TDs mathématiques IMAC 1

Exercice 1 : mettre sous forme exponentielle

$$z_1 = (-1+j)^{16}\,; z_2 = \frac{3-4j}{-3+j}$$

Correction :

$$-1+j = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{3j\pi}{4}} \text{ donc } z_1 = 2^8 \cdot e^{\frac{24j\pi}{4}} = 256$$

$$z_2 = \frac{(3-4j)(-3-j)}{(-3+j)(-3-j)} = \frac{-9-4+12j-3j}{9+1} = \frac{-13}{10} + \frac{9}{10}j$$

Exercice 2 : Soit $z = x + jy$. Mettre sous forme polaire puis cartésienne e^z. Ecrivez $|e^z|$, $Arg(e^z)$, $\Re(e^z)$, $\Im(e^z)$ Motrer que $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Correction : $e^z = e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy}$ forme exponentielle ($|e^z| = e^x$, $Arg(e^z) = y$)
$e^z = e^x\cos(y) + je^x\sin(y)$ forme carthésienne ($\Re(e^z) = e^x\cos(y)$, $\Im(e^z) = e^x\sin(y)$)

$$\overline{e^z} = e^x \cdot e^{-jy} = e^{x-jy} = e^{\bar{z}}$$

Exercice 3 : Calculer $I = \int_0^{2\pi} \sin^2(mt)\cos(nt)dt$ avec m, n entiers ≥ 1.

Correction :

On linéarise $\sin^2(mt)\cos(nt) = \frac{-1}{8}(e^{jmt} - e^{-jmt})^2 \cdot (e^{jnt} + e^{-jnt})$

$$= \frac{-1}{8}\left(e^{2jmt+jnt} + e^{-2jmt-jnt} + e^{2jmt-jnt} + e^{-2jmt+jnt} - 2(e^{jnt} + e^{-jnt})\right)$$

$$= \frac{-1}{8}(2\cos(2mt+nt) + 2\cos(2mt-nt) - 2cos(nt))$$

En intégrant, on obtient $I = \begin{cases} \frac{-\pi}{2} & \text{si } n = 2m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 4 : Calculer les coefficients de Fourrier de la fonction 1-périodique définie par $f(x) = x$ sur $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

Correction : f impaire donc les a_k sont nuls.
$b_k = \int_0^1 f(t)\sin(2\pi t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t\sin(2\pi kt)dt$ par changement de variables.

$$\begin{aligned} b_k &\overset{\text{IPP}}{=} \left[t\cdot(-\frac{1}{2\pi k}\cos(2\pi kt))\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2k\pi}\cos(2\pi kt))dt \\ &= \frac{(-1)}{2\pi k}\left(\frac{1}{2}(-1)^k - \frac{-1}{2}(-1)^k\right) - 0 = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi k} \end{aligned}$$

Exercice 5 : Montrer que $E = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ deux fois dérivable telle que} f''(x) = -9f(x)\right\}$ est un espace vectoriel. En cherchant des fonctions trigonométriques, trouver deux vecteurs indépendants de E. Que peut-on dire de la dimension de E ?

Correction : Montrer que c'est un sous espace des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f \equiv 0$ est clairement dans E, une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable et l'équation différentielle est encore vérifiée...

Deux vecteurs indépendants : $g(x) = \cos(3x) et h(x) = \sin(3x)$: En effet, si $\lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x) = 0$, on en déduit que $\lambda = 0$ en regardant le cas $x = 0$ et que $\mu = 0$ en regardant le cas $x = \frac{\pi}{6}$.

La dimension de E est donc plus grande que 2 (en fait égale à 2 mais c'est dur à montrer !).

Exercice 6 : Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$.

Correction : On fait successivement les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$.

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} b-a & 0 & 0 & a-b \\ 0 & b-a & 0 & a-b \\ 0 & 0 & b-a & a-b \\ a & a & a & b \end{pmatrix} = (b-a)^3\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ a & a & a & b \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & b \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ a & a & a \end{pmatrix} =$$
$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & a \end{pmatrix} - a\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -b - 3a$$

Finalement, $\det(M) = (a-b)^3(3a+b)$

Exercice 7 : Montrer, avec des exponentielles, que $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$. En déduire le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \end{pmatrix}$$

Correction :

$$\begin{aligned} 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) &= \frac{1}{2}((e^{j\frac{p+q}{2}} + e^{-j\frac{p+q}{2}}) \cdot (e^{j\frac{p-q}{2}} + e^{-j\frac{p-q}{2}}) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{jp} + e^{-jp} + e^{jq} + e^{-jq}\right) = \cos(p) + \cos(q) \end{aligned}$$

Avec la formule précédente on a : $C_1 + C_3 = 2cos(a) \cdot C_2$. Les vecteurs colonnes ne sont pas indépendants et le déterminant vaut 0.