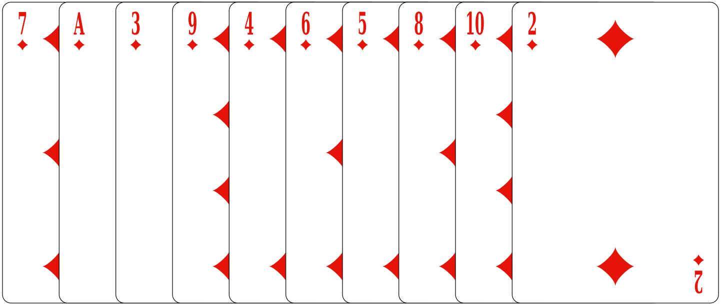
Trier des cartes

On mélange :



Trier des cartes

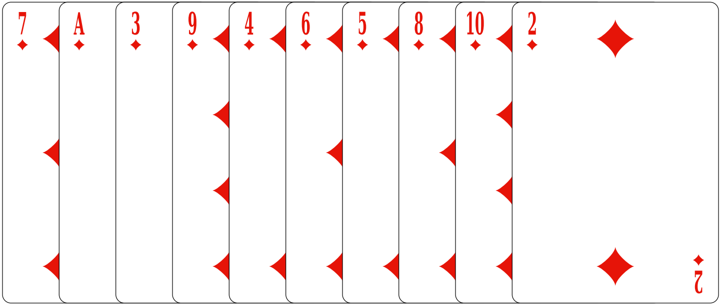
On mélange :



Combien de cartes faut-il déplacer pour trier le jeu ?

Trier des cartes

On mélange :



Simplifions les notations : le mélange ci-dessus est représenté par

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

Un exemple de tri

7	1	3	9	4	6	5	8	10	2

Un exemple de tri

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

Idée : trouver un maximum de cartes déjà dans l'ordre.

Un exemple de tri

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

Idée : trouver un maximum de cartes déjà dans l'ordre, puis déplacer les autres cartes une à une.

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

Un exemple de tri

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

Idée : trouver un maximum de cartes déjà dans l'ordre, puis déplacer les autres cartes une à une.

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

1 3 9 4 6 5 7 8 10 2

Un exemple de tri

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

Idée : trouver un maximum de cartes déjà dans l'ordre, puis déplacer les autres cartes une à une.

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

1 3 9 4 6 5 7 8 10 2

Un exemple de tri

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

Idée : trouver un maximum de cartes déjà dans l'ordre, puis déplacer les autres cartes une à une.

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

1 3 9 4 6 5 7 8 10 2

1 3 4 6 5 7 8 9 10 2

Un exemple de tri

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

Idée : trouver un maximum de cartes déjà dans l'ordre, puis déplacer les autres cartes une à une.

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

1 3 9 4 6 5 7 8 10 2

1 3 4 6 5 7 8 9 10 2

Un exemple de tri

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

Idée : trouver un maximum de cartes déjà dans l'ordre, puis déplacer les autres cartes une à une.

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

1 3 9 4 6 5 7 8 10 2

1 3 4 6 5 7 8 9 10 2

1 3 4 5 6 7 8 9 10 2

Un exemple de tri

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

Idée : trouver un maximum de cartes déjà dans l'ordre, puis déplacer les autres cartes une à une.

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

1 3 9 4 6 5 7 8 10 2

1 3 4 6 5 7 8 9 10 2

1 3 4 5 6 7 8 9 10 2

Un exemple de tri

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

Idée : trouver un maximum de cartes déjà dans l'ordre, puis déplacer les autres cartes une à une.

7 1 3 9 4 6 5 8 10 2

1 3 9 4 6 5 7 8 10 2

1 3 4 6 5 7 8 9 10 2

1 3 4 5 6 7 8 9 10 2

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Nombre d'étapes nécessaires

En remarquant qu'il y avait 6 cartes dans le bon ordre, on a pu trier en 10-6=4 étapes.

Nombre d'étapes nécessaires

En remarquant qu'il y avait 6 cartes dans le bon ordre, on a pu trier en 10-6=4 étapes.

Réciproquement, si on peut trier en 3 étapes, cela signifie que les 7 cartes non déplacées sont déjà dans le bon ordre au début.

Nombre d'étapes nécessaires

En remarquant qu'il y avait 6 cartes dans le bon ordre, on a pu trier en 10-6=4 étapes.

Réciproquement, si on peut trier en 3 étapes, cela signifie que les 7 cartes non déplacées sont déjà dans le bon ordre au début.

Conclusion : le nombre minimal de déplacements nécessaires pour trier un jeu est $n - r$,
où r est le nombre maximal de cartes déjà dans le bon ordre.

Reformulation mathématique

Definition

Une permutation d'un entier $n \geq 1$ est une liste d'entiers entre 1 et n où chaque entier apparaît exactement une fois.

Exemple : 2 5 7 3 1 4 8 6 est une permutation de 8.

Reformulation mathématique

Definition

Une permutation d'un entier $n \geq 1$ est une liste d'entiers entre 1 et n où chaque entier apparaît exactement une fois.

Exemple : 2 5 7 3 1 4 8 6 est une permutation de 8.

Objet	Formalisation mathématique
Jeu mélangé à n cartes	Permutation de n

Reformulation mathématique

Definition

Une permutation d'un entier $n \geq 1$ est une liste d'entiers entre 1 et n où chaque entier apparaît exactement une fois.

Exemple : 2 5 7 3 1 4 8 6 est une permutation de 8.

Objet	Formalisation mathématique
Jeu mélangé à n cartes	Permutation de n
certaines cartes du jeu	sous-suite

Reformulation mathématique

Definition

Une permutation d'un entier $n \geq 1$ est une liste d'entiers entre 1 et n où chaque entier apparaît exactement une fois.

Exemple : 2 5 7 3 1 4 8 6 est une permutation de 8.

Objet	Formalisation mathématique
Jeu mélangé à n cartes	Permutation de n
certaines cartes du jeu	sous-suite
dans le bon ordre	croissant

Reformulation mathématique

Definition

Une permutation d'un entier $n \geq 1$ est une liste d'entiers entre 1 et n où chaque entier apparaît exactement une fois.

Exemple : 2 5 7 3 1 4 8 6 est une permutation de 8.

Objet	Formalisation mathématique
Jeu mélangé à n cartes	Permutation de n
certaines cartes du jeu	sous-suite
dans le bon ordre	croissant

Proposition

Le nombre minimal de "déplacements" *nécessaires pour trier une permutation p est $n - r(p)$, où $r(p)$ est la longueur de la plus longue sous-suite croissante de p.*

Notre problème

Mais à quoi ressemble en général la longueur $r(p)$ de la plus longue sous suite croissante d'une grande permutation p ?

- Est-ce que c'est plutôt proche de n (i.e. le plus souvent on peut trouver une sous-suite croissante qui prend presque tous les nombres) ?

Notre problème

Mais à quoi ressemble en général la longueur $r(p)$ de la plus longue sous suite croissante d'une grande permutation p ?

- Est-ce que c'est plutôt proche de n (i.e. le plus souvent on peut trouver une sous-suite croissante qui prend presque tous les nombres) ?
- Est-ce que ça reste constant (i.e. c'est rare d'avoir une sous-suite croissante plus grande que 10, par exemple) ?

Notre problème

Mais à quoi ressemble en général la longueur $r(p)$ de la plus longue sous suite croissante d'une grande permutation p ?

- Est-ce que c'est plutôt proche de n (i.e. le plus souvent on peut trouver une sous-suite croissante qui prend presque tous les nombres) ?
- Est-ce que ça reste constant (i.e. c'est rare d'avoir une sous-suite croissante plus grande que 10, par exemple) ?
- Entre les deux ?

Notre problème

Mais à quoi ressemble en général la longueur $r(p)$ de la plus longue sous suite croissante d'une grande permutation p ?

- Est-ce que c'est plutôt proche de n (i.e. le plus souvent on peut trouver une sous-suite croissante qui prend presque tous les nombres) ?
- Est-ce que ça reste constant (i.e. c'est rare d'avoir une sous-suite croissante plus grande que 10, par exemple) ?
- Entre les deux ?

Problème

Prenons une permutation p de taille n au hasard. Quelle est la moyenne de $r(p)$?

Notre problème

Mais à quoi ressemble en général la longueur $r(p)$ de la plus longue sous suite croissante d'une grande permutation p ?

- Est-ce que c'est plutôt proche de n (i.e. le plus souvent on peut trouver une sous-suite croissante qui prend presque tous les nombres) ?
- Est-ce que ça reste constant (i.e. c'est rare d'avoir une sous-suite croissante plus grande que 10, par exemple) ?
- Entre les deux ?

Problème

Prenons une permutation p de taille n au hasard. Quelle est la moyenne de $r(p)$?
Est-ce que $r(p)$ est proche de sa moyenne ?

Notre problème

Mais à quoi ressemble en général la longueur $r(p)$ de la plus longue sous suite croissante d'une grande permutation p ?

- Est-ce que c'est plutôt proche de n (i.e. le plus souvent on peut trouver une sous-suite croissante qui prend presque tous les nombres) ?
- Est-ce que ça reste constant (i.e. c'est rare d'avoir une sous-suite croissante plus grande que 10, par exemple) ?
- Entre les deux ?

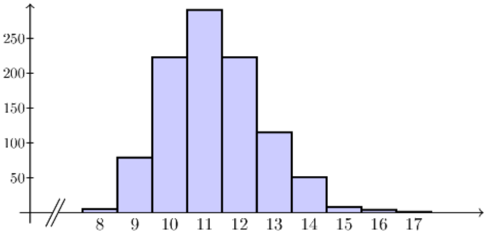
Problème

Prenons une permutation p de taille n au hasard. Quelle est la moyenne de $r(p)$?
Est-ce que $r(p)$ est proche de sa moyenne ?

Pour des modèles de tris adaptés aux ordinateurs, cette question est fondamentale !

Faisons quelques tests (1/2)

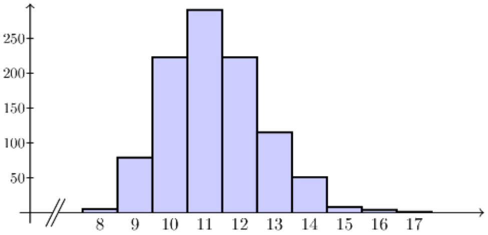
Voici un diagrammes en bâtons indiquant combien de fois chaque "longueur de la plus grande sous-suite croissante" a été obtenu en répétant 1000 fois l'expérience avec $n = 50$.



©X. Caruso

Faisons quelques tests (1/2)

Voici un diagrammes en bâtons indiquant combien de fois chaque “longueur de la plus grande sous-suite croissante” a été obtenu en répétant 1000 fois l’expérience avec $n = 50$.



Observation: la “longueur de la plus grande sous-suite croissante” n’est jamais ni très petite ni très grand, assez concentrée, ici autour de 11.

Faisons quelques tests (2/2)

Maintenant faisons varier la longueur de n.

n	100	200	300	400	500	600	700	800	900
Moyenne de $r(p)$	$16,7$	$24,5$	$30,6$	$35,7$	$40,3$	$44,2$	$48,2$	$51,6$	$55,2$

- de $n = 200$ à $n = 800$, la moyenne de $r(p)$ est multiplié par 2 environ;
- de $n = 100$ à $n = 900$ villes, la moyenne de $r(p)$ est multiplié par 3 environ.

Conjecture

La moyenne de $r(p)$ varie comme la racine carrée de n.

Mais d'où sortent ces nombres ? (1/2)

- Même avec un ordinateur super-puissant, impossible de calculer $r(p)$ pour toutes les permutations de 50 pour calculer la moyenne. Il y en a

30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000.

Mais d'où sortent ces nombres ? (1/2)

- Même avec un ordinateur super-puissant, impossible de calculer $r(p)$ pour toutes les permutations de 50 pour calculer la moyenne. Il y a en a

$$30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000.$$

- On tire des permutations au hasard et on fait la moyenne sur ces permutations (=moyenne empirique).

Il faut que chaque permutation aient la même chance d'être tirée...

Mais d'où sortent ces nombres ? (1/2)

- Même avec un ordinateur super-puissant, impossible de calculer $r(p)$ pour toutes les permutations de 50 pour calculer la moyenne. Il y en a

$$30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000.$$

- On tire des permutations au hasard et on fait la moyenne sur ces permutations (=moyenne empirique).

Il faut que chaque permutation aient la même chance d'être tirée...

Facile à faire pour les permutations, difficile pour d'autres objets (c'est un domaine de recherche actif, appelé génération aléatoire!)

Mais d'où sortent ces nombres ? (2/2)

- Pour chaque permutation de 50, on ne peut pas tester toutes les sous-suites et regarder si elles sont croissantes. En effet, il y en a

$$1125899906842624.$$

Mais d'où sortent ces nombres ? (2/2)

- Pour chaque permutation de 50, on ne peut pas tester toutes les sous-suites et regarder si elles sont croissantes. En effet, il y en a

$$1125899906842624.$$

- Il faut apprendre à l'ordinateur à être plus malin !

Exemple: je voudrais rechercher le maximum dans la liste suivante

$$[66, 32, 27, 76, 80, 5, 16, 85, 73, 41, 9, 7, 3, 33, 25, 82, 72, 70, 43, 34]$$

Mais d'où sortent ces nombres ? (2/2)

- Pour chaque permutation de 50, on ne peut pas tester toutes les sous-suites et regarder si elles sont croissantes. En effet, il y en a

$$1125899906842624.$$

- Il faut apprendre à l'ordinateur à être plus malin !

Exemple: je voudrais rechercher le maximum dans la liste suivante

$$[66, 32, 27, 76, 80, 5, 16, 85, 73, 41, 9, 7, 3, 33, 25, 82, 72, 70, 43, 34]$$

Je lis de droite à gauche et ne retiens que le maximum de ce que j'ai déjà lu.

Mais d'où sortent ces nombres ? (2/2)

- Pour chaque permutation de 50, on ne peut pas tester toutes les sous-suites et regarder si elles sont croissantes. En effet, il y en a

$$1125899906842624.$$

- Il faut apprendre à l'ordinateur à être plus malin !

Exemple: je voudrais rechercher le maximum dans la liste suivante

$$[66, \quad , 27, 76, 80, 5, 16, 85, 73, 41, 9, 7, 3, 33, 25, 82, 72, 70, 43, 34]$$

Je lis de droite à gauche et ne retiens que le maximum de ce que j'ai déjà lu.

Mais d'où sortent ces nombres ? (2/2)

- Pour chaque permutation de 50, on ne peut pas tester toutes les sous-suites et regarder si elles sont croissantes. En effet, il y en a

$$1125899906842624.$$

- Il faut apprendre à l'ordinateur à être plus malin !

Exemple: je voudrais rechercher le maximum dans la liste suivante

$$[66, \quad , \quad , 76, 80, 5, 16, 85, 73, 41, 9, 7, 3, 33, 25, 82, 72, 70, 43, 34]$$

Je lis de droite à gauche et ne retiens que le maximum de ce que j'ai déjà lu.

Mais d'où sortent ces nombres ? (2/2)

- Pour chaque permutation de 50, on ne peut pas tester toutes les sous-suites et regarder si elles sont croissantes. En effet, il y en a

$$1125899906842624.$$

- Il faut apprendre à l'ordinateur à être plus malin !

Exemple: je voudrais rechercher le maximum dans la liste suivante

$$[\quad,\quad,\quad,76,80,5,16,85,73,41,9,7,3,33,25,82,72,70,43,34]$$

Je lis de droite à gauche et ne retiens que le maximum de ce que j'ai déjà lu.

Mais d'où sortent ces nombres ? (2/2)

- Pour chaque permutation de 50, on ne peut pas tester toutes les sous-suites et regarder si elles sont croissantes. En effet, il y en a

$$1125899906842624.$$

- Il faut apprendre à l'ordinateur à être plus malin !

Exemple: je voudrais rechercher le maximum dans la liste suivante

$$[\quad, \quad, \quad, \quad, 80, 5, 16, 85, 73, 41, 9, 7, 3, 33, 25, 82, 72, 70, 43, 34]$$

Je lis de droite à gauche et ne retiens que le maximum de ce que j'ai déjà lu.

Mais d'où sortent ces nombres ? (2/2)

- Pour chaque permutation de 50, on ne peut pas tester toutes les sous-suites et regarder si elles sont croissantes. En effet, il y en a

$$1125899906842624.$$

- Il faut apprendre à l'ordinateur à être plus malin !

Exemple: je voudrais rechercher le maximum dans la liste suivante

[, , , , , , ,85, , , , , , , , , , , ,]

Je lis de droite à gauche et ne retiens que le maximum de ce que j'ai déjà lu. À la fin, il ne me reste que le maximum, ici 85.

Mais d'où sortent ces nombres ? (2/2)

- Pour chaque permutation de 50, on ne peut pas tester toutes les sous-suites et regarder si elles sont croissantes. En effet, il y en a

$$1125899906842624.$$

- Il faut apprendre à l'ordinateur à être plus malin !

Question

Peut-on faire pareil pour $r(p)$? Que faudrait-il retenir?

Apprendre à l'ordinateur à être plus malin = Algorithmique.

Valeurs possibles pour $r(p)$

$r(p)$ peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n.

Valeurs possibles pour $r(p)$

$r(p)$ peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n.

- Seule permutation avec $r(p) = 1$;

$$n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ \dots\ 4\ 3\ 2\ 1.$$

Valeurs possibles pour $r(p)$

$r(p)$ peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n.

- Seule permutation avec $r(p) = 1$;

$$n \ (n-1) \ (n-2) \ (n-3) \ \ldots \ 4 \ 3 \ 2 \ 1.$$

- Exemple de permutation avec $r(p) = 2$;

$$(n-1) \ n \ (n-3) \ (n-2) \ldots \ 3 \ 4 \ 1 \ 2.$$

Valeurs possibles pour $r(p)$

$r(p)$ peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n.

- Seule permutation avec $r(p) = 1$;

$$n \; (n-1) \; (n-2) \; (n-3) \; \ldots \; 4 \; 3 \; 2 \; 1.$$

- Exemple de permutation avec $r(p) = 2$;

$$(n-1) \; n \; (n-3) \; (n-2) \ldots \; 3 \; 4 \; 1 \; 2.$$

- ...
- Seule permutation avec $r(p) = n$;

$$1 \; 2 \; 3 \; 4 \; \ldots \; (n-3) \; (n-2) \; (n-1) \; n.$$

Valeurs possibles pour $r(p)$

$r(p)$ peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n.

- Seule permutation avec $r(p) = 1$;

$$n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ \dots\ 4\ 3\ 2\ 1.$$

- Exemple de permutation avec $r(p) = 2$;

$$(n-1)\ n\ (n-3)\ (n-2) \dots\ 3\ 4\ 1\ 2.$$

- ...
- Seule permutation avec $r(p) = n$;

$$1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ (n-3)\ (n-2)\ (n-1)\ n.$$

Observation : si $r(p)$ est petit, alors on a une grande sous-suite décroissante.

Un lien entre sous-suites croissantes et décroissantes

Plus précisément, on va montrer le résultat suivant

Théorème d'Erdős-Szekeres (1935)

Soit p une permutation de n. Notons

- $r(p)$ la longueur de la plus longue sous-suite croissante de p ;
- $s(p)$ la longueur de la plus longue sous-suite décroissante de p.

Alors

$$r(p) \cdot s(p) \geq n.$$

Un lien entre sous-suites croissantes et décroissantes

Plus précisément, on va montrer le résultat suivant

Théorème d'Erdős-Szekeres (1935)

Soit p une permutation de n. Notons

- $r(p)$ la longueur de la plus longue sous-suite croissante de p ;
- $s(p)$ la longueur de la plus longue sous-suite décroissante de p.

Alors

$$r(p) \cdot s(p) \geq n.$$

Démonstration dans quelques slides.

Avant : quel est le rapport avec notre problème sur $r(p)$?

Le théorème d'Erdős-Szekeres et $E(r(p))$

Lemme

Le théorème d'Erdős-Szekeres implique

$$E(r(p)) \geq \sqrt{n}$$

Le théorème d'Erdős-Szekeres et $E(r(p))$

Lemme

Le théorème d'Erdős-Szekeres implique

$$E(r(p)) \geq \sqrt{n}$$

Rappel : pour tout réels positifs a, b,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}.$$

En effet, $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = \frac{a+b}{2} - \sqrt{a \cdot b} \geq 0$.

Le théorème d'Erdős-Szekeres et $E(r(p))$

Lemme

Le théorème d'Erdős-Szekeres implique

$$E(r(p)) \geq \sqrt{n}$$

Rappel : pour tout réels positifs a, b,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}.$$

Donc pour toute permutation p

$$\frac{r(p)+s(p)}{2} \geq \sqrt{r(p) \cdot s(p)} \geq \sqrt{n}.$$

Le théorème d'Erdős-Szekeres et $E(r(p))$

Lemme

Le théorème d'Erdős-Szekeres implique

$$E(r(p)) \geq \sqrt{n}$$

Rappel : pour tout réels positifs a, b,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}.$$

Donc pour toute permutation p

$$\frac{r(p)+s(p)}{2} \geq \sqrt{r(p) \cdot s(p)} \geq \sqrt{n}.$$

Prenons la moyenne

$$E\left(\frac{r(p)+s(p)}{2}\right) = \frac{E(r(p))+E(s(p))}{2} \geq \sqrt{n}.$$

Le théorème d'Erdős-Szekeres et $E(r(p))$ (suite)

Lemme

Le théorème d'Erdős-Szekeres implique

$$E(r(p)) \geq \sqrt{n}$$

$$\frac{E(r(p)) + E(s(p))}{2} \geq \sqrt{n}.$$

Le théorème d'Erdős-Szekeres et $E(r(p))$ (suite)

Lemme

Le théorème d'Erdős-Szekeres implique

$$E(r(p)) \geq \sqrt{n}$$

$$\frac{E(r(p)) + E(s(p))}{2} \geq \sqrt{n}.$$

Or,

$$E(r(p)) = E(s(p)).$$

Le théorème d'Erdős-Szekeres et $E(r(p))$ (suite)

Lemme

Le théorème d'Erdős-Szekeres implique

$$E(r(p)) \geq \sqrt{n}$$

$$\frac{E(r(p)) + E(s(p))}{2} \geq \sqrt{n}.$$

Or,

$$E(r(p)) = E(s(p)).$$

En effet, Si $\bar{p}$ est la permutation p lue de droite à gauche, alors

$$s(\bar{p}) = r(p)$$

Exemple : $p = 2\ 3\ 1\ 5\ 4$, $\quad \bar{p} = 4\ 5\ 1\ 3\ 2$.

Le théorème d'Erdős-Szekeres et $E(r(p))$ (suite)

Lemme

Le théorème d'Erdős-Szekeres implique

$$E(r(p)) \geq \sqrt{n}$$

$$\frac{E(r(p)) + E(s(p))}{2} \geq \sqrt{n}.$$

Or,

$$E(r(p)) = E(s(p)).$$

En effet, Si $\bar{p}$ est la permutation p lue de droite à gauche, alors

$$s(\bar{p}) = r(p)$$

Exemple : $p = 2\ 3\ 1\ 5\ 4, \quad \bar{p} = 4\ 5\ 1\ 3\ 2.$

Conclusion: $E(r(p)) \geq \sqrt{n}$

Principe des tiroirs

Pour montrer le théorème d'Erdős-Szekeres, nous allons utiliser :

Principe des tiroirs

Principe des tiroirs

Pour montrer le théorème d'Erdős-Szekeres, nous allons utiliser :

Principe des tiroirs

Si on range 11 chaussettes dans 10 tiroirs, alors il existe au moins 1 tiroir qui contient au moins 2 chaussettes.

Principe des tiroirs

Pour montrer le théorème d'Erdős-Szekeres, nous allons utiliser :

Principe des tiroirs

Si on range $k+1$ chaussettes dans k tiroirs, alors il existe au moins 1 tiroir qui contient au moins 2 chaussettes.

Principe des tiroirs

Pour montrer le théorème d'Erdős-Szekeres, nous allons utiliser :

Principe des tiroirs

Si on range $k \cdot \ell + 1$ chaussettes dans k tiroirs, alors il existe au moins 1 tiroir qui contient au moins $\ell + 1$ chaussettes.

Principe des tiroirs (exemple)

Proposition (approximabilité d'un réel par un rationnel)

Soit x un nombre réel et n un entier. Alors il existe un nombre rationel p/q avec $q \leq n$ tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{n \cdot q}$$

Principe des tiroirs (exemple)

Proposition (approximabilité d'un réel par un rationnel)

Soit x un nombre réel et n un entier. Alors il existe un nombre rationel p/q avec $q \leq n$ tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{n \cdot q}$$

Démonstration : Considérons les nombres

$$0 = \{0 \cdot x\}, \{x\}, \{2 \cdot x\}, \ldots, \{(n-1) \cdot x\}, \{n \cdot x\}$$

Ici, $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y

$$\text{exemple : } \{2,573\} = 0,573.$$

Principe des tiroirs (exemple)

Proposition (approximabilité d'un réel par un rationnel)

Soit x un nombre réel et n un entier. Alors il existe un nombre rationel p/q avec $q \leq n$ tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{n \cdot q}$$

Démonstration : Considérons les nombres

$$0 = \{0 \cdot x\}, \{x\}, \{2 \cdot x\}, \ldots, \{(n-1) \cdot x\}, \{n \cdot x\}$$

et plaçons-les dans les “tiroirs”

$$\left[0, \frac{1}{n}\right[, \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[, \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right[.$$

Principe des tiroirs (exemple)

Proposition (approximabilité d'un réel par un rationnel)

Soit x un nombre réel et n un entier. Alors il existe un nombre rationel p/q avec $q \leq n$ tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{n \cdot q}$$

Démonstration : Considérons les nombres

$$0 = \{0 \cdot x\}, \{x\}, \{2 \cdot x\}, \ldots, \{(n-1) \cdot x\}, \{n \cdot x\}$$

et plaçons-les dans les "tiroirs"

$$\left[0, \frac{1}{n}\right[, \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[, \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right[.$$

D'après le principe des tiroirs, il y a deux nombres $\{i \cdot x\}$ et $\{j \cdot x\}$ dans le même tiroir.

Principe des tiroirs (exemple)

Proposition (approximabilité d'un réel par un rationnel)

Soit x un nombre réel et n un entier. Alors il existe un nombre rationel p/q avec $q \leq n$ tel que
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{n \cdot q}$$

Démonstration : Considérons les nombres
$$0 = \{0 \cdot x\}, \{x\}, \{2 \cdot x\}, \ldots, \{(n-1) \cdot x\}, \{n \cdot x\}$$
et plaçons-les dans les "tiroirs"
$$\left[0, \frac{1}{n}\right[, \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[, \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right[.$$
D'après le principe des tiroirs, il y a deux nombres $\{i \cdot x\}$ et $\{j \cdot x\}$ dans le même tiroir. En particulier,
$$\left| \{i \cdot x\} - \{j \cdot x\} \right| \leq \frac{1}{n}$$

Principe des tiroirs (exemple)

Proposition (approximabilité d'un réel par un rationnel)

Soit x un nombre réel et n un entier. Alors il existe un nombre rationel p/q avec $q \leq n$ tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{n \cdot q}$$

On vient de montrer qu'il existe i et j entre 0 et n tel que

$$\left| \{i \cdot x\} - \{j \cdot x\} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Principe des tiroirs (exemple)

Proposition (approximabilité d'un réel par un rationnel)

Soit x un nombre réel et n un entier. Alors il existe un nombre rationel p/q avec $q \leq n$ tel que
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{n \cdot q}$$

On vient de montrer qu'il existe i et j entre 0 et n tel que
$$\left| \{i \cdot x\} - \{j \cdot x\} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Donc il existe un entier p tel que
$$\left| (i \cdot x - j \cdot x) - p \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Principe des tiroirs (exemple)

Proposition (approximabilité d'un réel par un rationnel)

Soit x un nombre réel et n un entier. Alors il existe un nombre rationel p/q avec $q \leq n$ tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{n \cdot q}$$

On vient de montrer qu'il existe i et j entre 0 et n tel que

$$\left| \{i \cdot x\} - \{j \cdot x\} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Donc il existe un entier p tel que

$$\left| (i \cdot x - j \cdot x) - p \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Posons $q = i - j$:

$$\left| q \cdot x - p \right| \leq \frac{1}{n} \text{ et donc } \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{n \cdot q}.$$

Principe des tiroirs (retour à notre problème)

Théorème d'Erdős-Szekeres (1935)

Soit p une permutation de n. Notons

- $r(p)$ la longueur de la plus longue sous-suite croissante de p ;
- $s(p)$ la longueur de la plus longue sous-suite décroissante de p.

Alors

$$r(p) \cdot s(p) \geq n.$$

Démonstration par le principe des tiroirs

Soit p une permutation de n. Notons a_i la longueur de la plus-longue sous-suite croissante commençant en position i.

Exemple :

p :	5	9	2	4	1	10	3	7	6	8
a_i :	3									

Démonstration par le principe des tiroirs

Soit p une permutation de n. Notons a_i la longueur de la plus-longue sous-suite croissante commençant en position i.

Exemple :

p :	5	9	2	4	1	10	3	7	6	8
a_i :	3	2								

Démonstration par le principe des tiroirs

Soit p une permutation de n. Notons a_i la longueur de la plus-longue sous-suite croissante commençant en position i.

Exemple :

$$\begin{array}{rcccccccccc} p: & 5 & 9 & 2 & 4 & 1 & 10 & 3 & 7 & 6 & 8 \\ a_i: & 3 & 2 & 4 & 3 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

Démonstration par le principe des tiroirs

Soit p une permutation de n. Notons a_i la longueur de la plus-longue sous-suite croissante commençant en position i.

Exemple :

$$\begin{array}{rcccccccccc} p: & 5 & 9 & 2 & 4 & 1 & 10 & 3 & 7 & 6 & 8 \\ a_i: & 3 & 2 & 4 & 3 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

Les valeurs de a_i sont entre 1 et $r(p)$ (ici $r(p) = 4$).

Démonstration par le principe des tiroirs

Soit p une permutation de n. Notons a_i la longueur de la plus-longue sous-suite croissante commençant en position i.

Exemple :

$$\begin{array}{rcccccccccc} p: & 5 & 9 & 2 & 4 & 1 & 10 & 3 & 7 & 6 & 8 \\ a_i: & 3 & 2 & 4 & 3 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

Les valeurs de a_i sont entre 1 et $r(p)$ (ici $r(p) = 4$).

Principe des tiroirs : il y a une valeur répétée au moins $\lceil n/r(p) \rceil$ fois (ici, 3 fois).

$\lceil x \rceil$: entier juste au-dessus de x.

Démonstration par le principe des tiroirs

Soit p une permutation de n. Notons a_i la longueur de la plus-longue sous-suite croissante commençant en position i.

Exemple :

$$\begin{array}{rcccccccccc} p: & 5 & 9 & 2 & 4 & 1 & 10 & 3 & 7 & 6 & 8 \\ a_i: & 3 & 2 & 4 & 3 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

Les valeurs de a_i sont entre 1 et $r(p)$ (ici $r(p) = 4$).

Principe des tiroirs : il y a une valeur répétée au moins $\lceil n/r(p) \rceil$ fois (ici, 3 fois).

Les nombres correspondant dans p forme une sous-suite décroissante.

Démonstration par le principe des tiroirs

Soit p une permutation de n. Notons a_i la longueur de la plus-longue sous-suite croissante commençant en position i.

Exemple :

$$\begin{array}{lcccccccccc} p: & 5 & 9 & 2 & 4 & 1 & 10 & 3 & 7 & 6 & 8 \\ a_i: & 3 & 2 & 4 & 3 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

Les valeurs de a_i sont entre 1 et $r(p)$ (ici $r(p) = 4$).

Principe des tiroirs : il y a une valeur répétée au moins $\lceil n/r(p) \rceil$ fois (ici, 3 fois).

Les nombres correspondant dans p forme une sous-suite décroissante. Donc

$$s(p) \geq \lceil n/r(p) \rceil \geq n/r(p). \quad \square$$

Transition

On vient de prouver avec le principe des tiroirs :

Proposition La moyenne $E(r(p))$ de $r(p)$ vérifie

$$E(r(p)) \geq \sqrt{n}.$$

Transition

On vient de prouver avec le principe des tiroirs :

Proposition La moyenne $E(r(p))$ de $r(p)$ vérifie

$$E(r(p)) \geq \sqrt{n}.$$

On pourrait aller plus loin et prouver

Théorème

En probabilité,

$$r(p) \sim 2\sqrt{n}.$$

mais cela demande des outils (beaucoup) plus évolués...

(voir aussi mon exposé à l'IHP)