

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

*Corso di laurea in Fisica*

**Sottovarietà Coisotrope in Teorie di Campo e Quantizzazione**

*Relatore:* Prof. Paolo Cotta-Ramusino

*Relatore esterno:* Prof. Alberto Cattaneo

Tesi di laurea di Daniele Signori  
matricola 618105  
Codice PACS: 11.15

Anno Accademico 2003-2004



# Prefazione

Tutti i fisici conoscono l'efficacia del *principio di corrispondenza*: tutte le volte che le evidenze sperimentali reclamano la necessità di una nuova teoria, uno dei setacci che permette di discriminare i candidati più promettenti è la richiesta di incorporare il modello precedente in qualche opportuno limite. Questo limite è solitamente descritto in termini di una costante o grandezza caratteristica: mandando la curvatura dello spazio-tempo a zero la Relatività Generale diviene la Relatività Ristretta e, mandando la velocità della luce  $c$  all'infinito, da quest'ultima si ottiene la fisica Newtoniana. Un altro esempio è la “dequantizzazione”, dove la descrizione classica viene recuperata annullando la costante di Planck  $\hbar$ . Visto che una delle più ricche interfacce tra la matematica e la fisica è data dal comune interesse verso le simmetrie, non stupisce il fatto che l'idea matematica analoga al principio di corrispondenza sia formulata in termini di gruppi con la nozione di *contrazione*. Il gruppo di de Sitter si contrae a dare quello di Poincaré (mandando a zero la curvatura), che a sua volta consente il passaggio a quello di Galilei ( $c \rightarrow \infty$ ).

La necessità di costruire modelli è caratteristica delle Scienze Naturali, che tradizionalmente si sono avvalse solo di pochi principi come guida. Una teoria fisica ha un proprio dominio di applicabilità, definito da alcune grandezze rilevanti (velocità, energia, distanza, etc.). L'estensione, la cui necessità è ovviamente dettata primariamente da osservazioni sperimentali, della nostra comprensione della Natura a domini più ampi avviene modificando, *deformando*, la teoria in maniera tale da includere una spiegazione per i nuovi dati raccolti. Avviene spesso che questa deformazione è etichettata da una grandezza, l'inverso della velocità della luce o la costante di Planck sono due esempi. Un occhio matematico descriverebbe questa situazione dicendo che abbiamo una nuova struttura che coincide con il formalismo precedente nel limite in cui il nuovo parametro va a zero: siamo nell'ambito della *Teoria delle Deformazioni*. La struttura deformata è più ricca e quindi è in grado di descrivere una varietà di fenomeni maggiore.

Come il concetto di deformazione di una struttura algebrica è opposto a quello di contrazione, così possiamo introdurre una dualità analoga nell'ambito della fisica e pensare che oltre al principio di corrispondenza sia ragionevole chiedere che una nuova teoria sia una deformazione di quella prece-

dente. Da questo punto di vista la *Quantizzazione per Deformazione* non è solo un modo di riformulare il problema della quantizzazione di un sistema classico, ma da un punto di vista concettuale è dire che la quantizzazione è una deformazione.

Nel resto di questo lavoro ci lasceremo alle spalle queste considerazioni e non affronteremo in alcun dettaglio la teoria delle deformazioni per concentrarci sugli aspetti della quantizzazione per deformazione nel formalismo dell'integrale funzionale. Perché una prefazione di fatto lontana dai temi trattati?

A scientist should try to answer three questions: why, what and how. The bulk of the work is of course devoted to last question: research is at best 10% inspiration and 90% perspiration. But it is better to know what one is doing, and it helps a lot to know why.

Daniel Sternheimer

In questa prefazione ho cercato di esporre una parziale risposta a 'chi' e 'cosa'.

Bergamo, 15 agosto 2004  
Daniele Signori

# Ringraziamenti

Le persone a cui sono debitore e che hanno contribuito, in una maniera o nell'altra, alla realizzazione di questo sogno sono tantissime. Sarà difficile con poche parole rendere giustizia all'importanza del ruolo che hanno giocato.

La mia formazione è stata plasmata negli anni del liceo da due persone formidabili: prof. Garattini mi ha insegnato a coltivare la curiosità e il rispetto verso le meraviglie della Natura, ma il mio profondo interesse non sarebbe mai diventato amore senza le preziose lezioni del prof. S. Mattina e la sua contagiosa devozione alla Fisica.

La Rete è il locale dove ho trovato modo di interagire con un sacco di persone, di coltivare ed ampliare in ogni momento i miei interessi: con il mio amico di e-penna Simone ho condiviso speranze e incertezze, Davide, Salvatore, Febiz e tutti gli altri dei canali di #matematica e #physics mi hanno tenuto compagnia alle più improbabili ore notturne. A volte, nei luoghi e nei modi più improbabili, troviamo affinità particolari: Andrea Splendiani è una di queste.

Devo a Inno, Paoletto, Erika, Lele, Marta, Albi, Marco e Tome la spensieratezza di questi anni di università; agli staff delle biblioteche di fisica e matematica l'aver messo mille pezze ai pasticci che ho combinato dietro al bancone; a Pete e Fabio la compagnia negli interminabili pomeriggi invernali in biblioteca e i sogni ad occhi aperti di neve fresca; a Piè, Michi & Fede, Simo e Cla il provvidenziale aiuto nei momenti di panico pre esame. Il Capitano Giò e Frà sanno cosa. Al Signor Andrea Velenich l'avermi affibbiato nomiglioli di lusso, insegnato un sacco di cose e finto di leggere i miei innumerevoli sproloqui elettronici.

Questa tesi sarebbe durata mesi in più senza tutta la geometria che mi è stata insegnata alle Diffiety School: devo ringraziare Rossella e Christian per le settimane divertenti nonostante le ore disumane di lavoro, Giovanni per essermi stato da modello e Luca per gli incessanti incoraggiamenti e l'incondizionato supporto.

Il bel corso della dott. Abbati ha sigillato definitivamente il mio interesse per la Fisica Matematica. Non ci sono parole per la sua disponibilità, supporto e interesse sia dal punto di vista accademico che personale.

Oltre ad avermi dato la possibilità di lavorare con il prof. Cattaneo,

senza i preziosi consigli del prof. Cotta-Ramusino non avrei mai centrato l'obiettivo con questo tempismo.

Vorrei ringraziare la segreteria dell'ufficio Erasmus di Milano per aver organizzato il mio soggiorno in Svizzera in extremis e per i salti mortali che ancora stanno facendo per garantirmi una borsa di studio, l'ETH di Zurigo per l'ospitalità e il supporto economico, l'Università di Zurigo per l'accesso alle risorse informatiche, Davide e Luca per i mille inviti che non potuto sfruttare, il dott. Carlo Rossi per avermi regalato una copia della sua tesi di dottorato.

Mi ritengo fortunato di aver lavorato con il prof. Cattaneo e gli sono riconoscente per avermi avvicinato a temi di ricerca estremamente interessanti, per l'atmosfera sempre cordiale e la disponibilità a chiarire anche i dubbi più banali. Vorrei scusarmi per averlo costretto a portarsi il lavoro in vacanza, facendogli correggere questa tesi in piena estate.

Fabrizio 'Don' Donzelli mi ha risparmiato, tra le altre cose, ore di computer offrendomi un sostanziale aiuto in materia di  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ nicismi. Mariella della PieffeCopy ha organizzato una collaborazione di quartiere per riuscire in una cronometrica preparazione delle copie cartacee di questo lavoro. La sig.ra Cordani ha esibito una incrollabile pazienza di fronte alle mie paranoiche domande.

A Fili, Ciccio, Spine, Anni e Vitto, grazie per le innumerevoli serate (etiliche e non); a Yori e Lauretta per essere quelli che sono. Alla mia famiglia acquisita, Cippi e Fiore, per il loro affetto; ad Elena per troppe cose per poterle scrivere; alla mia famiglia, i nonni per il loro esempio, Marina e i miei genitori, i migliori che potessi avere.

# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>iii</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>v</b>
<b>Indice</b>	<b>vii</b>
<b>Introduzione</b>	<b>ix</b>
<b>1 Il formalismo Batalin–Vilkovinsky</b>	<b>1</b>
1.1 Riscaldamento matematico . . . . .	2
1.1.1 Superspazi vettoriali . . . . .	3
1.1.2 Funzioni su un superspazio . . . . .	4
1.1.3 Algebre di Lie e rappresentazioni . . . . .	5
1.1.4 Algebre di Batalin-Vilkovisky . . . . .	8
1.2 Tecnologia BV . . . . .	10
1.2.1 Faddeev-Popov, BRST e necessità del formalismo BV	11
1.2.2 Coomologie del Formalismo BV . . . . .	14
1.2.3 Significato della master equation e quantizzazione BV	18
<b>2 <math>P\sigma M</math> e Quantizzazione per Deformazione</b>	<b>23</b>
2.1 Deformation Quantization . . . . .	24
2.1.1 La formula di Konstevich . . . . .	26
2.1.2 Quantizzazione di $T^*\mathbb{R}^n$ e il prodotto di Moyal . . . . .	28
2.2 Il Poisson Sigma Model . . . . .	30
2.2.1 Prodotto di Moyal via integrale sui cammini . . . . .	30
2.2.2 Verso il Poisson Sigma Model . . . . .	32
2.2.3 Simmetrie dell'azione e algebra di gauge . . . . .	40
2.3 Quantizzazione BV del $P\sigma M$ . . . . .	42
2.3.1 Superformalismo . . . . .	45
2.3.2 Propagatori e Sviluppo perturbativa . . . . .	48
2.3.3 Rinormalizzazione . . . . .	50

<b>3</b>	<b>Il metodo AKSZ</b>	<b>53</b>
3.1	Supervarietà . . . . .	53
3.1.1	$Q$ -strutture . . . . .	54
3.1.2	$P$ -strutture . . . . .	56
3.1.3	$QP$ -structures . . . . .	57
3.1.4	Sulle misure . . . . .	58
3.1.5	Gradazioni: da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}$ . . . . .	59
3.2	Spazi di Mappe . . . . .	61
3.2.1	$Q$ -strutture, $P$ -strutture e $QP$ -struttura indotta da $Y$ . . . . .	61
3.2.2	La struttura $QP$ di ASKZ . . . . .	63
3.2.3	Generalizzazione a varietà con bordo . . . . .	65
3.3	Applicazione al Poisson Sigma Model — $P\sigma M$ . . . . .	69
3.3.1	La struttura $QP$ e l'azione classica . . . . .	70
3.3.2	Poisson Sigma Model e $\partial\Sigma \neq \emptyset$ . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Sottovarietà Coisotrope nel <math>P\sigma M</math></b>	<b>73</b>
4.1	Sottovarietà Coisotrope . . . . .	73
4.1.1	Distribuzioni Generalizzate e Foliazioni Caratteristiche . . . . .	74
4.1.2	Sottovarietà coisotrope e completa integrabilità . . . . .	76
4.1.3	Caratterizzazione dell'algebra delle funzioni di $C$ . . . . .	78
4.2	Condizioni al contorno generiche nel $P\sigma M$ . . . . .	80
4.2.1	Impostazione della quantizzazione BV . . . . .	80
4.2.2	Diagrammi di Feynman nel caso $k = 1$ . . . . .	82
4.2.3	Bimoduli, i.e. caso $k = 2$ . . . . .	86
4.2.4	Alcuni esempi . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Teorie di Campo e J-<math>P\sigma M</math></b>	<b>89</b>
5.1	L'azione di Chern-Simons . . . . .	90
5.1.1	Simmetrie e formulazione hamiltoniana . . . . .	91
5.1.2	La sottovarietà coisotropa delle connessioni piatte . . . . .	93
5.1.3	Estensione del dominio temporale . . . . .	96
5.1.4	Interpretazione attraverso il $P\sigma M$ . . . . .	96
5.2	Momentum Map e J- $P\sigma M$ . . . . .	99
5.2.1	Azioni Hamiltoniane equivarianti . . . . .	99
5.2.2	J-Prodotto di varietà di Poisson . . . . .	101
5.2.3	Le sottovarietà $J^{-1}(0)$ , $\mathcal{M} \times \{0\}$ e Graph J . . . . .	102
5.3	Il J- $P\sigma M$ in altre teorie di campo . . . . .	106
5.3.1	Yang Mills abeliana: l'elettromagnetismo . . . . .	106
5.3.2	Il $P\sigma M$ come teoria di gauge . . . . .	109
	<b>Conclusioni</b>	<b>113</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>115</b>



# Introduzione

Questa tesi tratta l'argomento della quantizzazione per deformazione, in particolare dell'interpretazione in termini di una teoria di campo quantistica della formula di Konstevich [7]. L'obiettivo è descrivere un modello adatto alla quantizzazione per deformazione di teorie di gauge, sfruttando le proprietà delle sottovarietà coisotrope per gestire le simmetrie.

Le osservabili di un sistema meccanico sono le funzioni lisce sullo spazio delle fasi, che è una varietà simplettica o più in generale di Poisson. Una *varietà di Poisson*  $(M, \pi)$  [40] è una varietà  $M$  equipaggiata con un campo bivettoriale  $\pi$  tale che il bracket  $\{f, g\} := \pi(df, dg)$  è una parentesi di Lie su  $C^\infty(M)$ . Le osservabili formano quindi un'algebra di Poisson. Secondo Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz and Sternheimer [4], la quantizzazione deve essere intesa come una deformazione della struttura di algebra delle osservabili classiche. Precursore di questa idea è stato Dirac, suggerendo che l'introduzione di un nuovo prodotto (star prodotto) tra le funzioni  $f \star g$ , tale che il commutatore  $[f, g] = f \star g - g \star f$  sia proporzionale a  $\{f, g\}$  al primo ordine in  $\hbar$ , definisce una quantizzazione del sistema fisico considerato. La formula generale per la costruzione di uno star prodotto trovata da Konstevich [28] è stata espressa da Cattaneo e Felder in termini dell'espansione perturbativa alla Feynman del Poisson Sigma Model (P $\sigma$ M), una teoria di campo bidimensionale. I campi del P $\sigma$ M sono  $X : D \rightarrow M$  e una 1-forma  $\eta$  a valori in  $X^*T^*M$  e l'azione è data da:

$$S := \int_D \eta_i \wedge dX^i + \frac{1}{2} \pi^{ij}(X) \eta_i \wedge \eta_j \quad .$$

$D$  è il disco bidimensionale e se  $0, 1, \infty$  sono punti distinti sul bordo di  $D$ , la formula per lo star prodotto è:

$$f \star g(x) = \int_{X(\infty)=x} f(X(1))g(X(0))e^{\frac{i}{\hbar}S[X,\eta]} dX d\eta. \quad (1)$$

Il P $\sigma$ M è una teoria di gauge non lineare e l'algebra delle sue simmetrie è chiusa solo on shell quindi per dare senso alla formula (1) è necessario ricorrere al formalismo di Batalin-Vilkovinsky [23],[20]. La degenerazione legata alle simmetrie viene curata introducendo per ogni campo  $\phi$  una variabile duale, l'anticampo  $\phi^+$ , e il gauge fixing consiste nell'individuare una

sottovarietà lagrangiana opportuna nello spazio simplettico infinito dimensionale con coordinate date dai campi e dagli anticampi  $\{\phi, \phi^+\}$ . L'integrale funzionale viene calcolato su questa sottovarietà usando come peso una deformazione dell'azione, detta azione BV, che deve soddisfare la quantum master equation (1.6):

$$(S_{\text{BV}}, S_{\text{BV}}) - 2\Delta S_{\text{BV}} = 0.$$

Nel primo capitolo descriviamo gli aspetti necessari, essenzialmente algebrici, della tecnica BV e nel secondo applichiamo sviluppiamo il  $P\sigma M$  fino ad ottenere la formula di Konstevich.

Nel terzo capitolo affrontiamo la descrizione geometrica del formalismo BV esponendo il metodo *metodo AKSZ* (Alexandrov–Kontsevich–Schwarz–Zaboronsky) [1] e la generalizzazione di Cattaneo e Felder a varietà con bordo. Il metodo AKSZ è una tecnica per costruire soluzioni della master equation senza partire da una azione classica ma affidandosi solamente a costruzioni geometriche naturali. Per il  $P\sigma M$ , il primo passo della costruzione prevede di considerare le supervarietà  $\pi TD$  e  $\pi T^*M$ , dove  $\pi$  inverte la parità delle fibre. Lo spazio delle mappe  $\pi TD \rightarrow \pi T^*M$  eredita una struttura simplettica dispari e un campo vettoriale hamiltoniano anticommutante con se stesso: la forma simplettica è ottenuta via integrazione su  $\pi TD$  da quella canonica su  $\pi T^*M$ , mentre il campo hamiltoniano è una combinazione lineare del sollevamento del bivettore di Poisson su  $M$  e del differenziale di de Rham su  $D$ . La funzione hamiltoniana del campo così ottenuto è l'azione di BV cercata e soddisfa alla master equation nel caso in cui  $D$  non abbia bordo, altrimenti è necessario imporre delle condizioni al contorno nella forma di vincoli di prima classe e il funzionale dell'azione si ottiene dopo aver effettuato una riduzione hamiltoniana.

Le condizioni al contorno per i campi del  $P\sigma M$  che forniscono la formula di Kontsevich sono le più semplici immaginabili:  $\eta$  deve annullarsi sui vettori tangenti al bordo di  $D$ . In questo modo le equazioni del moto sono equazioni differenziali, in quanto i termini di bordo si annullano. Nel capitolo 4 esploriamo una classe più generale di possibili condizioni al contorno, etichettate dalle sottovarietà coisotrope di  $M$ . Una sottovarietà  $C$  è detta coisotropa se  $\pi^\# N^*C \subset TC$ , dove  $N^*C$  indica il fibrato conormale di  $C$ , i.e. il sottofibrato dei covettori che si annullano su  $TC$ . La proprietà che rende queste sottovarietà interessanti da un punto di vista geometrico è il fatto che la distribuzione caratteristica  $\pi^\# N^*C$  è completamente integrabile e lo spazio dei fogli è una varietà di Poisson. Sotto appropriate condizioni, la quantizzazione perturbativa del  $P\sigma M$  con condizioni al contorno date da sottovarietà coisotrope permette di quantizzare per deformazione la varietà di Poisson (in generale singolare) ottenuta per riduzione dalla sottovarietà coisotropa data.

L'ultimo capitolo contiene la parte originale di questo lavoro. In una teoria di gauge, l'azione del gruppo di gauge  $\mathcal{G}$  fa sì che campi diversi cor-

rispondano allo stesso stato fisico del sistema, quindi la varietà simplettica che si ottiene nella formulazione hamiltoniana della teoria di campo non è la varietà di Poisson che vogliamo quantizzare. Studiando il caso particolare della teoria di Chern-Simons, siamo stati in grado di sviluppare un framework — il J-Poisson Sigma Model — per la quantizzazione di teorie di campo con algebra di gauge chiusa. Tutte le informazioni circa la simmetria di gauge sono racchiuse nella mappa equivariante degli impulsi  $J : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{G}^*$  a valori nell'algebra di Lie del gruppo di Gauge  $\mathcal{G}$ , ingrediente fondamentale del J-P $\sigma$ M. Le equazioni di Eulero Lagrange della teoria sono indeterminate a causa della simmetria di gauge, nel senso che non ci sono abbastanza equazioni di evoluzione per propagare tutte le componenti del campo, quindi alcuni campi (*cinematici*) non hanno evoluzione determinata. Nel caso più semplice sono dei moltiplicatori di Lagrange per i vincoli imposti sullo spazio dei dati iniziali per i restanti campi *fisici*, la varietà vincolare è individuata dalla controimmagine dello  $0 \in \mathfrak{G}^*$  attraverso  $J$ .

Otteniamo che la formulazione corretta del Poisson Sigma Model per una teoria di gauge sia la seguente:

$$\text{P}\sigma\text{M}(\mathcal{M}) \quad + \quad \text{P}\sigma\text{M}(\mathfrak{G}^*) \quad + \quad \text{struttura J-Poisson} \quad + \quad \text{vincolo}$$

dove per struttura J-Poisson si intende un termine che lega le strutture sullo spazio target e la coalgebra di Lie. L'origine di questo termine può essere collegata ad una deformazione della struttura canonica di Poisson sul prodotto  $\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*$  dovuta alla momentum map  $J$ .

Come applicazione del J-P $\sigma$ M, affrontiamo le teorie di Yang-Mills e il P $\sigma$ M stesso (nel caso affine) visto come teoria di gauge.



# Capitolo 1

## Il formalismo Batalin–Vilkovinsky

Una tecnica di quantizzazione che risulta intuitiva ed efficace è quella funzionale. Il principio di sovrapposizione e quello di corrispondenza <sup>1</sup> portano in maniera spontanea — ignorando deliberatamente il fatto che ci sono voluti una manciata di Nobel per svilupparla — all’idea di *somma sui cammini*: le previsioni si calcolano come valori medi su tutte le possibili evoluzioni del sistema. I gradi di libertà sono infiniti in quanto un’evoluzione (un cammino) è definita da una funzione del tempo nello spazio degli stati. L’operazione di media coinvolge un integrale su un dominio infinito dimensionale, l’*integrale funzionale*. La distribuzione o il peso assegnato a ciascuno di questi cammini è dato dall’esponenziale dell’azione classica, moltiplicata per  $i\hbar$ . Per una reale spiegazione intuitiva si veda [17].

L’efficacia del formalismo funzionale si misura dal fatto che tutte le grandezze significative si calcolano in maniera perturbativa allo stesso modo, ricorrendo al teorema di Wick per *integrali gaussiani* e gli unici ingredienti necessari sono i *propagatori* della teoria, il che equivale sostanzialmente ad invertire il termine quadratico (i.e. gaussiano) dell’azione.

D’altra parte, tutte le forze fondamentali della natura sono delle teorie di gauge, cioè teorie che hanno una simmetria continua locale detta appunto di gauge. Preso un punto critico dell’azione, possiamo tramite l’azione del gruppo di simmetrie, trovarne una famiglia continua. Il punto critico è dunque degenere, la parte gaussiana dell’azione non può essere invertita. Addio espansione perturbativa.

Come si risolve questo inconveniente? La risposta più potente fino ad oggi sviluppata è quella del formalismo di Batalin-Vilkovisky. Questo è una tecnica algebrica e geometrica ideale per trattare lo sviluppo asintotico di

---

<sup>1</sup>Una teoria generale, in questo caso una teoria quantistica, deve includere come appropriato limite i casi particolari, ad esempio la meccanica classica nel limite  $\hbar = 0$

integrali gaussiani

$$\int_{\mathcal{M}} \Psi e^{\frac{i}{\hbar} S} dv$$

in presenza di una distribuzione di simmetrie infinitesime dell'azione dell'azione  $S$ .

L'idea alla base del formalismo BV è parente della tecnica di calcolo degli integrali con il teorema dei residui, come descritto in [18]. Prendiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

Per prima cosa passiamo da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$ , cioè raddoppiamo il numero di variabili. Estendendo l'integranda sul piano complesso otteniamo una 1-forma  $dz/(z^2 + 1)$  chiusa. Inoltre questa forma si estende all'infinito ad una forma chiusa su  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\pm i\}$  e in particolare il dominio di integrazione  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  è un ciclo in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\pm i\}$ . Possiamo calcolare l'integrale originale scegliendo un altro ciclo omologo a  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , per esempio una piccola circonferenza  $\Gamma$  attorno ad  $i$ . Sviluppando in serie di Laurent ti ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = - \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+2} \int_{\Gamma_0} \zeta^n d\zeta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi$$

dove  $\zeta = z - i$  e  $\Gamma_0$  la circonferenza  $\Gamma - i$ .

Riassumiamo i passi compiuti. (1) Il problema è quello di calcolare l'integrale  $\int_M \Phi$ , dove  $M$  è una varietà differenziabile e  $\Phi$  è una forma top su  $M$ . (2) Consideriamo  $M$  come un ciclo in una varietà di dimensione doppia  $N$  ed estendiamo  $\Phi$  ad una forma *chiusa*  $\Omega$  su  $N$ . La condizione  $d\Omega = 0$  è una condizione di *invarianza di gauge*; la varietà  $M$  dentro a  $N$  è una *scelta del gauge*. (3) Scegliamo un altro ciclo  $M_0$  in  $N$ , nella stessa classe di omologia di  $M$ . Visto che  $\Omega$  è chiusa possiamo calcolare l'integrale originale integrando  $\Omega$  su  $M_0$ . Abbiamo appena effettuato un *cambio del gauge*. Il fatto che il risultato dell'integrazione sia lo stesso è quello che in fisica viene chiamato indipendenza dalla scelta del gauge.

Una prima vaga idea del formalismo BV è quindi la seguente: raddoppiare il numero dei campi (introducendo gli anticampi) e sviluppare una teoria coomologica che ci permetta di effettuare il cambio del gauge. Il nuovo gauge fixing dovrà essere tale da rimuovere la degenerazione nella parte quadratica dell'azione, in modo da rendere disponibili le tecniche standard.

## 1.1 Riscaldamento matematico

Da un punto di vista matematico, il formalismo BV è lo studio delle funzioni lisce su una *supervarietà simplettica dispari*. Dietro a queste parole c'è tutto il macchinario dell'analisi su supervarietà, in altre parole lo studio di funzioni

su spazi graduati. In questa sezione introduciamo gli spazi vettoriali gradati e il funtore  $\pi$  di inversione di parità che svolgerà un ruolo fondamentale nel capitolo 3.

Con il prefisso *super* ci si riferisce ad una gradazione  $\mathbb{Z}_2$ ; gli elementi omogenei di uno superspazio sono dunque di due tipi, quelli con grado 0 e quelli con grado 1. Alternativamente si usano le notazioni  $+$  e  $-$  oppure *pari* e *dispari* (even e odd). Le operazioni definite su uno spazio *super* devono essere tali da preservare la struttura data da questa gradazione.

### 1.1.1 Superspazi vettoriali

Un superspazio  $V$  (vettoriale è sottointeso) è un spazio vettoriale dotato di una gradazione  $\mathbb{Z}_2$ , può quindi essere decomposto nelle sue parti even e odd  $V = V_0 \oplus V_1$ :  $V_0$  indica lo spazio dei vettori di grado 0 mentre  $V_1$  è lo spazio dei vettori di grado 1. Il grado di un vettore in  $V$  è detto anche *parità*; la parità è ben definita solo per elementi omogenei, cioè elementi che giacciono completamente in uno dei due fattori in cui  $V$  è decomposto.

Un modo più algebrico di definire uno superspazio vettoriale è considerare una coppia  $(V, \alpha)$ , dove  $V$  è uno spazio vettoriale e  $\alpha: V \rightarrow V$  è un suo automorfismo che soddisfa  $\alpha^2 = \text{id}$ . I suoi autovalori saranno 1 e  $-1$ , e permettono di definire  $V_0$  come autospazio di 1 e  $V_1$  come autospazio di  $(-1)$ . Per un elemento omogeneo si ha  $\alpha(x) = (-1)^x x$ , dove la  $x$  a esponente è una abbreviazione per  $\deg x$ . La dimensione di un superspazio è la coppia  $(\dim V_0, \dim V_1)$ , cioè se  $\dim V_i = m_i$ , allora lo spazio  $V$  è  $(m_0|m_1)$ -dimensionale.

Ogni spazio vettoriale  $V$  può essere visto come un superspazio scegliendo la coppia  $(V, \text{id})$ , che equivale alla decomposizione banale  $V \oplus 0$ . Analogamente, ogni spazio vettoriale dà luogo ad un superspazio vettoriale dispari, cioè del tipo  $0 \oplus V$  che viene usualmente denotato con  $V[1]$  per indicare che il grado dei suoi elementi è  $-1$ .  $V[1]$  non è altro che la coppia  $(V, -\text{id})$ .

Le coppie del tipo  $(V, \alpha)$  sono gli oggetti della categoria dei superspazi, dobbiamo ora definire i morfismi: la definizione naturale è richiedere che un morfismo  $\varphi: V \rightarrow W$  tra superspazi sia una mappa lineare che conserva il grado. Questo equivale a chiedere che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \alpha_V \downarrow & & \downarrow \alpha_W \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

La categoria dei superspazi vettoriali su un campo fissato che abbiamo appena definito si indica con **SuperVect**. Introduciamo ora un ingrediente che

ci servirà molto spesso più avanti, il *funtore di inversione di parità*  $\pi$ :

$$\begin{aligned} \pi : \text{SuperVect} &\rightarrow \text{SuperVect} \\ (V, \alpha) &\mapsto (V, -\alpha). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Con questa definizione si ha:

$$(\pi V)_0 = V_1; \quad (\pi V)_1 = V_0.$$

e in particolare:

$$(V, -\text{id}) = 0 \oplus V = V[1] = \pi V.$$

### 1.1.2 Funzioni su un superspazio

Nel formalismo BV i campi sono delle funzioni tra supervarietà; dato che penseremo quest'ultime semplicemente come varietà lisce modellate su superspazio dobbiamo iniziare a capire cosa sono le funzioni su un superspazio. Non ci preoccupiamo di questioni topologiche e quindi definiamo le funzioni come serie di potenze formali, senza tener conto della loro convergenza. Per uno spazio vettoriale ordinario, queste ipotesi portano a definire lo spazio delle funzioni come:

$$\text{Fun}(V) = \varinjlim_n S^n(V^*)$$

che altro non è se non il completamento dell'algebra dei polinomi generata dai funzionali lineari  $x^i$ , le coordinate.

Una buona scelta è imporre la stessa definizione per i superspazi. Rimandiamo a dopo qualche osservazione sulla costruzione delle potenze simmetriche di un super spazio e andiamo dritti al risultato: nel caso *super* l'algebra delle funzioni è generata dalla base  $\{x^1, \dots, x^{m_0}, \theta^1, \dots, \theta^{m_1}\}$  del duale  $V^*$ , con  $x^i$  pari e  $\theta^k$  dispari con le relazioni:

$$\begin{aligned} x^i x^j &= x^j x^i \\ x^i \theta^k &= \theta^k x^i \\ \theta^k \theta^l &= -\theta^l \theta^k \end{aligned}$$

I funzionali lineari  $\theta^k$  sono chiamati in questo caso coordinate *dispari*. Dalle relazioni precedenti si vede come le coordinate sulla parte odd si un superspazio sono *anticommutanti*, sono cioè delle variabili di Grassmann!

Per giustificare questo risultato bisogna scavare un po' nella struttura della categoria dei superspazi: **SuperVect** è una *categoria tensoriale simmetrica intrecciata*. Diamo un senso a questo nome altisonante. Per prima cosa, *tensoriale* significa che si può fare il prodotto tensoriale dei suoi oggetti. E' *intrecciata* perchè per ogni coppia di oggetti esiste un isomorfismo tra  $V \otimes W$  e  $W \otimes V$ , cioè:

$$\sigma_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$$



definito da:

$$\sigma: x \otimes y \mapsto (-1)^{\bar{x}\bar{y}}(y \otimes x)$$

Infine è *simmetrica* se l'operatore  $\sigma$  soddisfa:

$$\begin{array}{ccc} V \otimes W & \xrightarrow{\text{id}} & V \otimes W \\ & \searrow \sigma_{V,W} & \nearrow \sigma_{W,V} \\ & W \otimes V & \end{array}$$

Si può dimostrare che per queste categorie è definita una azione naturale del gruppo delle permutazioni  $S_n$  sull'ennesimo prodotto tensoriale  $V^{\otimes n}$ . A questo punto la definizione delle potenze simmetriche di  $V$  è:

$$S^n(V) = (V^{\otimes n})_{S_n} = V^{\otimes n} / \{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n), \sigma \in S_n\}$$

Quindi

$$S^n(V_0 \oplus 0) = S^n(V_0)$$

e

$$S^n(0 \oplus V_1) = \bigwedge^n V_1.$$

Le potenze simmetriche di un superspazio sono un linguaggio unificato per le potenze simmetriche ed esterne di uno spazio vettoriale ordinario! In generale, per  $V = V_0 \oplus V_1$  si ha:

$$S^n(V_0 \oplus V_1) = \bigoplus_{k=0}^n \left( S^k(V_0) \otimes \bigwedge^{n-k} V_1 \right)$$

Questa è la traccia che porta all'interpretazione delle coordinate odd come variabili anticommutanti.

### 1.1.3 Algebre di Lie e rappresentazioni

La necessità di applicare il formalismo BV è data dalla presenza di simmetrie nell'azione, che la rendono degenere. La descrizione matematica di queste simmetrie è data nel caso più semplice da un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . In particolare, la simmetria agisce sui campi e questo si traduce in una rappresentazione di  $\mathfrak{g}$  sullo spazio dei campi. In questa sezione costruiamo algebricamente quello che i fisici chiamano operatore BRST.

Un algebra di Lie è uno spazio vettoriale dotato di un bracket:

$$[ , ] : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

che soddisfa l'identità di Jacobi. Sfruttando il funtore  $\pi$  posso rivedere il bracket come una mappa:

$$[ , ] : S^2(\pi\mathfrak{g}) \rightarrow \pi\mathfrak{g}.$$

La mappa duale  $[\cdot, \cdot]^* : \pi\mathfrak{g}^* \rightarrow S^2(\pi\mathfrak{g}^*)$  è piena di sorprese. Innanzitutto visto che  $S^2(\pi\mathfrak{g}^*)$  è incluso in  $Fun(\pi\mathfrak{g})$ , considero la seguente:

$$[\cdot, \cdot]^* : \pi\mathfrak{g}^* \rightarrow Fun(\pi\mathfrak{g})$$

Ma anche  $\pi\mathfrak{g}^*$  è incluso  $Fun(\pi\mathfrak{g})$  e quindi posso estendere tale applicazione imponendo la regola di Liebniz:  $\delta(\varphi_1\varphi_2) = \delta(\varphi_1)\varphi_2 + (-1)^{\varphi_1}\varphi_1\delta(\varphi_2)$ . Quello che si ottiene è una derivazione di grado 1

$$\delta : Fun(\Pi\mathfrak{g}) \rightarrow Fun(\Pi\mathfrak{g}).$$

Il risultato importante è che  $\delta$  è un differenziale, cioè soddisfa  $\delta^2 = 0$ . Per dimostrarlo, basta verificare che  $\delta^2\varphi = 0$  per ogni  $\varphi$  in  $\pi\mathfrak{g}^*$ , come si vede subito applicando la regola di Liebniz ad un prodotto generico  $\varphi_1 \dots \varphi_n \in Fun(\pi\mathfrak{g})$ .

Ricordiamo che  $\delta|_{\pi\mathfrak{g}^*}$  è il duale dell'algebra di Lie:

$$\langle \delta\varphi, g_1 \wedge g_2 \rangle = \langle \varphi, [g_1, g_2] \rangle,$$

quindi

$$\begin{aligned} \langle \delta^2\varphi, g_1 \wedge g_2 \wedge g_3 \rangle &= \langle \delta\varphi, [g_1, g_2] \wedge g_3 + [g_3, g_1] \wedge g_2 + [g_2, g_3] \wedge g_1 \rangle = \\ &= \langle \varphi, [[g_1, g_2], g_3] + [[g_3, g_1], g_2] + [[g_2, g_3], g_1] \rangle \end{aligned}$$

che è nullo per l'identità di Jacobi: in conclusione  $\delta^2 = 0$  è equivalente all'identità di Jacobi. Per ricavare l'espressione in coordinate del differenziale  $\delta$ , sia  $\{\gamma_i\}$  una base per  $\mathfrak{g}$  e  $\{c^i\}$  le corrispondenti coordinate su  $\pi\mathfrak{g}$ .

$$\begin{aligned} (\delta c^i)(\gamma_{j_0} \wedge \gamma_{k_0}) &= \langle c^i, [\gamma_{j_0}, \gamma_{k_0}] \rangle = \langle c^i, f_{j_0 k_0}^l \gamma_l \rangle = \\ &= f_{j_0 k_0}^i = \frac{1}{2} \langle f_{jk}^i c^j c^k, \gamma_{j_0} \wedge \gamma_{k_0} \rangle \end{aligned}$$

dove le  $f_{jk}^i$  sono le costanti di struttura dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  e si è usata:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle f_{jk}^i c^j c^k, \gamma_{j_0} \wedge \gamma_{k_0} \rangle &= \\ &= \frac{1}{2} f_{jk}^i (\langle c^j, \gamma_{j_0} \rangle \langle c^k, \gamma_{k_0} \rangle - \langle c^k, \gamma_{j_0} \rangle \langle c^j, \gamma_{k_0} \rangle) = \\ &= \frac{1}{2} f_{jk}^i (\delta_{j_0}^j \delta_{k_0}^k - \delta_{j_0}^k \delta_{k_0}^j) = f_{j_0 k_0}^i \end{aligned}$$

Abbiamo ricavato

$$\delta c^i = \frac{1}{2} f_{jk}^i c^j c^k$$

e in conclusione, l'espressione coordinata di  $\delta$  è data dalla seguente:

$$\delta = \frac{1}{2} f_{jk}^i c^j c^k \frac{\partial}{\partial c^i}. \quad (1.2)$$

Quando daremo un'interpretazione del formalismo BRST, questa sarà la sua azione sui campi *ghost*, quelli che descrivono la simmetria di gauge del sistema.

Passiamo ora alle *rappresentazioni*. Gli ingredienti di base sono uno spazio vettoriale  $V$  e un'algebra di Lie, la solita  $\mathfrak{g}$ . La ricetta è la seguente;  $\rho$  è una rappresentazione se:

$$\rho : \mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V$$

è una mappa lineare tale quella indotta:

$$\mathfrak{g} \rightarrow V^* \otimes V \simeq \text{End}(V)$$

sia un morfismo di algebre di Lie. Questa richiesta si può racchiudere in un bel diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}) \otimes V & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes V \xrightarrow{\text{id} \otimes \rho} V \\ \downarrow [\cdot, \cdot] & & \downarrow \rho \\ \mathfrak{g} \otimes V & \xrightarrow{\rho} & V \end{array}$$

Ora considero le tre mappe:

$$0 : S^2(V) \rightarrow 0$$

$$\rho : \mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V$$

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

che possono essere messe insieme a dare una mappa

$$\rho + [\cdot, \cdot] : S^2(V \oplus \pi\mathfrak{g}) \rightarrow V \oplus \pi\mathfrak{g}$$

grazie all'isomorfismo

$$S^2(V \oplus \pi\mathfrak{g}) \simeq S^2(V) \oplus (\pi\mathfrak{g} \otimes V) \oplus S^2(\pi\mathfrak{g})$$

Seguiamo la scia dell'esempio dato dall'algebra di Lie. Chiamo  $\delta$  la mappa duale a  $\rho + [\cdot, \cdot]$ ,

$$\delta : (V \oplus \pi\mathfrak{g})^* \rightarrow S^2((V \oplus \pi\mathfrak{g})^*)$$

e la estendo a una derivazione di grado 1

$$\delta : \text{Fun}(V \oplus \pi\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Fun}(V \oplus \pi\mathfrak{g})$$

Riproducendo i ragionamenti del caso precedente si ottiene che anche questo  $\delta$  è un differenziale! Infatti per ogni  $\varphi \in (V \oplus \pi\mathfrak{g})^*$ ,

$$\langle \delta^2 \varphi | v_1 v_2 v_3 \rangle = \langle \varphi | 0 \rangle$$

$$\langle \delta^2 \varphi | g \otimes v_1 v_2 \rangle = \langle \varphi | 0 \rangle$$

$$\langle \delta^2 \varphi | (g_1 \wedge g_2) \otimes v \rangle = \langle \varphi | [g_1, g_2] \cdot v - g_1 \cdot (g_2 \cdot v) + g_2 \cdot (g_1 \cdot v) \rangle$$

$$\langle \delta^2 \varphi | g_1 \wedge g_2 \wedge g_3 \rangle = \langle \varphi | [[g_1, g_2], g_3] + [g_2, g_3], g_1 + [[g_3, g_1], g_2] \rangle$$

La condizione  $\delta^2 = 0$  equivale a richiedere che valga l'identità di Jacobi su  $\mathfrak{g}$  e che  $\rho$  sia una rappresentazione. La rappresentazione di una algebra di Lie  $(\mathfrak{g}, V, \rho, [ , ])$  può essere vista come un superspazio  $V \oplus \pi\mathfrak{g}$  dotato di un differenziale di grado 1,  $\delta : Fun(V \oplus \pi\mathfrak{g}) \rightarrow Fun(V \oplus \pi\mathfrak{g})$ .

L'espressione coordinata per  $\delta$  si calcola in maniera analoga a quanto fatto in precedenza, basta ricordare la decomposizione:  $S^2(V \oplus \pi\mathfrak{g}) \simeq S^2(V) \oplus (\pi\mathfrak{g} \otimes V) \oplus S^2(\pi\mathfrak{g})$ . Con notazione ovvia:

$$\begin{aligned} (\delta v^i)(e_{j_0} \cdot e_{k_0} + e_{j_1} \otimes \gamma_{k_1} + \gamma_{j_2} \wedge \gamma_{k_2}) &= \langle v^i | \rho(\gamma_{k_1})e_{j_1} + [\gamma_{j_2}, \gamma_{k_2}] \rangle \\ &= \rho_{j_1 k_1}^i = \langle \rho_{j_1 k_1}^i v^j c^k | e_{j_0} \cdot e_{k_0} + e_{j_1} \otimes \gamma_{k_1} + \gamma_{j_2} \wedge \gamma_{k_2} \rangle, \end{aligned}$$

dove i coefficienti  $\rho_{jk}^i$  sono le costanti di struttura di della rappresentazione  $\rho$ . Dalla precedente si deduce:

$$\delta v^i = \rho_{jk}^i v^j c^k$$

e visto che il calcolo per  $\delta c^i$  da lo stesso risultato ottenuto in precedenza, l'espressione coordinata per l'operatore  $\delta$  è:

$$\delta = \rho_{jk}^i v^j c^k \frac{\partial}{\partial v^i} + \frac{1}{2} f_{jk}^i c^j c^k \frac{\partial}{\partial c^i}$$

In una teoria di campo,  $V$  è spazio dei campi e  $\mathfrak{g}$  è l'algebra delle simmetrie infinitesime: in questo caso  $\delta$  è l'operatore BRST sulla cui interpretazione torneremo nelle prossime sezioni.

#### 1.1.4 Algebre di Batalin-Vilkovisky

Prima di addentrarci in quello che è il formalismo BV vero e proprio, esploriamo ancora per un attimo degli aspetti puramente algebrici legati ai superspazi. Incontriamo così la nozione di *algebra di BV*, che ovviamente gioca un ruolo fondamentale nella quantizzazione BV. Affrontando il grosso dell'apparato matematico fin dall'inizio, ci si può poi concentrare solo sulla necessità fisica di utilizzare un macchinario tanto elaborato.

Sia  $W$  un superspazio. Il superspazio  $W \oplus \pi W^*$  è dotato di un pairing canonico non degenere, al quale possiamo associare un operatore di laplace  $\Delta$ . Se  $x^i$  sono coordinate su  $W$  e  $x_i^\dagger$  sono le coordinate associate su  $\pi W^*$ , allora:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_i^\dagger} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

L'operatore  $\Delta$  è detto Laplaciano di Batalin-Vilkovisky. Si verifica facilmente sfruttando il fatto che le variabili coniugate hanno parità opposta che  $\Delta^2 = -\Delta^2$ , i.e.  $\Delta^2 = 0$ , cioè che il laplaciano di BV è un operatore di cobordo su  $Fun(W \oplus \pi W^*)$ .

Prendiamo ora due funzioni omogenee  $\Phi, \Psi$  in  $Fun(W \oplus \pi W^*)$ , armeggiando con i gradi si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi \Psi) &= \frac{\partial}{\partial x_i^+} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \Psi + (-1)^{(x^i + \Phi)x_i^+} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i^+} + (-1)^{x^i \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i^+} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \\ &\quad + (-1)^{(x^i + x_i^+) \Phi} \Phi \frac{\partial}{\partial x_i^+} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = \\ &= (\Delta \Phi) \Psi + (-1)^\Phi (\Phi, \Psi) + (-1)^\Phi \Phi \Delta \Psi \end{aligned}$$

Quindi il laplaciano BV non è una derivazione e la parentesi  $(\Phi, \Psi)$  misura proprio questo fallimento. Il *bracket di BV* è definito quindi da:

$$(\Phi, \Psi) = (-1)^{x_i^+ \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i^+} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - (-1)^{(\Phi+1)(\Psi+1)+x_i^+ \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i^+} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$$

Introducendo le derivate destre e sinistre, con l'unica accortezza di portare l'elemento su cui agiscono sul lato corretto tenendo conto delle regole di supercommutazione, il bracket assume una forma più semplice:

$$(\Phi, \Psi) = \Phi \left\langle \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_i^+} \right\rangle \Psi - \Phi \left\langle \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_i^+}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i} \right\rangle \Psi$$

Come abbiamo appena visto, il laplaciano BV non è un differenziale rispetto al prodotto di funzioni. Tuttavia lo è rispetto alla struttura di algebra data dalla parentesi BV:

$$\Delta(\Phi, \Psi) = (\Delta \Phi, \Psi) + (-1)^\Phi (\Phi, \Delta \Psi)$$

La parentesi BV gode di proprietà molto simili ad una parentesi di Poisson (antisimmetria, Liebniz e identità di Jacobi), l'unica differenza è data dal fatto che compaiono i gradi dei campi in maniera particolare. Infatti, trattando con dei superspazi, ci aspettiamo che le solite proprietà siano da intendere nel senso gradato, ma in questo caso compaiono i gradi delle funzioni aumentati di uno. È per questo che la struttura si dice *shiftata* o anche semplicemente dispari. Le tre proprietà sono le seguenti:

1.  $(\Phi, \Psi) = -(-1)^{(\Phi+1)(\Psi+1)} (\Psi, \Phi)$ ;
2.  $(\Phi, \Psi \Upsilon) = (\Phi, \Psi) \Upsilon + (-1)^{(\Phi+1)\Psi} \Psi (\Phi, \Upsilon)$ ;
3.  $(-1)^{(\Phi+1)(\Upsilon+1)} (\Phi, (\Psi, \Upsilon)) + \text{permutazioni cicliche} = 0$ ;

dove tutti i campi sono da intendersi omogenei e sono di fatto l'analogo dell'antisimmetria, della regola di Liebniz e dell'identità di Jacobi, tipiche delle strutture di Poisson.

I dati  $Fun(W \oplus \Pi W^*)$ ,  $\cdot$ ,  $\Delta$  e  $\{, \}$  sono un esempio di una *BV-algebra*. Più in generale, una algebra di BV è data da  $(\mathcal{A}, \cdot, \Delta, \{, \})$ , dove

1.  $\mathcal{A}$  è uno spazio gradato;
2.  $\cdot: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  è un prodotto associativo e commutativo nel senso gradato;
3.  $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  è un operatore di cobordo dispari, cioè cambia la parità agli elementi omogenei;
4.  $\{, \}: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  è un'operazione bilineare tale che

$$\Delta(\Phi \cdot \Psi) = (\Delta\Phi) \cdot \Psi + (-1)^\Phi \{\Phi, \Psi\} + (-1)^\Phi \Phi \cdot \Delta\Psi$$

e

$$\{\Phi, \Psi \cdot \Upsilon\} = \{\Phi, \Psi\} \Upsilon + (-1)^{(\Phi+1)\Psi} \Psi \{\Phi, \Upsilon\}$$

Le operazioni  $\cdot$ ,  $\Delta$  e  $\{, \}$  sono chiamate, con fantasia, rispettivamente, *prodotto*, *Laplaciano BV* e *parentesi di BV*. In particolare la parità di  $\{\Phi, \Psi\}$  è  $\deg \Phi + \deg \Psi + 1 \pmod{2}$ .

Discutiamo ora due utili proprietà, che utilizzeremo nel seguito. Considero una funzione  $f$  di un elemento  $\Phi$  dell'algebra di BV. Come al solito, non ci preoccupiamo di problemi di convergenza e quindi possiamo formalmente trattare l'espansione in serie di  $f$  come un'espressione polinomiale. Dimostriamo che valgono le due identità:

$$(f(\Phi), \Psi) = f'(\Phi) (\Phi, \Psi), \quad (1.3)$$

$$\Delta f(\Phi) = f'(\Phi) \Delta\Phi + \frac{1}{2} f''(\Phi) (\Phi, \Phi). \quad (1.4)$$

È sufficiente verificarle per la funzione  $f(\Phi) = \Phi^n$  e supporre che il grado di  $\Phi$  sia pari, altrimenti tutte le potenze superiori alla prima si annullano e le equazioni diventano banali. Si procede per induzione, osservando che entrambe sono banali per  $n = 1$ .

La prima segue dalla proprietà di Liebniz dell'antibracket:

$$\begin{aligned} (\Phi^n, \Psi) &= (\Phi \cdot \Phi^{n-1}, \Psi) = \Phi (\Phi^{n-1}, \Psi) + (\Phi, \Psi) \Phi^{n-1} = \\ &= (n-1) \Phi \cdot \Phi^{n-2} (\Phi, \Psi) + \Phi^{n-1} (\Phi, \Psi) = n \Phi^{n-1} (\Phi, \Psi). \end{aligned}$$

La seconda ci dice sostanzialmente che il laplaciano BV è un operatore di derivazione del secondo ordine e si dimostra allo stesso modo utilizzando la regola di Liebniz modificata dalla parentesi BV.

## 1.2 Tecnologia BV

Nella sezione precedente sono state gettate le basi matematiche necessarie per affrontare i formalismi BRST e BV: come accennato, entrambe queste

tecniche sono necessarie quando l'azione è dotata di un certe simmetrie descritte da un gruppo di Lie. Come vedremo un poco più in dettaglio, questo fatto si traduce in una libertà che deve essere eliminata attraverso una scelta arbitraria, il *gauge fixing*: la procedura standard per effettuare questa scelta è la *procedura di Faddeev-Popov*. È a questo punto che entrano in gioco le tecniche BRST o BV: sono gli strumenti utilizzati per mostrare che i valori di aspettazione ottenuti a partire da un'azione con gauge fixing arbitrario sono di fatto indipendenti da tale scelta. In entrambi i casi le buone osservabili, cioè quelle che forniscono valori di aspettazione indipendenti dal gauge fixing, saranno descritte come classi nella coomologia degli operatori  $\delta_{BRST}$  e  $\Delta_{BV}$ . In particolare, nel formalismo BV, questa richiesta per l'esponenziale dell'azione si traduce nella *master equation*.

Finora abbiamo lavorato con superspazi finito-dimensionali, ma in una teoria di campo le varietà da considerare sono ovviamente infinito dimensionali. In sostanza il cambiamento può essere ridotto al considerare derivate funzionali piuttosto che derivate ordinarie. Tuttavia le derivate funzionali seconde, che compaiono ad esempio nella definizione del Laplaciano BV, non sono in genere ben definite.

Un'altra differenza importante rispetto all'algebra sviluppata finora è che nella quantizzazione di teorie di campo considerare gradazioni  $\mathbb{Z}_2$  non è sufficiente, ma è necessario lavorare più generalmente con una  $\mathbb{Z}$ -gradazione. Anche in questo caso, non ci sono differenze nelle formule sviluppate, se non che la somma dei gradi non deve più essere intesa modulo 2.

### 1.2.1 Faddeev-Popov, BRST e necessità del formalismo BV

Consideriamo lo spazio infinito dimensionale  $\mathcal{M}$  sul quale agisce liberamente il gruppo di gauge compatto  $\mathcal{G}$ , entrambi dotati di una misura, e in particolare assumiamo che la misura su  $\mathcal{M}$  sia compatibile con l'azione di  $\mathcal{G}$ .

Una funzione invariante  $f$  su  $\mathcal{M}$ , cioè una buona osservabile, è il pullback di una funzione  $\underline{f}$  su  $\mathcal{M}/\mathcal{G}$  e:

$$I := \frac{\int_{\mathcal{M}} f \mu}{\text{vol}(\mathcal{G})} = \int_{\mathcal{M}/\mathcal{G}} \underline{f} \mu.$$

Abbiamo ridotto l'integrale su  $\mathcal{M}$  ad un'integrazione sulla base del fibrato  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{G}$ . Se esiste una sezione di  $\pi$  possiamo esprimere  $I$  come integrale sull'immagine di questa sezione: è questo cambio di dominio di integrazione che permette di risolvere i problemi legati alla degenerazione del funzionale dell'azione. Un modo conveniente di descrivere questa sezione è attraverso il luogo degli zeri di un funzionale  $F$  definito su  $\mathcal{M}$  a valori in uno spazio vettoriale, generalmente viene scelta l'algebra di Lie  $\Gamma$  di  $\mathcal{G}$ .<sup>2</sup> La condizione

<sup>2</sup>In generale non è necessario che  $F$  sia definita su tutto  $\mathcal{M}$  ma è sufficiente che lo sia su un sottovarietà del fibrato  $\pi$  che si proietti suriettivamente sulla base.

$F = 0$  è la condizione di gauge fixing! Per ogni  $\phi$  in  $\mathcal{M}$  chiamo  $A(\phi)$  la restrizione di  $dF(\phi)$  allo spazio tangente verticale in  $\phi$ . Identificandolo con  $\Gamma$  segue che  $A(\phi) : \Gamma \rightarrow \Gamma$  è un suo endomorfismo, il cui determinante è detto di Faddeev-Popov e riguardando questa procedura come un cambio di variabile compare nell'integrale come determinante dello Jacobiano. Con queste notazioni abbiamo:

$$I = \int_{\mathcal{M}} f \delta_0(F) \det A(\phi) \mu$$

dove  $\delta_0$  è la delta di Dirac in  $0 \in \Gamma$ . cerchiamo ora di riscrivere  $I$  in una forma che sia idonea all'utilizzo di uno sviluppo perturbativo, cioè mettiamo anche i fattori  $\delta_0(F)$  e  $\det A(\phi)$  in forma esponenziale. Utilizziamo la trasformata di Fourier dell'esponenziale e l'integrazione bereziniana [44]:

$$I = C \int_{\mathcal{M} \times \Gamma^* \times \pi\Gamma \times \pi\Gamma^*} f(\phi) \mu e^{\langle \lambda, F(\phi) \rangle} \omega(\lambda) e^{-\langle \bar{c}, A(\phi)c \rangle},$$

con  $\lambda \in \Gamma^*$ ,  $c \in \pi\Gamma$  e  $\bar{c} \in \pi\Gamma^*$ . Inoltre  $C$  è una costante che dipende dalla scelta della forma  $\omega \in \bigwedge^{top} \Gamma^*$ . I nomi standard introdotti per i campi  $c$ ,  $\bar{c}$  e  $\lambda$  sono rispettivamente *ghost*, *antighost* e *moltiplicatore di Lagrange*. Per tutti i calcoli, sono importanti le algebre delle funzioni definite sugli spazi di questi campi. Abbiamo quindi l'algebra  $\bigwedge \Gamma^*$  delle funzioni su  $\pi\Gamma$  generata da un base  $\{c^i\} \subset \Gamma^*$  con le regole di anticommutazione. I generatori  $c^i \in \Gamma^*$  sono detti *variabili ghost*; allo stesso modo i generatori  $\bar{c}_i \in \Gamma$  con le regole di anticommutazione sono detti *variabili antighost*.

Siamo ora in grado di scrivere il valore di aspettazione di una funzione invariante  $g$  rispetto ad una azione invariante  $S$  come:

$$\langle g \rangle = \frac{\int_{\mathcal{M}} e^S g \mu}{\int_{\mathcal{M}} e^S \mu} = \frac{\int_{\tilde{\mathcal{M}}} e^{S_F} g \tilde{\mu}}{\int_{\tilde{\mathcal{M}}} e^{S_F} \tilde{\mu}} \quad (1.5)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}} &= \mathcal{M} \times \Gamma^* \times \pi\Gamma \times \pi\Gamma^* \\ S_F &= S + \langle \lambda, F \rangle - \langle \bar{c}, Ac \rangle \\ \tilde{\mu} &= \mu \omega. \end{aligned}$$

La funzione  $S_F$  è detta azione gauge fixed: per poter effettuare lo sviluppo perturbativo è necessario trovare un gauge fixing  $F$  che renda non degenerare la parte quadratica di  $S_F$ .

Per costruzione, è chiaro che la parte destra di (1.5) è indipendente da  $F$ . Le assunzioni che abbiamo fatto per dedurre quella relazione erano piuttosto restrittive (fibrato triviale, gruppo compatto e azione compatibile



con la misura su  $\mathcal{M}$ ) ma per definire la (1.5) basta l'azione infinitesima dell'algebra di Lie  $\Gamma$  su  $\mathcal{M}$ , data da:

$$\begin{aligned} X : \Gamma &\rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ c &\mapsto X_c \end{aligned}$$

In questo ambiente di lavoro,  $A$  è definito da  $A_c = L_{X_c} F$ . Con queste condizioni più lasche, l'indipendenza di (1.5) dal gauge fixing  $F$  non è più garantita, e quello che ci proponiamo è di sviluppare una teoria algebrica che ci permetta di stabilire quando i valori di aspettazione sono indipendenti dalla scelta arbitraria di  $F$ .

Introduciamo  $\delta$ , l'operatore BRST sull'algebra gradata generata dai campi  $\{\phi, \lambda, c, \bar{c}\}$ , definito da:

$$\delta\phi = X_c(\phi), \quad \delta c = -\frac{1}{2}[c, c], \quad \delta\bar{c} = i\lambda, \quad \delta\lambda = 0.$$

Le definizioni si capiscono pensando all'operatore  $\delta$  della sezione precedente e l'estensione ai campi  $\bar{c}$  e  $\lambda$  garantisce che anche in questo spazio esteso  $\delta$  sia un differenziale. Ai campi  $\{\phi, \lambda, c, \bar{c}\}$  è assegnata una gradazione, che chiamiamo ghost number:

$$\text{gh } \phi = 0, \quad \text{gh } \lambda = 0, \quad \text{gh } c = 1, \quad \text{gh } \bar{c} = -1$$

Osserviamo che con questa gradazione, l'operatore BRST  $\delta$  ha grado uno. L'azione gauge fixed ha ghost number zero e può essere scritta in maniera compatta introducendo il funzionale  $\Psi_F$ , detto fermione di gauge, dato da:

$$\Psi(\phi, \bar{c}) := \langle \bar{c}, F(\phi) \rangle$$

di ghost number -1. Con queste notazioni vale:

$$S_F(\phi, \lambda, \bar{c}, c) = S(\phi) + \delta\Psi(\phi, \bar{c}).$$

Il seguente teorema fornisce delle condizioni sufficienti affinché il valore di aspettazione  $\langle g \rangle$  sia indipendente dal gauge fixing:

**Teorema 1.2.1.** *Sia  $g$  una funzione su  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Se  $\delta g = 0$  e la divergenza di  $\delta$  è nulla, allora*

$$I_F := \int_{\tilde{\mathcal{M}}} e^{S_F} g \tilde{\mu}$$

*è localmente indipendente dal gauge fixing  $F$ .*

*Dimostrazione.* Assumiamo ovviamente che l'azione  $S$  sia gauge invariante. Sia  $F_t$  una curva di funzioni di gauge fixing. Allora:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_{F_t} &= \int_{\tilde{\mathcal{M}}} \delta\left(\frac{d}{dt}\Psi_{F_t}\right) e^{S_F} g \tilde{\mu} = \int_{\tilde{\mathcal{M}}} \delta\left(\frac{d}{dt}\Psi_{F_t} e^{S_F} g\right) \tilde{\mu} = \\ &= \int_{\tilde{\mathcal{M}}} (\text{div } \delta)\left(\frac{d}{dt}\Psi_{F_t} e^{S_F} g\right) \tilde{\mu} = 0 \end{aligned}$$

Quindi  $I_F$  è localmente indipendente da  $F$ .  $\square$

Si vede immediatamente che se  $g$  è  $\delta$ -esatta allora il suo valore di aspettazione è nullo: quindi le buone osservabili per una teoria di gauge alla quale si può applicare il formalismo BRST sono classi di coomologia del differenziale BRST  $\delta$ . Poichè l'integrale di Berezin è nullo su funzioni di grado diverso da zero, concludiamo che la coomologia rilevante è quella di grado zero.

A quanto pare sembra che il formalismo BRST risolva tutti i nostri problemi: dopo il gauge fixing effettuato tramite la procedura di Faddeev-Popov, esso ci permette di stabilire facilmente quando una funzione sullo spazio dei campi è una buona osservabile. La proprietà cruciale è che  $\delta$  sia un differenziale e nel caso di algebre di Lie unimodulari ( $\text{tr Ad } \xi = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}$ ) questo è sempre vero. Quando la distribuzione delle simmetrie non è data dall'azione di un'algebra di Lie, l'operatore BRST non è in genere un differenziale e il formalismo BV diviene indispensabile. Un esempio tipico è quello di teorie di gauge non lineari, per esempio nel Poisson Sigma Model.

### 1.2.2 Coomologie del Formalismo BV

Il punto di partenza per applicare il formalismo BV ad una teoria di campo è quello di costruire un algebra di BV a partire dallo spazio  $\tilde{\mathcal{M}}$  (ometteremo la tilde per brevità) dei campi  $\{\phi^\alpha\}$ , dove con  $\{\phi^\alpha\}$  indica l'insieme dei campi  $\{\phi, \lambda, c, \bar{c}\}$ : in particolare sarà realizzata come algebra delle funzioni su un qualche spazio. Visto che per un superspazio  $W$ , si può identificare  $W \oplus \pi W^* = \pi T^*W$ , costruiamo lo spazio delle fasi di  $\mathcal{M}$  introducendo gli *anticampi*  $\{\phi_\alpha^+\}$  come variabili coniugate dei campi  $\{\phi^\alpha\}$ , aventi grado ghost opposto shiftato di uno:

$$\text{gh } \phi_\alpha^+ := -\text{gh } \phi^\alpha - 1$$

Le funzioni coordinate  $\{\phi^\alpha, \phi_\alpha^+\}$  sono dunque i generatori dell'algebra BV delle funzioni di  $\pi T^*\mathcal{M}$ . Il bracket di BV, detto anche *antibracket*, si definisce utilizzando la struttura simplettica nel seguente modo:

$$(X, Y) := X \left\langle \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\alpha}, \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi_\alpha^+} \right\rangle Y - X \left\langle \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi_\alpha^+}, \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi^\alpha} \right\rangle Y$$

Dove  $X$  e  $Y$  sono dei funzionali dei campi e degli anticampi. Il laplaciano BV è invece definito dalla seguente relazione:

$$\Delta X := (-)^{\phi_\alpha^+} \left\langle \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi^\alpha}, \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi_\alpha^+} \right\rangle X.$$

Oltre alle proprietà già viste nel paragrafo 1.1.4, facciamo una semplice osservazione particolarmente utile nel contesto delle teorie di campo. Se  $X$

è un funzionale bosonico (cioè di grado pari), allora vale:

$$(X, X) = 2X \left\langle \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\alpha}, \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi_\alpha^+} \right\rangle X = -2X \left\langle \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi_\alpha^+}, \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi^\alpha} \right\rangle X,$$

se invece  $X$  è fermionico, la parentesi di BV con se stesso è nulla. Queste due proprietà seguono immediatamente dalla regola di anticommutazione gradata e shiftata per il bracket BV.

Le proprietà dell'antibracket e del laplaciano permettono di definire diversi operatori di cobordo, sarebbe a dire operatori nilpotenti di ghost number uno. Il primo operatore di cobordo è ovviamente il laplaciano stesso, che abbiamo visto soddisfare  $\Delta^2 = 0$ . In generale, grazie alla (o meglio, per colpa di) (1.4) una funzione di un funzionale  $\Delta$ -chiuso non è delta chiusa e la parentesi di BV è di nuovo una misura di questo fallimento. Indichiamo la coomologia del laplaciano con  $H^*(\pi T^*\mathcal{M}, \Delta)$ .

Il secondo operatore di cobordo interessante è definito da:

$$\Omega X := (X, S_{\text{BV}}) - \Delta X$$

dove  $S_{\text{BV}}$  è un funzionale bosonico che soddisfa la *quantum master equation*

$$(S_{\text{BV}}, S_{\text{BV}}) - 2\Delta S_{\text{BV}} = 0 \quad (1.6)$$

Il funzionale  $S_{\text{BV}}$  è detto anche *azione quantistica* o *azione BV*. La nilpotenza di  $\Omega$  segue dalle proprietà del bracket BV e dalla quantum master equation:

$$\begin{aligned} \Omega^2 X &= \Omega((X, S_{\text{BV}}) - \Delta X) = \\ &= ((X, S_{\text{BV}}), S_{\text{BV}}) - \Delta^2 X - \Delta(X, S_{\text{BV}}) - (\Delta X, S_{\text{BV}}) = \\ &= \frac{1}{2}(X, (S_{\text{BV}}, S_{\text{BV}})) - (X, S_{\text{BV}}) = \\ &= \frac{1}{2}(X, (S_{\text{BV}}, S_{\text{BV}}) - 2\Delta S_{\text{BV}}) = 0. \end{aligned}$$

Anche in questo caso, una funzione di un funzionale  $\Omega$ -chiuso non è in generale  $\Omega$ -chiusa. Indichiamo questa coomologia con  $H^*(\pi T^*\mathcal{M}, \Omega)$ .

Si vede facilmente che:

$$H^*(\pi T^*\mathcal{M}, \Omega) \simeq H^*(\pi T^*\mathcal{M}, \Delta)$$

Per vedere perchè questo è vero, consideriamo  $W = e_{\text{BV}}^S$ . La master equation implica che  $W$  è  $\Delta$ -chiuso e utilizzando questa proprietà si dimostra in maniera diretta che

$$\Delta(WX) = W\Omega X$$

In altre parole  $W$  realizza un isomorfismo di complessi visto che che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Omega} & \Omega X \\ W \downarrow & & \downarrow W \\ WX & \xrightarrow{\Delta} & \Delta(WX) \end{array}$$

segue quindi che le coomologie dei due complessi sono isomorfe.

La forma di  $W$  e il nome suggestivo che abbiamo già dato alla  $S_{\text{BV}}$ , suggeriscono di riscaldare  $S_{\text{BV}} \mapsto S_{\text{BV}}/i\hbar$  e  $\Omega \mapsto \Omega/i\hbar$ . La quantum master equation diviene:

$$(S_{\text{BV}}, S_{\text{BV}}) - 2i\hbar\Delta S_{\text{BV}} = 0$$

e attraverso una soluzione perturbativa si può scrivere:

$$S_{\text{BV}} = S + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n S_n,$$

prendendo il limite  $\hbar \rightarrow 0$ , otteniamo l'azione  $S$ . Questo funzionale bosonico ci permette di introdurre il terzo operatore di cobordo:

$$\sigma X := (X, S)$$

La peculiarità di questa definizione è che l'azione soddisfa la *master equation*:

$$(S, S) = 0$$

Essendo  $S$  un funzionale bosonico, il contenuto di questa equazione non è banale. La nilpotenza di questo operatore si ottiene immediatamente sfruttando l'identità di Jacobi shiftata per il bracket BV e ricordando che  $S$  soddisfa la master equation. Questa volta, una funzione di funzionale  $\sigma$ -chiuso è ancora  $\sigma$ -chiusa, infatti dalla (1.3) segue che:

$$\sigma f(X) = f'(X)\sigma X$$

Un azione quantistica  $S_{\text{BV}}$  ha ovviamente sempre un limite  $S$ , il viceversa però non è in generale vero, cioè non è detto che per una data azione  $S$ , esista un estensione quantistica.

Andiamo alla ricerca dell'azione classica espandendo l'azione  $S$  in serie di potenze negli anticampi, l'integrazione sullo spazio tempo è sottointesa:

$$S(\phi, \phi^+) = S_{\text{cl}}(\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \phi_{\alpha_1}^+ \dots \phi_{\alpha_n}^+ S^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\phi).$$

I campi  $\varphi$  sono i *campi fisici* e sono un sottoinsieme dei  $\phi$  da cui  $S_{\text{cl}}$  risulta dipendere. Ora, la master equation, attraverso questa espansione, fornisce un set di equazioni, eventualmente infinito.

$$0 = (S, S) = 2S \left\langle \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\alpha}, \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi_\alpha^+} \right\rangle S$$

Al primo ordine otteniamo:

$$S_{\text{cl}} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^i} S^i = 0 \quad (1.7)$$

dove l'indice  $i$  corre solo sui campi fisici. Questa equazione descrive le simmetrie dell'azione classica, è semplicemente infatti l'azione di un campo vettoriale con componenti  $S^i$  su  $S_{\text{cl}}$ . Si noti come  $S^i$  sia parametrizzata dai campi  $\Phi$  che non sono fisici, sarebbe a dire i ghost. Questo è un modo alternativo per vedere che i ghost parametrizzano le simmetrie dell'azione.

Al secondo ordine invece otteniamo:

$$S^j \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\alpha} S^\alpha + S_{\text{cl}} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^i} S^{ji} = 0. \quad (1.8)$$

Se  $S$  è al più lineare negli anticampi, allora le funzioni  $S^\alpha$  e le due equazioni precedenti sono le uniche che caratterizzano l'algebra delle simmetrie, che in questo caso è detta *chiusa*.

Siamo arrivati finalmente all'ultimo operatore di cobordo: riscopriamo l'operatore BRST. Esso si ottiene restringendo  $\sigma$  allo spazio delle configurazioni, cioè  $\mathcal{M}$ :

$$\delta X := (\sigma X)|_{\phi^+ = 0}, \quad (1.9)$$

dove  $X$  è un funzionale che non dipende dagli anticampi. Prima valutiamo  $\sigma$  e poi annulliamo gli anticampi. Dalle (1.7) e (1.8) si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \delta X &= X \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\alpha} S^\alpha \\ \delta^2 X &= X \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^\alpha} \left( S_{\text{cl}} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^j} \right) S^{ij} \end{aligned}$$

Quindi l'operatore BRST non è nilpotente in generale, ma lo è solo *on shell*, i.e. per campi che soddisfano l'equazione del moto:

$$S_{\text{cl}} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^i} = 0$$

Indichiamo la coomologia BRST con  $H^*(\mathcal{M}_0, \delta)$ , il pedice sta ad indicare la restrizione all'insieme dei campi che soddisfano le equazioni del moto. Nel

caso di un'algebra chiusa l'operatore BRST è un differenziale su tutto lo spazio dei campi  $\mathcal{M}$ .

Riassumiamo quanto ottenuto finora. Abbiamo costruito 3 operatori di cobordo ( $\Delta$ ,  $\Omega$  e  $\sigma$ ) sullo spazio delle fasi  $\pi T^*\mathcal{M}$  e uno ( $\delta$ ) sullo spazio delle configurazioni modulo soluzioni equazioni del moto  $\mathcal{M}_0$ . La coomologia di  $\Delta$  e  $\Omega$  sono risultate essere isomorfe, inoltre la  $\sigma$ -coomologia è indotta da quella di  $\Omega$ . Con poco sforzo si può anche mostrare ulteriormente che la  $\sigma$ -coomologia si proietta sulla  $\delta$ -coomologia on shell. Riassumendo con un diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H^*(\pi T^*\mathcal{M}, \Delta) \simeq H^*(\pi T^*\mathcal{M}, \Omega) & \xrightarrow{\text{induce}} & H^*(\pi T^*\mathcal{M}, \sigma) \\ & & \downarrow \text{proietta} \\ & & H^*(\mathcal{M}_0, \delta) \end{array}$$

Da questo diagramma si intuisce come il formalismo BV sia più potente di quello BRST non solo perchè permette di lavorare con algebre aperte, ma anche di considerare osservabili più generali, date da funzionali che sono  $\delta$ -chiusi solo on shell. Questa affermazione sarà più chiara dopo che nel prossimo paragrafo avremo enunciato il teorema fondamentale del formalismo BV, quello che permette di definire le osservabili e il loro sviluppo perturbativo. Resterà un problema irrisolto: solitamente si ha a disposizione come punto di partenza l'azione classica  $S_{\text{cl}}$  e non quella quantistica  $S_{\text{BV}}$  che permette di definire la  $\Omega$ -coomologia. Il primo passo è quindi di estendere  $S_{\text{cl}}$  a  $S$  che soddisfa la master equation e definire una  $\sigma$ -coomologia. Il successivo è di nuovo un'estensione, questa volta di  $S$  ad una azione quantistica  $S_{\text{BV}}$  che soddisfa la quantum master equation. Questo ultimo passaggio non è sempre possibile, e quando questo accade si dice che la teoria è anomala.

### 1.2.3 Significato della master equation e quantizzazione BV

Finalmente siamo arrivati al punto di presentare i risultati del formalismo BV, per la precisione come viene affrontata e riformulata l'integrazione sullo spazio delle configurazioni  $\mathcal{M}$ . Gli argomenti sviluppati sono solo formali in quanto coinvolgono, a meno che si stia lavorando con modelli finito dimensionali, un'integrazione funzionale. Inoltre, in generale, è necessario prendere in considerazione uno schema di rinormalizzazione per ottenere risposte finite da espansioni solitamente divergenti.

Il trucco di Faddeev-Popov consiste nel *cambiare il dominio di integrazione* dalla base del fibrato  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{G}$  ad una sua sezione ed è analogo a quello utilizzato nel formalismo BV: l'integrazione ora viene spostata da  $\mathcal{M}$  a una sottovarietà lagrangiana di  $\pi T^*\mathcal{M}$  che deforma la sezione nulla. Ricordiamo in particolare che per queste sottovarietà è ben definita una forma di volume.

Innanzitutto osserviamo che gli *anticampi* sono delle variabili artificiali e devono quindi essere in qualche modo eliminati prima dell'integrazione funzionale: questo viene effettuato generalizzando il concetto di fermione di gauge. Si prende una funzione  $F$  definita su  $\mathcal{M}$  di ghost number  $-1$  e si impone:

$$\phi_\alpha^+ := \frac{\partial F}{\partial \phi^\alpha}$$

Ma questo è il metodo classico della geometria simplettica per definire una sezione lagrangiana  $\mathcal{L}_F$ ! Visto che  $\pi T^*\mathcal{M}$  è una varietà simplettica (odd), abbiamo a disposizione il formalismo delle trasformazioni canoniche, che preservano sia il bracket che il laplaciano BV. La particolare trasformazione canonica generata da:

$$G(\phi, \tilde{\phi}^+) = F(\phi) + \langle \phi, \phi^+ \rangle$$

Manda la sottovarietà lagrangiana  $\mathcal{L}_F$  nella base  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{L}_0$ . Per trasformazioni canoniche generate da funzioni della forma di  $G$ , lo jacobiano è uguale ad uno e quindi la forma di volume  $\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^+$  è preservata, quindi:

$$\int_{\mathcal{L}_F} X = \int_{\mathcal{L}_0} \tilde{X}_F$$

dove il funzionale trasformato è dato da:

$$\tilde{X}_F(\tilde{\phi}, \tilde{\phi}^+ = 0) = X(\tilde{\phi}, \tilde{\phi}^+ + \frac{\delta}{\delta \phi} F) = X(\phi, \phi^+)$$

Ora supponiamo che  $\tilde{X}_F$  sia  $\Delta$ -esatto. Ma allora:

$$\int_{\mathcal{L}_0} \tilde{X}_F = 0$$

Infatti, esiste  $f(\phi, \phi^+)$  tale che  $\Delta f = \tilde{X}_F$ , inoltre  $f$  deve essere al più lineare negli anticampi in quanto  $\tilde{X}_F$  è indipendente da essi. Quindi se

$$f(\phi, \phi^+) = \phi^+ a(\phi) + b(\phi)$$

segue:

$$\int_{\mathcal{L}_0} \tilde{X}_F = \int_{\partial \mathcal{L}_0} a(\phi)$$

ma la sottovarietà lagrangiana non ha bordo e quindi l'integrale è nullo. Visto che il laplaciano è conservato sotto trasformazioni canoniche, abbiamo appena dimostrato il seguente teorema:

**Teorema 1.2.2.** *Se il funzionale  $X$  è  $\Delta$ -esatto, allora:*

$$\int_{\mathcal{L}_F} \tilde{X} = 0$$

per ogni fermione di gauge  $F$ .

Un'altra identità che si può dimostrare molto facilmente su  $\mathcal{L}_0$  e poi estendere a ogni sottovarietà lagrangiana è la seguente:

$$\delta_F \int_{\mathcal{L}_F} X = - \int_{\mathcal{L}_F} (X, \delta F)$$

dove  $\delta_F$  è l'operatore che effettua la variazione del fermione di gauge  $F$ . Ora, sfruttando la proprietà di Leibniz modificata del laplaciano BV, il fatto che l'antibracket è conservato dalle trasformazioni canoniche e il teorema 1.2.2 si ottiene il seguente:

**Lemma 1.2.3.** *Sia  $X$  un funzionale dei campi e degli anticampi, allora sotto variazioni infinitesime  $F \mapsto F + \delta F$  vale:*

$$\delta_F \int_{\mathcal{L}_F} X = \int_{\mathcal{L}_F} \Delta X \delta F.$$

Da questo lemma segue il teorema fondamentale:

**Teorema 1.2.4.** *Se  $X$  è  $\Delta$ -chiuso, allora*

$$\int_{\mathcal{L}_F} X$$

*è invariante sotto trasformazioni infinitesime del fermione di gauge fixing.*

Questi due teoremi sono fondamentali, affermano in sostanza che le buone osservabili sono le classi di coomologia relative all'operatore  $\Delta$ .

Cerchiamo ora di scoprire cos'è la quantum master equation con uno sguardo più fisico. Gli integrandi che siamo portati a considerare sono del tipo:

$$X = \mathcal{O} e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

Supponiamo per ora  $\mathcal{O} = 1$ . La richiesta di  $\Delta$ -chiusura si traduce in :

$$0 = \Delta e^{\frac{i}{\hbar} S} = \Delta \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iS)^n}{\hbar^n n!} \right) = \left( \frac{i}{\hbar} \Delta S - \frac{1}{2\hbar^2} \{S, S\} \right) e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

quindi la condizione  $\Delta e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0$  è equivalente a richiedere che  $S$  sia in realtà una azione quantistica (un funzionale che abbiamo indicato con  $S_{\text{BV}}$ ), i.e. un funzionale bosonico che soddisfa la *quantum master equation*:

$$(S, S) - 2i\hbar \Delta S = 0$$

Assumiamo dunque che  $S$  soddisfi la quantum master equation e preoccupiamoci di integrandi che coinvolgono osservabili  $\mathcal{O}$  non banali. Per applicare il formalismo BV vogliamo sempre la  $\Delta$ -chiusura:

$$\Delta \left( \mathcal{O} e^{\frac{i}{\hbar} S} \right) = 0$$



che è equivalente a:

$$\Delta\Psi + \frac{i}{\hbar}\{S, \Psi\} = 0$$

cioè l'osservabile  $\mathcal{O}$  deve essere  $\Omega$ -chiuso! Si ottiene facilmente che per osservabili  $\Omega$ -esatti il valore di aspettazione è nullo. In conclusione, un valore di aspettazione è un funzionale lineare definito sulla coomologia  $\Omega$  di  $Fun(\pi T^*\mathcal{M})$ ; le classi  $\Omega$ -coomologia sono le *osservabili* della teoria.



## Capitolo 2

# $P\sigma M$ e Quantizzazione per Deformazione

Uno degli ambiti più delicati e fondamentali della Fisica è quello della *quantizzazione*. Con questo termine si designa una prescrizione che permette di convertire la descrizione di un sistema classico in un una in cui compare il fenomeno della quantizzazione, nella quale le grandezze fisiche non possono in generale avere un intervallo di variabilità continuo. Questa necessità, inizialmente dettata dalle evidenze sperimentali, è divenuta un'esigenza imprescindibile per tutte le teorie che hanno pretesa di dichiararsi fondamentali.

Una natura quantistica non richiede che esista un processo di quantizzazione. Se fossimo in grado di *scrivere* l'equazione che governa un sistema quantistico in maniera diretta, come Newton ha fatto con la meccanica classica, non avremmo alcuna necessità di occuparci di questo problema. E' questa incapacità di modellare direttamente un sistema quantistico che fa della quantizzazione uno strumento *fondamentale* della fisica.

Sono state sviluppate diverse tecniche per effettuare questa transizione (quantizzazione canonica, costruttiva e funzionale, per citare quelle più usate in teoria dei campi) tutte caratterizzate da alcune difficoltà che si sono verificate trascurabili — entro alcuni termini — per quanto riguarda lo sviluppo tecnico delle teorie (i.e. la capacità di fornire previsioni da confrontare con l'esperimento), ma ancora irrisolte dal punto di vista di una loro piena giustificazione che non sia puramente pragmatica. Queste difficoltà si incarnano nella presenza di scelte arbitrarie o nel ricorso a strumenti matematici non propriamente definiti (l'integrale di cammino).

La definizione di un sistema fisico viene fatta attraverso le *osservabili*, cioè le grandezze fisiche che possiamo misurare per definire lo stato del sistema. Queste non sono altro che un insieme di funzioni sullo spazio degli stati. Nella meccanica *classica* l'insieme di tutti gli stati costituisce una varietà di Poisson (lo spazio delle fasi, che più precisamente è simplettico),

e le osservabili formano l'algebra commutativa delle funzioni  $C^\infty(M)$ . Nella meccanica *quantistica* lo spazio degli stati si struttura come spazio di Hilbert e le osservabili sono gli operatori autoaggiunti, costituenti una *algebra non commutativa*. Possiamo riformulare una parte del problema della quantizzazione come quello di trasformare un'algebra commutativa (osservabili classiche) in una non commutativa (osservabili quantistiche).

Il passaggio da una varietà di Poisson ad uno spazio di Hilbert è piuttosto imponente e, nonostante la meccanica classica sia una teoria essenzialmente geometrica, questa transizione non lo è. L'idea della *deformation quantization* è quella di evitare un cambiamento così radicale e di trovare una *deformazione*, parametrizzata da  $\hbar$ , del prodotto dell'algebra delle osservabili classiche in modo tale da ottenere uno *star prodotto*, una struttura di algebra non commutativa. Questa idea può essere ricondotta nella sua prima apparizione a Dirac, che ha per primo sottolineato come la quantizzazione poteva essere vista come l'introduzione di un nuovo prodotto sull'algebra di una varietà di Poisson:

$$f \star g$$

tale che il commutatore

$$[f, g] = f \star g - g \star f$$

è proporzionale a  $\{f, g\}$  al primo ordine in  $\hbar$ .

Si deve a Konsevich [28] l'aver risolto il problema della deformation quantization — come formulato in [4] — di una varietà di Poisson, dando una formula esplicita per lo star prodotto come somma i cui termini sono identificati da certi grafi. Questa rappresentazione grafica per i contributi della formula ha da subito fatto pensare ad una analogia con le tecniche diagrammatiche utilizzate in teoria dei campi, i diagrammi di Feynman. A. Cattaneo e G. Felder [7] hanno mostrato che lo star prodotto può essere ottenuto dalla quantizzazione funzionale del Poisson Sigma Model e che i termini dello sviluppo perturbativo corrispondono esattamente a quelli della formula di Konsevich.

## 2.1 Deformation Quantization

Iniziamo a definire con precisione cosa si intende per deformazione di un prodotto. In matematica, una deformazione di un oggetto è una famiglia di oggetti dipendenti da un parametro, diciamo  $\hbar$ .

**Definizione 2.1.1.** *Sia  $Y$  un oggetto in una categoria  $\mathcal{Y}$ . Una deformazione di  $Y$  è una famiglia  $Y_\hbar \in \text{Obj}(\mathcal{Y})$  dipendente da un parametro  $\hbar$  tale che  $Y_0 = Y$ .*

Consideriamo un algebra di funzioni  $A$ , che per i nostri scopi sarà sempre intesa come algebra di Poisson. Quello che vogliamo definire è qualcosa del tipo:

$$\begin{aligned} \times_{\hbar} : A \times A &\rightarrow A \\ (f, g) &\mapsto f \times_{\hbar} g \end{aligned}$$

dove  $\times_0$  è il prodotto associativo definito su  $A$ . La richiesta forte di dipendenza liscia dal parametro può essere indebolita chiedendo che  $\times_{\hbar}$  sia esprimibile come serie di potenze non necessariamente convergente in  $\hbar$ . In particolare, consideriamo serie di potenze formali, così da non doverci preoccupare di questioni di convergenza. In queste nuove ipotesi dobbiamo cambiare il codominio dell'operatore di algebra in  $A[[\hbar]]$ , anello dei polinomi in  $\hbar$  a coefficienti in  $A$ :

$$\times_{\hbar} : A \times A \rightarrow A[[\hbar]]$$

In questo modo però non abbiamo più un'algebra. Estendiamo il prodotto per  $\mathbb{C}[[\hbar]]$  linearità e otteniamo finalmente un'algebra:

$$\star : A[[\hbar]] \times A[[\hbar]] \rightarrow A[[\hbar]]$$

Il cambio di simbolo non è accidentale, ma sta ad indicare il fatto che il parametro  $\hbar$  è stato promosso a variabile. Possiamo definire ora cosa sia uno star prodotto.

**Definizione 2.1.2.** *Uno star prodotto in  $A$  è un prodotto associativo,  $\mathbb{C}[[\hbar]]$  bilineare*

$$\star : A[[\hbar]] \times A[[\hbar]] \rightarrow A[[\hbar]]$$

tale che per  $f, g \in A$  valgono:

$$\begin{aligned} f \star g &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(f, g) \hbar^n \\ f \star g |_{\hbar=0} &= fg \end{aligned}$$

dove  $B_n : A \times A \rightarrow A$  sono operatori bidifferenziali e tali che  $f \star 1 = 1 \star f = f$ , per ogni  $f$ .

Qualche osservazione circa questa definizione. Innanzitutto l'estensione per  $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -linearità è data dalla seguente formula:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k \hbar^k \right) \star \left( \sum_{m=0}^{\infty} g_m \hbar^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m+k+r=n} B_r(f_k, g_m) \right) \hbar^n$$

La condizione che lo star prodotto si riduca al prodotto commutativo di partenza è equivalente a chiedere che  $B_0(f, g) = fg$ . Chiedere l'associatività

in  $A$  è sufficiente perchè può essere estesa per linearità a tutta  $A[[\hbar]]$ :  $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$  si traduce in:

$$\sum_{m+k=n} B_m(B_k(f, g), h) = \sum_{m+k=n} B_m(f, B_k(g, h)) \quad (2.1)$$

La condizione di associatività (2.1) per i primi due operatori diviene:

$$\begin{aligned} B_1(fg, h) + B_1(g, f)h &= B_1(f, gh) + fB_1(g, h) \\ B_2(fg, h) + B_1(B_1(f, g), h) + B_2(f, g)h &= \\ &= B_2(f, gh) + B_1(f, B_1(g, h)) + fB_2(g, h) \end{aligned}$$

Dalla prima di queste relazioni e da quelle che si ottengono ciclando  $f, g$  e  $h$  si ottiene che la parte antisimmetrica di  $B_1$  soddisfa la regola di Leibniz. Dalla seconda invece si ottiene l'identità di Jacobi. Quindi la parte antisimmetrica di  $B_1$ , la indichiamo con  $B_1^-$ , è un bivettore di Poisson su  $M$ . Da questa osservazione si capisce che una richiesta naturale da farsi è che  $B_1^- = \{, \}$  nel caso in cui si abbia a che fare con una varietà di Poisson. Nel caso di una varietà di partenza senza strutture aggiuntive, uno star prodotto induce una struttura di Poisson.

**Definizione 2.1.3.** *Una quantizzazione di una varietà di Poisson  $M$  è uno star prodotto sulla sua algebra di funzioni  $\text{Fun}(M)$  tale che  $B_1^- = \{, \}$ .*

### 2.1.1 La formula di Konstevich

Riassumiamo il problema: dato un campo bivettoriale  $\pi$  su una varietà  $M$ , tale che  $[\pi, \pi] = 0$ , questo definisce una parentesi di Poisson. In coordinate locali  $\{f, g\} = \pi^{ij} \partial_i f \partial_j g$ . Vogliamo definire un prodotto  $\star : A \times A \rightarrow A[[\hbar]]$  tale che  $f \star g = fg + \frac{i\hbar}{2} \{f, g\} + O(\hbar^2)$ . Il lavoro di Konstevich ha mostrato l'esistenza e la sua unicità modulo certe equivalenze naturali. Descriviamo la formula che da l'espressione esplicita del prodotto nel caso in cui  $M$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

L'operatore  $B_n$  è costruito come somma di contributi etichettati da una certa classe di grafi.

**Definizione 2.1.4.** *Un grafo ammissibile  $\Gamma$  di ordine  $n$  è un grafo finito e orientato con le seguenti proprietà:*

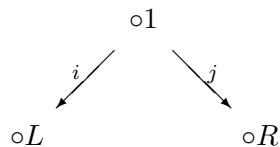
- (a)  $\Gamma$  ha  $n + 2$  vertici, etichettati con  $1, \dots, n, L, R$ ;
- (b)  $\Gamma$  ha  $2n$  lati, etichettati con  $i_1, j_1, \dots, i_n, j_n$ ;
- (c) I lati  $i_k$  e  $j_k$  hanno lo stesso vertice  $k$  di partenza e punto di arrivo diverso tra loro e da  $k$ ;

Equivalentemente un grafo ammissibile è una coppia di mappe:

$$(v_1, v_2) : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n, R, L\}$$

senza punti fissi e con immagini distinte in ogni punto.

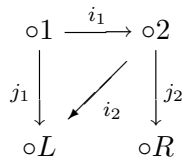
Ad ogni diagramma  $\Gamma$  di ordine  $n$  corrisponde un operatore bidifferenziale  $B_\Gamma$  i cui coefficienti sono polinomi differenziali, omogenei di grado  $n$  nelle componenti  $\pi^{ij}$  della struttura di Poisson e nelle sue derivate. Per definire l'azione dell'operatore  $B_\Gamma$  usiamo il seguente algoritmo: si scrive  $\pi^{ijk}$  per ogni vertice  $k$ ,  $f$  per il vertice  $L$  e  $g$  per il vertice  $R$ ; per ogni linea  $l$ , si mette un  $\partial_l$  di fronte al simbolo corrispondente dove il lato  $l$  termina. Per esempio:



corrisponde all'operatore bidifferenziale:

$$(f, g) \mapsto \pi^{ij} \partial_i f \partial_j g \quad .$$

Un altro esempio: dal grafico



si ottiene tramite le nostre regolette l'operatore bidifferenziale:

$$(f, g) \mapsto \pi^{ij} \partial_i \pi^{kl} \partial_j \partial_l f \partial_k g \quad .$$

La *formula di Konstevich* è la seguente:

$$f \star g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^n \sum_{\Gamma \text{ di ordine } n} w_\Gamma B_\Gamma(f \otimes g). \quad (2.2)$$

Il peso  $w_\Gamma$  è l'integrale di una forma differenziale sullo spazio delle configurazioni  $C_n(H) = \{u \in H^n, u_i \neq u_j (i \neq j)\}$  di  $n$  punti ordinati nel semipiano superiore. La forma  $w_\Gamma$  è definita in questo modo: per ogni due punti distinti  $z, w$  nel semipiano superiore dotato della metrica di Poincarè  $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ , sia  $\phi(z, w)$  l'angolo tra la geodetica verticale che connette  $z$  a  $i\infty$  e la geodetica che connette  $z$  to  $w$ , misurato in senso antiorario. questo definisce una mappa  $\phi : C_2(H) \rightarrow S^1$  Sia

$d\phi(z, w) = dz \frac{\partial}{\partial z} \phi(z, w) + dw \frac{\partial}{\partial w} \phi(z, w)$  il differenziale di questo angolo. Allora il peso è:

$$w_\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^{2n} n!} \int_{C_n(H)} \wedge_{i=1}^n d\phi(u_i, u_{v_1(i)}) \wedge d\phi(u_i, u_{v_2(i)}),$$

dove abbiamo posto  $u_L = 0$  e  $u_R = 1$ .

Il calcolo esplicito dei diagrammi del primo ordine è molto semplice. Gli operatori bidifferenziali corrispondenti li abbiamo già individuati, non resta che determinare il peso relativo ad ognuno; nel primo caso il peso è:

$$\omega_{\Gamma_1} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_H d\phi(u, 0) d\phi(u, 1)$$

Usiamo la formula esplicita per  $\phi$ , estendendola per continuità dove necessario. Si potrebbe effettuare l'integrazione per forza bruta, ma un metodo più ingegnoso è quello di utilizzare le variabili  $\phi_0 = \phi(u, 0)$  e  $\phi_1 = \phi(u, 1)$  e integrare sul dominio  $F = \{0 \leq \phi_0 \leq \phi_1 \leq 2\pi\}$ :

$$\omega_{\Gamma_1} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_F d\phi_0 d\phi_1 = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{(2\pi)^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Per il secondo diagramma, scambiare due frecce porta semplicemente all'inversione dell'orientamento della due forma e quindi ad un segno meno. In conclusione, il contributo al primo ordine per lo star prodotto è:

$$\frac{\hbar}{2} \alpha^{ij} (\partial_i f \partial_j g - \partial_j f \partial_i g) = \hbar \alpha^{ij} \partial_i f \partial_j g = \hbar \{f, g\},$$

dove si è usata l'antisimmetria di  $\alpha$ .

### 2.1.2 Quantizzazione di $T^*\mathbb{R}^n$ e il prodotto di Moyal

Il prodotto di Moyal è un esempio di star prodotto per strutture di Poisson costanti. Sia  $M = \mathbb{R}^n$  dotato di una struttura di Poisson  $\pi$  con coefficienti costanti. In coordinate locali:

$$\pi = \pi^{ij} \partial_i \otimes \partial_j, \quad \pi^{ij} = -\pi^{ji} \in \mathbb{R}.$$

Il prodotto di Moyal è definito come un esponenziale formale di  $\pi$ :

$$\begin{aligned} f \star g &= \exp(\hbar\pi)(f, g) = \\ &= f g + \hbar \pi^{ij} \partial_i f \partial_j g + \frac{\hbar^2}{2} \pi^{ij} \pi^{kl} \partial_i \partial_k f \partial_j \partial_l g + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} (\pi^{i_1 j_1} \dots \pi^{i_n j_n}) (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f) (\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g). \end{aligned}$$



La formula di Moyal dà una deformazione di  $(M, \pi)$  ma, sottolineiamolo di nuovo, è valida solo quando la struttura di Poisson è a coefficienti costanti. Ci aspettiamo di riottenere la (??) quando applichiamo la formula generale di Kontsevich ad una struttura costante. In questo caso, un grafo con un lato terminante su un vertice diverso da  $R$  e  $L$  darà un contributo nullo, poichè il termine  $\partial_i \pi^{jk}$  scompare. Quindi i grafi ammissibile di ordine  $n$  che è sufficiente considerare sono quelli in cui ogni vertice ha due lati che terminano uno in  $R$  e l'altro in  $L$ : ci sono  $2^n$  grafici di questo tipo e differiscono per l'ordinamento dei lati. In ogni caso essi danno il medesimo contributo poichè scambiare due lati comporta il cambio dell'orientazione della forma peso  $(-1)$  e lo scambio di due indici nel corrispondente tensore di Poisson e quindi per l'antisimetria  $(-1)$ : in conclusione il contributo totale è 1. L'operatore bidifferenziale  $B_n$  è quindi dato da:

$$\begin{aligned} B_n(f, g) &= 2^n w_{\Gamma_n} B_{\Gamma_n}(f, g) = \\ &= \frac{2^n}{(2\pi)^{2n} n!} \left( \int_{C_n(H)} \wedge_{i=1}^n d\phi(u_i, u_{v_1(i)}) \wedge d\phi(u_i, u_{v_2(i)}) \right) \\ &\quad (\pi^{i_1 j_1} \dots \pi^{i_n j_n}) (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f) (\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g) = \end{aligned}$$

Visto che:

$$\begin{aligned} &\int_{C_n(H)} \wedge_{i=1}^n d\phi(u_i, u_{v_1(i)}) \wedge d\phi(u_i, u_{v_2(i)}) = \\ &= \int_{C_n(H)} \wedge_{i=1}^n w_{\Gamma_1} = \left( \int_H w_{\Gamma_1} \right)^n = \left( \frac{(2\pi)^2}{2} \right)^n \end{aligned}$$

dove ho usato il risultato per i grafi del primo ordine ottenuto nella sezione precedente, segue:

$$\begin{aligned} B_n(f, g) &= \\ &= \frac{2^n}{(2\pi)^{2n} n!} \left( \frac{(2\pi)^2}{2} \right)^n (\pi^{i_1 j_1} \dots \pi^{i_n j_n}) (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f) (\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g) = \\ &= \frac{1}{n!} (\pi^{i_1 j_1} \dots \pi^{i_n j_n}) (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f) (\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g). \end{aligned}$$

Grazie a questa espressione per gli operatori bidifferenziali posso scrivere la formula di Kontsevich nel caso di una struttura di Poisson costante:

$$\begin{aligned} f \star g &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} (\pi^{i_1 j_1} \dots \pi^{i_n j_n}) (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f) (\partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} g) = \\ &= \exp(\hbar \pi^{ij} \partial_i \otimes \partial_j)(f, g). \end{aligned}$$

che coincide con la definizione di Moyal. E' interessante osservare come in questo esempio sia stato possibile calcolare tutto lo star prodotto a partire da un singolo diagramma, con una procedura che ricorda l'esponenziazione

dei diagrammi connessi della teoria delle perturbazioni in teoria dei campi. Questa idea — di decomposizione ed esponenziazione dei grafi ammissibili — si può generalizzare e i risultati principali sono esposti in [25].

Lo spazio degli stati in meccanica classica è generalmente preso essere  $T^*\mathbb{R}^n$  ed è dotato naturalmente di una struttura di poisson costante: la struttura simplettica  $\omega = dp_i dq^i$  essendo non degenere può essere invertita a dare un bivettore di Poisson a coefficienti costanti. In questo senso, lo star prodotto di Moyal risolve il problema della quantizzazione dello spazio delle fasi classico inteso nella sua incarnazione più naive.

## 2.2 Il Poisson Sigma Model

### 2.2.1 Prodotto di Moyal via integrale sui cammini

Vediamo come si applica il metodo della quantizzazione funzionale nel caso dello spazio delle fasi  $T^*\mathbb{R}^n$ . I *campi* della meccanica classica sono i cammini  $\gamma : I \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$ , dove  $I$  è una varietà monodimensionale che rappresenta il tempo e l'azione è definita in termini della struttura simplettica canonica  $\omega = dp_i dq^i$  e del suo potenziale simplettico  $\theta = p_i dq^i$ :

$$S(\gamma) = \int_I \gamma^* \theta \quad .$$

In coordinate locali possiamo scrivere  $\gamma(t) = (Q(t), P(t))$ ,  $\forall t \in I$  e l'azione acquisisce la forma familiare:

$$S(Q, P) = \int_I P_i \frac{d}{dt} Q^i dt. \quad (2.3)$$

L'aggiunta di un'Hamiltoniana deforma l'azione libera, ma non considereremo questo caso.

La parte quadratica dell'azione è degenere; per risolvere questo inconveniente basta prendere  $I = S^1$ , fissare un punto  $\infty \in S^1$  e fissare il valore dei cammini nel punto base. Definiamo quindi i due spazi di cammini:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{(Q, P) \in C^\infty(S^1, T^*\mathbb{R}^n)\} \\ \mathcal{M}(q, p) &= \{(Q, P) \in C^\infty(S^1, T^*\mathbb{R}^n) : Q(\infty) = q, P(\infty) = p\} \end{aligned}$$

e definiamo l'integrale funzionale imponendo il teorema di Fubini e sfruttando la misura canonica sullo spazio delle fasi:

$$\int_{\mathcal{M}} := \int_{T^*\mathbb{R}^n} \mu(q, p) \int_{\mathcal{M}(q, p)} \quad (2.4)$$

Questo è ora ben definito almeno per quanto riguarda lo sviluppo perturbativo dato che l'azione non è degenere se ristretta a  $\mathcal{M}(q, p)$ . A questo

punto si possono definire i valori di aspettazione di qualche funzione — i.e. osservabile —  $\mathcal{O}$  dei campi, che sia una serie formale in  $Q$  e  $P$ :

$$\langle \mathcal{O} \rangle(q, p) := \frac{\int_{\mathcal{M}(q,p)} e^{\frac{i}{\hbar} S} \mathcal{O}}{\int_{\mathcal{M}(q,p)} e^{\frac{i}{\hbar} S}}$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle := \int_{T^*\mathbb{R}^n} \mu(q, p) \langle \mathcal{O} \rangle(q, p),$$

nella seconda espressione è stato tralasciato il denominatore necessario alla normalizzazione poichè se la misura scelta è quella di Liouville la funzione costante 1 non è integrabile e dovremmo scegliere un'altra misura non naturale. Per calcolare l'integrale funzionale, fissiamo  $q$  e  $p$  ed effettuiamo il cambio di variabile  $Q = q + \tilde{Q}$  e  $P = p + \tilde{P}$ , dove  $(\tilde{Q}, \tilde{P}) : S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$  è una mappa nulla in  $\infty \in S^1$ , equivalente ad una mappa  $\mathbb{R} \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$  nulla all'infinito. Integrando per parti, l'azione diviene:

$$S(Q, P) = S(q + \tilde{Q}, p + \tilde{P}) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{P}_i \frac{d}{dt} \tilde{Q}^i dt.$$

Calcoliamo ora il propagatore per l'azione non degenera. La funzione di Green dell'operatore antisimmetrico  $\frac{d}{dt}$  è un mezzo della funzione segno:

$$\left( \frac{d}{dt} \right)^{-1} (u, v) = \theta(u, v) = \frac{1}{2} \text{sig}(u - v)$$

e quindi il propagatore è:

$$\langle \tilde{P}_i(u) \tilde{Q}^j(v) \rangle = i\hbar \delta_i^j \theta(v - u)$$

La richiesta tipica di *ordinamento normale* può essere imposta richiedendo che  $\theta(0) = 0$ , anche in accordo con l'antisimmetria dell'operatore  $\frac{d}{dt}$ .

Un esempio di osservabile su  $\mathcal{M}$  è dato da una funzione liscia su  $T^*\mathbb{R}^n$  valutata in qualche punto del cammino. Ma passiamo subito al caso più interessante, i.e. il prodotto di due funzioni lisce in due punti di un cammino:

$$\mathcal{O}_{f,g;u,v} = f(Q(u), P(u))g(Q(v), P(v)),$$

con le seguente ipotesi:

$$f, g \in C^\infty(S^1, T^*\mathbb{R}^n)$$

$$u, v \in S^1 \setminus \{\infty\} \simeq \mathbb{R},$$

$$u < v.$$

Calcoliamone il valore di aspettazione utilizzando il teorema di Wick ed espandendo in serie di Taylor in  $\tilde{Q}$  e  $\tilde{P}$  le due funzioni  $f$  e  $g$ . Nel seguito,  $I$  e  $J$  sono dei multi indici e le derivate parziali con indice alto indicano

una (multi)derivazione rispetto alle variabili  $p$ , mentre con un indice basso rispetto alle variabili  $q$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{f,g;u,v}(p, q) \rangle &= \langle f(q + \tilde{Q}(u), p + \tilde{P}(u))g(q + \tilde{Q}(v), p + \tilde{P}(u)) \rangle = \\ &= \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2=0}^{\infty} (r_1!r_2!s_1!s_2!)^{-1} \sum_{|I_1|=r_1, |I_2|=r_2} \sum_{|J_1|=s_1, |J_2|=s_2}^{\infty} \\ &\quad \langle \tilde{Q}_{J_1}(u)\tilde{P}^{I_1}(u)\tilde{Q}_{J_2}(v)\tilde{P}^{I_2}(u) \rangle \partial^{I_1} \partial_{J_1} f(q, p) \partial^{I_2} \partial_{J_2} g(q, p) \end{aligned}$$

Il propagatore nell'ultima espressione è diverso da zero solo quando accoppio tutti i punti diversi, e quindi quando  $|J_1| = |I_2|$  e  $|J_2| = |I_1|$ ; posso formare  $r!s!$  termini che soddisfano questa richiesta e quindi sommando su due dei quattro indici  $r_1, r_2, s_1, s_2$  e ricordando che per ipotesi  $u < v$  segue:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{f,g;u,v}(p, q) \rangle &= \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{1}{r!s!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{r+s} \sum_{|I|=r, |J|=s} \partial^I \partial_J f(q, p) \partial^J \partial_I g(q, p) = \\ &= \exp\left(\frac{i\hbar}{2} \partial_i \wedge \partial^i\right)(f, g) = f \star g(q, p). \end{aligned}$$

La quantizzazione funzionale della teoria avente come campi i cammini nello spazio delle fasi fornisce il prodotto di Moyal come valore di aspettazione di una classe di osservabili! Questo risultato estremamente interessante è la chiave per introdurre e motivare la generalizzazione di questo modello — il Poisson Sigma Model ( $P\sigma M$ ) — che permetterà di quantizzare non solo uno spazio delle fasi triviale come  $T^*\mathbb{R}^n$ , ma una qualsiasi varietà di Poisson. In quel caso, i valori di aspettazione della stessa classe di osservabili daranno luogo alla formula di Kontsevich.

### 2.2.2 Verso il Poisson Sigma Model

Discutiamo ora una generalizzazione bidimensionale del modello studiato nella sezione precedente 2.2.1: la varietà *sorgente* nel modello che descrive la meccanica classica di  $T^*\mathbb{R}^n$  è monodimensionale,  $\mathbb{R}$  o  $S^1$ , ora passiamo a considerare una superficie  $\Sigma$  come dominio dei nostri campi. Col senno di poi, è il *passaggio ad una dimensione superiore* che ci permette di risolvere il problema più generale della quantizzazione di varietà di Poisson. In qualche senso, avere un più ampio spazio di manovra permette di curare le degenerazioni tipiche di una struttura poissoniana (a differenza della proprietà di non degenerazione che contraddistingue una forma simplettica).

#### Studio del modello banale

Siano  $\xi$  una zero forma (una funzione) e  $\eta$  una 1-forma sul piano, che si annullano all'infinito abbastanza velocemente (i coefficienti sono funzioni di

Schwarz). Generalizziamo l'azione (2.3):

$$S := \int_{\Sigma} \eta d\xi \quad , \quad (2.5)$$

con  $\Sigma = \mathbb{R}^2$ . L'insieme dei campi è dunque dato da  $\mathcal{M} = \Omega_0^0(\mathbb{R}^2) \oplus \Omega_0^1(\mathbb{R}^2)$ , dove il pedice zero ricorda la richiesta di annullamento all'infinito. Su questo spazio ho l'azione dell'algebra di Lie abeliana  $\Gamma = \Omega_0^0(\mathbb{R}^2)$  che lascia invariante il funzionale dell'azione (2.5) e rende questo modello una teoria di gauge. Questa azione è indotta dal morfismo:

$$\Gamma \xrightarrow{d} \Omega_0^1(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{i} \mathcal{M}$$

Ad ogni funzione  $f \in \Omega_0^0(\mathbb{R}^2)$  associo un campo  $X_f \in \mathfrak{X}(M)$  tale che  $X_f(\xi, \eta) = df$ ; l'invarianza dell'azione è ovvia ( $d^2 = 0$ ) e l'operatore BRST è dato da:

$$\delta\xi = 0 \quad \delta\eta = df.$$

Per imporre il *gauge fixing* scelgo una metrica su  $\mathbb{R}^2$  e sfruttando l'operatore di Hodge indotto da questa metrica posso definire il pairing di forme  $(\alpha, \beta) := \int_{\mathbb{R}^2} (*\alpha)\beta$ . Introduco il codifferenziale  $d^* := *d*$ :

$$\Omega^k \xrightarrow{*} \Omega^{2-k} \xrightarrow{d} \Omega^{2-k+1} \xrightarrow{*} \Omega^{k-1}$$

e definisco la funzione di gauge fixing:

$$F(\xi, \eta) := d^*\eta. \quad (2.6)$$

Seguendo le notazioni della sezione 1.2.1 abbiamo:

$$\begin{aligned} F : \mathcal{M} &\rightarrow \Gamma \simeq \Omega_0^0(\mathbb{R}^2) , \\ \mathbf{A}_\gamma &= L_{X_\gamma} F , \\ (L_{X_\gamma} F)(\xi, \eta) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t} \left\{ F(\xi, \eta + td\gamma) - F(\xi, \eta) \right\} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t} \left\{ d^*(td\gamma) \right\} = *d*d\gamma , \end{aligned}$$

Quindi l'operatore  $\mathbf{A}$  è il Laplaciano sulle funzioni, ed è invertibile con le condizioni date all'infinito. Inoltre c'è un punto critico dell'azione che soddisfa la condizione di gauge fixing:

$$\begin{cases} \delta \int \eta d\xi = 0 \\ d^*\eta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} d\xi = 0 \\ d\eta = 0 \\ d^*\eta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \xi = c \in \mathbb{R} \\ \eta = df \\ \Delta f = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$

dove nell'ultimo passaggio si sono usate le condizioni all'infinito.

Identifico il duale  $\Gamma^*$  con  $\Omega^2(\mathbb{R}^2)$  tramite il paring dato dall'integrazione  $(\bar{c}, c) = \int_{\Sigma} \bar{c}c$  e, seguendo il procedimento standard, il fermione di gauge fixing per la condizione scelta è  $\Psi_F = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{c}d^*\eta$ . Ricordando che  $\delta\bar{c} = \lambda$ , generatori pari di  $\Gamma$  (vedi [11]), l'azione con il termine di gauge fixing è:

$$\begin{aligned} S_F &= S + \delta\Psi_F = S + \int_{\mathbb{R}^2} \bar{c}d^*\eta = \\ &= S + \int_{\mathbb{R}^2} \bar{c}d^*\eta - \int_{\mathbb{R}^2} \bar{c}d^*dc = \\ &= \frac{1}{2}(\phi, M\phi) - (*\bar{c}, \Delta c), \end{aligned}$$

dove  $\Delta$  è l'operatore di Laplace, e

$$\phi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \lambda \end{pmatrix} \in \Omega_0^0(\mathbb{R}^2) \otimes \Omega_0^1(\mathbb{R}^2) \otimes \Omega^2(\mathbb{R}^2), \quad (2.7)$$

e

$$M = \begin{pmatrix} 0 & *d & 0 \\ *d & 0 & d* \\ 0 & d* & 0 \end{pmatrix}$$

Il propagatore tra  $\phi$  e  $c$  o  $\bar{c}$  è nullo. Per trovare il propagatore tra due dei campi di  $M$ , è necessario trovare il nucleo integrale di  $M^{-1}$ . Osservo che:

$$M^2 = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

e dalla relazione  $M^{-1} = MM^{-2}$  segue:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & *d\Delta^{-1} & 0 \\ *d\Delta^{-1} & 0 & d*\Delta^{-1} \\ 0 & d*\Delta^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Se  $G(w, z)$  è la funzione di Green per l'operatore di Laplace agente sulle funzioni, allora i propagatori di questa teoria sono:

$$\begin{aligned} \langle *\bar{c}(z)c(w) \rangle &= -i\hbar G(w, z) \\ \langle \xi(z)\eta(w) \rangle &= i*\hbar*_w d_w \hbar G(w, z) \end{aligned}$$

Possiamo introdurre i supercampi:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \xi - d^*\bar{c} \\ \tilde{\eta} &= c + \eta \end{aligned}$$

Questa somma ha senso nell'algebra generata dalle funzioni coordinate su  $\mathbb{R}^2$  e dalle rispettive variabili anticommutanti, in questo caso i termini sono

omogenei rispetto alla gradazione data dalla somma del ghost number e del grado di forma. Possiamo a questo punto introdurre il *superpropagatore*

$$i\hbar\theta(z, w) := \langle \tilde{\xi}(z)\tilde{\eta}(w) \rangle = \quad (2.8)$$

$$= \langle \xi(z)\eta(w) \rangle - \langle d * \bar{c}(z)c(w) \rangle = \quad (2.9)$$

$$= i\hbar(*_w d_w + *_z d_z)G(w, z) \quad (2.10)$$

che è un elemento di  $\Omega^1(C_2(\mathbb{R}^2))$ , i.e. una 1-forma sullo spazio delle configurazioni di due punti in  $\mathbb{R}^2$ .

**Lemma 2.2.1.** *Se la metrica su  $\mathbb{R}^2$  è quella euclidea, allora:*

$$\theta = \frac{d\phi_E}{2\pi},$$

dove  $d$  è il differenziale su  $C_2(\mathbb{R}^2)$  e  $\phi_E$  è l'angolo euclideo tra una retta fissa di riferimento e la retta passante per  $z$  e  $w$ .

*Dimostrazione.* La funzione di Green per l'operatore Laplaciano in due dimensioni è:

$$G(z, w) = \frac{1}{2\pi} \log |z - w| = \frac{1}{2\pi} \log(z - w)(\bar{z} - \bar{w})$$

dove  $|\cdot|$  è la norma euclidea e sono state introdotte le coordinate complesse per facilitare i calcoli. L'operatore di Hodge euclideo agisce come segue:  $*dz = -idz$  e  $*d\bar{z} = id\bar{z}$ . Mettendo insieme l'espressione esplicita del propagatore 2.8, quella di  $G(z, w)$  e l'azione dell'operatore  $*$  si ottiene facilmente:

$$\theta = \frac{1}{4i\pi} \left( \frac{dz - dw}{z - w} - \frac{d\bar{z} - d\bar{w}}{\bar{z} - \bar{w}} \right) = \frac{1}{4i\pi} d \log \frac{z - w}{\bar{z} - \bar{w}}.$$

D'altro canto, da  $z - w = |z - w|e^{i\phi}$  segue:

$$\phi = \frac{1}{2i} \log \frac{z - w}{\bar{z} - \bar{w}},$$

e quindi il lemma è dimostrato.  $\square$

Osserviamo che la classe di coomologia di  $\theta$  è il generatore di  $H^1(C_2(\mathbb{R}^2); \mathbb{Z})$ .

A questo punto abbiamo gli strumenti necessari per studiare le conseguenze di questo modello, non resta che costruire delle osservabili e calcolarne i valori di aspettazione sfruttando il teorema di Wick e la nostra conoscenza dei propagatori. Questa è la strada che seguiremo quando avremo generalizzato questo modello banale al Poisson Sigma Model.

Prima di passare alla prossima generalizzazione soffermiamoci a considerare brevemente un altro caso particolare, dato dall'azione (2.5) con  $\Sigma$  uguale al semipiano superiore con bordo  $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Come condizioni al

contorno, imponiamo che la 1-forma  $\eta$  si annulli quando ristretta al bordo  $\partial H = \mathbb{R} \times 0$ . L'algebra di Lie agente sullo spazio dei campi è ora costituita dalle zero forme su  $H$  che si annullano in  $\partial H$ . L'operatore BRST e la funzione di gauge fixing sono gli stessi dal caso precedente. Abbiamo il seguente risultato analogo del lemma 2.2.1:

**Lemma 2.2.2.** *Se la metrica su  $H$  è quella iperbolica, allora:*

$$\theta = \frac{d\phi_h}{2\pi},$$

dove  $d$  è il differenziale su  $C_2(\mathbb{R}^2)$  e  $\phi_h$  è l'angolo iperbolico tra la retta verticale passante per  $w$  e la geodetica della metrica iperbolica di Poincaré che congiunge  $z$  e  $w$ .

*Dimostrazione.* Usando il metodo classico delle immagini, aggiungiamo alla funzione di Green del Laplaciano sul piano una funzione armonica, in modo tale che vengano soddisfatte le condizioni richieste sul bordo  $\partial H$ . In coordinate complesse, la richiesta è che  $G^H(w, z) = 0$  se  $w$  è reale. Questo si ottiene ponendo:

$$G^H(w, z) = G(w, z) - G(\bar{w}, z)$$

e quindi

$$\vartheta(z, w) = \theta(z, w) - \theta(z, \bar{w}).$$

Visto che l'angolo iperbolico è dato da:

$$\phi_h = \frac{1}{2i} \log \frac{(z-w)(\bar{z}-w)}{(\bar{z}-\bar{w})(z-\bar{w})}$$

usando le formule esplicite delle grandezze coinvolte si giunge facilmente alla dimostrazione del lemma.  $\square$

### Generalizzazioni progressive

La più semplice generalizzazione del modello descritto finora consiste nell'introdurre più campi: prendiamo una collezione di zero forme  $\xi^i$  e di 1-forme  $\eta_i$ . L'azione è scritta come somma dei contributi di ogni coppia:

$$S := \int_{\Sigma} \eta_i d\xi^i \quad , \quad (2.11)$$

Possiamo pensare ogni collezione di forme come una sola forma a valori in  $\mathbb{R}^n$ ; l'algebra delle simmetrie sarà la somma diretta di  $n$  copie l'algebra del caso precedente, sarebbe a dire l'algebra di Lie abeliana delle zero forme su  $\mathbb{R}^2$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ . A questo punto la procedura prosegue in maniera esattamente analoga, effettivamente basta aggiungere qualche indice  $i$  e  $i$  nei posti opportuni.



Il passo successivo consiste nel lasciare cadere l'assunzione che le il campo descritto dalla zero forma  $X$  sia nullo all'infinito. Presa la mappa in  $\mathbb{R}^n$ , le cui componenti sono date da  $X^i$ , non imponiamo alcuna condizione all'infinito. L'azione è la solita:

$$S := \int_{\Sigma} \eta_i dX^i \quad , \quad (2.12)$$

Nel determinare i punti critici, non essendo più permessa l'ultima implicazione della (2.7), troviamo le coppie in cui la mappa  $X$  è costante e  $\eta$  una 1-forma chiusa. I punti critici restano degeneri anche dopo essere stati quozientati rispetto all'azione dell'algebra delle simmetrie, che permette di risolvere solo la degenerazione relativa a  $\eta$  dato che  $\delta\eta = dc$ . Non riusciamo a liberarci dei problemi causati da  $X$  che fortunatamente sono di tipo molto semplice e possiamo tenerne conto senza troppa fatica: la degenerazione di  $X$ , mappa costante se corrisponde ad un punto critico dell'azione, è parametrizzata dal valore che assume, i.e. un punto di  $\mathbb{R}^n$ . Possiamo curare questo inconveniente alla stessa maniera di 2.4, cioè scegliendo una misura su  $\mathbb{R}^n$  (anche delforme) e imponendo il teorema di Fubini.

Fermiamoci un secondo per rivedere il percorso seguito. Siamo partiti da un modello banale, forme su  $\mathbb{R}^2$  oppure  $H$  (semipiano superiore) a valori in  $\mathbb{R}$ ; abbiamo quindi incollato molte copie di questo modello, lavorando con campi a valori in  $\mathbb{R}^n$ . Dopodichè abbiamo rilassato le condizioni all'infinito riguardanti la zero forma  $X$ ; la necessità di avere equazioni di Eulero-Lagrange che siano differenziali, ci vieta di di fare lo stesso con la 1-forma  $\eta$ .

Un ulteriore generalizzazione è quella di rimpiazzare  $\mathbb{R}^n$  con una varietà  $M$ : le  $X^i$  sono ora le espressioni in coordinate della mappa:

$$X : \Sigma \rightarrow M .$$

Ovviamente vogliamo mantenere la stessa struttura per l'azione e mantenerne la covarianza. Per costruire l'azione, osserviamo che il differenziale di  $X$  è:

$$dX(u) : T_u\Sigma \rightarrow T_{X(u)}M$$

L'azione utilizza il pairing canonico tra il fibrato tangente e il fibrato cotangente a  $M$ , per sfruttarlo anche in questo caso dobbiamo richiedere che  $\eta(u) : T_u\Sigma \rightarrow T_{X(u)}^*M$  così che l'espressione  $\eta_i dX^i$  sia covariante. La costruzione del fibrato pull-back rispetto a  $X$  ci permette di scrivere in termini geometrici questa richiesta:

$$\eta \in \Omega^1(\Sigma, X^*T^*M) = \Gamma(\Sigma, T^*\Sigma \otimes X^*T^*M)$$

infatti il fibrato  $\pi : X^*T^*M \rightarrow \Sigma$  è tale che per  $u \in \Sigma$  si ha  $\pi^{-1} = T_{X(u)}^*M$ . L'azione può essere scritta in forma invariante denotando con le parentesi

angolari il pairing canonico:

$$S := \int_{\Sigma} \langle \eta, dX \rangle \quad . \quad (2.13)$$

Lo spazio dei campi  $\mathcal{M}$  può essere identificato con quello dei morfismi tra i fibrati  $T\Sigma$  e  $T^*M$ :

$$\begin{array}{ccc} T\Sigma & \xrightarrow{\eta} & X^*T^*M & \xrightarrow{X^*} & T^*M \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \Sigma & \xrightarrow{X} & & & M \end{array}$$

Richiediamo ora che  $X$  mandi l'infinito in un punto  $x$  dato di  $M$ , ed espandiamo attorno a questa soluzione critica scrivendo  $X = x + \xi, \xi : \Sigma \rightarrow T_x M$  e considerando  $\eta$  come una 1-forma a valori in  $T_x^*M$ : in coordinate locali, l'isomorfismo  $T_x^*M \simeq \mathbb{R}^n$  ci riporta al caso precedente.

Finora  $\Sigma$  è stato il piano cartesiano o il semipiano superiore. Potremmo permettere che la varietà sorgente  $\Sigma$  sia una qualsiasi superficie. Nel caso in cui la superficie non è semplicemente connessa, la trattazione delle degenerazioni diviene molto più complicata. Questa situazione non è ancora stata affrontata.

### Deformazioni dell'azione e termine di interazione

Il modello sviluppato nei paragrafi precedenti è nato come generalizzazione bidimensionale della meccanica classica di  $n$  particelle *libere*. La vita si fa più interessante in presenza di interazioni: dobbiamo quindi trovare il modo di introdurne senza aggiungere strutture geometriche aggiuntive sullo spazio sorgente. Servono dei termini che siano 2-forme su  $\Sigma$  costruiti a partire dai campi  $X^i$  e  $\eta_i$ . Abbiamo a disposizione le seguenti combinazioni:

$$\alpha^{ij}(X)\eta_i\eta_j, \quad \beta_j^i(X)\eta_i dX^j, \quad \gamma_{ij}(X)dX^i dX^j, \quad \phi^i(X)d\eta_i.$$

L'ultimo termine si riduce al secondo integrando per parti. Il secondo e il terzo termine possono essere riassorbiti nel primo con una ridefinizione del campo  $\eta$ , i.e. utilizzando al suo posto una combinazione lineare di  $\eta$  e  $dX$ . Possiamo quindi prendere come deformazione generale dell'azione (2.13) la seguente:

$$S := \int_{\Sigma} \eta_i dX^i + \frac{1}{2} \epsilon \alpha^{ij}(X) \eta_i \eta_j \quad . \quad (2.14)$$

$\epsilon$  è il parametro di deformazione e possiamo assumere  $\alpha^{ij}$  antisimmetrico, visto che agisce su due forme.

Da un punto di vista della covarianza l'azione (2.14) è soddisfacente, cionostante, dato il ruolo chiave giocato dalle simmetrie, vogliamo costruire

anche una deformazione della loro azione. Per affrontare il problema in maniera concreta, osservare che modificare le simmetrie equivale a *deformare l'operatore BRST* è un buon punto di partenza. I prossimi due lemmi e un teorema chiarificheranno la situazione, le dimostrazioni vengono tralasciate perchè non particolarmente illuminanti.

**Lemma 2.2.3.** *A meno di ridefinizioni dei campi, esiste un unico operatore BRST che deforma quello banale in modo tale che  $\delta S = O(\epsilon^2)$  e  $\delta^2 = O(\epsilon^2) + R$  con  $R$  nullo in corrispondenza dei punti critici dell'azione. La sua azione è data da:*

$$\begin{aligned}\delta X^i &= -\epsilon \alpha^{ij}(X) c_j + O(\epsilon^2), \\ \delta \eta_i &= dc_i + \epsilon \partial_i \alpha^{jk}(X) \eta_j c_k + O(\epsilon^2), \\ \delta c_i &= -\frac{1}{2} \epsilon \partial_i \alpha^{jk}(X) c_j c_k + O(\epsilon^2)\end{aligned}$$

Inoltre,  $R$  si annulla su tutto  $\mathcal{M} \times \pi\Gamma$  se  $\alpha$  è al più lineare.

L'operatore BRST deve essere un differenziale, e quindi il suo quadrato nullo a tutti gli ordini in  $\epsilon$ . Chiedendo che lo sia all'ordine  $O(\epsilon^3)$  otteniamo che  $\alpha$  deve essere un bivettore di Poisson!

**Lemma 2.2.4.**  $\delta^2 = O(\epsilon^3)$  se e solo se  $\alpha$  è un bivettore di Poisson.

Sotto l'ipotesi che  $\alpha$  sia di Poisson, si dimostra che la deformazione dell'operatore BRST non è solo infinitesima. Enunciamo il teorema che dimostreremo, facendo il calcolo esplicito, nella prossima sezione. Un bivettore di Poisson sarà indicato con  $\pi$ .

**Teorema 2.2.5.** *Sia  $\pi$  un bivettore di Poisson, allora il campo vettoriale dispari:*

$$\begin{aligned}\delta X^i &= -\epsilon \pi^{ij}(X) c_j, \\ \delta \eta_i &= dc_i + \epsilon \partial_i \pi^{jk}(X) \eta_j c_k, \\ \delta c_i &= -\frac{1}{2} \epsilon \partial_i \pi^{jk}(X) c_j c_k\end{aligned}$$

è coomologico nei punti critici dell'azione o se  $\pi$  è al più lineare. Inoltre l'azione (2.14):

$$S := \int_{\Sigma} \eta_i dX^i + \frac{1}{2} \pi^{ij}(X) \eta_i \eta_j$$

è  $\delta$ -chiusa.

Il risultato di questa sezione è stato quello di mostrare che le uniche deformazioni valide dell'azione banale 2.12 sono quelle in cui gli  $\alpha^{ij}$  sono le componenti di un tensore di Poisson  $\pi$ . In particolare, se le componenti di

tale tensore sono al più lineari, l'operatore BRST è coomologico su tutto lo spazio dei campi e quindi la quantizzazione può essere effettuata senza ricorrere al metodo BV: studiando le stesse osservabili considerate nell'analisi del prodotto di Moyal, si trova che i loro valori di aspettazione forniscono un caso particolare della formula di Konstevich. Siamo sulla buona strada.

Il significato geometrico del teorema 2.2.5 è che esiste una distribuzione di campi vettoriali su  $\mathcal{M}$  sotto la cui azione il funzionale  $S$  è invariante.

Tutta questa analisi ci ha portato in maniera progressiva alla definizione del *Poisson Sigma Model* ( $P\sigma M$ ): è una teoria il cui contenuto in campi è dato dalle mappe di fibrati  $(X, \eta) : T\Sigma \rightarrow T^*M$ , lo spazio source  $\Sigma$  è una superficie (eventualmente con bordo) e  $(M, \pi)$  è una varietà di Poisson. Le condizioni al contorno impongono che la 1-forma  $\eta$  sia nulla sui vettori tangenti al bordo  $\partial\Sigma$ . Il funzionale dell'azione è:

$$S := \int_{\Sigma} \langle \eta, dX \rangle + \frac{1}{2} \langle \eta, \pi^{\sharp}(X)\eta \rangle \quad , \quad (2.15)$$

dove  $\pi^{\sharp}$  è l'applicazione canonica tra  $T^*M$  e  $TM$  indotta dalla struttura di Poisson e le parentesi angolari indicano il pairing canonico tra questi due spazi.

### 2.2.3 Simmetrie dell'azione e algebra di gauge

Dimentichiamoci per un momento del formalismo BRST e studiamo in dettaglio le trasformazioni di gauge che lasciano invariante l'azione. Per comodità lavoriamo in coordinate, ripetiamo ancora una volta l'azione:

$$S := \int_D \eta_i \wedge dX^i + \frac{1}{2} \pi^{ij}(X) \eta_i \wedge \eta_j \quad .$$

dove al posto di una superficie generica si è preso il disco  $D$  e quindi le condizioni al contorno divengono:

$$\eta(u)|_{T_u \partial D} = 0 \quad .$$

Le simmetrie dell'azione sono parametrizzate dal parametro infinitesimo  $\beta$ , sezione del fibrato  $X^*T^*M$  nulla quando ristretta a  $\partial D$  e sono date da:

$$\delta_{\beta} X^i = -\pi^{ij}(X) \beta_j \quad , \quad (2.16)$$

$$\delta_{\beta} \eta_i = d\beta_i + \partial_i \pi^{jk}(X) \eta_j \beta_k \quad . \quad (2.17)$$

Per verificare questa affermazione si deve mostrare che:

$$\delta_{\beta} S = 0, \quad \forall \beta$$

Consideriamo i due termini dell'azione separatamente. Per la parte *cinetica* abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int_D \delta_\beta(\eta_i \wedge dX) &= \int_D \delta_\beta(\eta_i) \wedge dX + \eta_i \wedge d(\delta_\beta X) = \\
&= \int_D \delta_\beta(d\beta_i + \partial_i \pi^{jk}(X) \eta_j \beta_k) \wedge dX + \eta_i \wedge d(-\pi^{ij}(X) \beta_j) = \\
&= - \int_{\partial D} \beta_i \wedge dX^i - \int_D d\eta_i \wedge \pi^{ij}(X) \beta_j - \int_{\partial D} \eta_i \wedge \delta X = \\
&= - \int_D d\eta_i \wedge \pi^{ij}(X) \beta_j.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio sono state utilizzate in maniera cruciale le condizioni al contorno per  $\eta$  e per  $\beta$ . La parte di *interazione* da invece:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_D \delta_\beta \pi^{ij}(X) \eta_i \wedge \eta_j = \\
&= \frac{1}{2} \int_D ((\partial_l \pi^{ij}) \pi^{lk} \beta_k \eta_i \wedge \eta_j - \pi^{ij} d\beta_i \wedge \eta_j - \pi^{ij} \partial_i \pi^{lk} \eta_l \beta_k \wedge \eta_j + \\
&\quad - \pi^{ij} \eta_i \wedge d\beta_j \pi^{ij} \eta_l \beta_k \wedge \partial_j \pi^{lk} \eta_j \beta_k) = \\
&= \frac{1}{2} \int_D \beta_k (\pi^{lk} \partial_l \pi^{ij} - \pi^{lj} \partial_l \pi^{ik} - \pi^{il} \partial_l \pi^{jk}) \eta_i \wedge \eta_j + \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_D \pi^{ij} (d\beta_i \wedge \eta_j + \eta_i \wedge d\beta_j) = \\
&= \int_{\partial D} \pi^{ij} \eta_i \wedge \beta_j + \int_D \pi^{ij} d\eta_i \wedge \beta_j = \int_D \pi^{ij} d\eta_i \wedge \beta_j, \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Dove si è usata l'identità di Jacobi e ovviamente anche le condizioni al contorno. Le variazioni dei due termini si cancellano tra loro e l'azione risulta quindi essere invariante per le trasformazioni (2.16).

La simmetria (2.16) è l'estensione di simmetrie più familiari che si incontrano i vari casi particolari. Da un lato c'è il caso triviale  $\pi = 0$  e l'azione risulta invariante sotto traslazioni di  $\eta$  ottenute sommando una 1-forma esatta su  $D$ . All'altro estremo c'è il caso simplettico, in cui  $\pi^{ij}$  è una matrice invertibile tale che calcolando formalmente l'integrale funzionale gaussiano sulle  $\eta$  otteniamo l'azione  $\int_D X^* \omega$  che è invariante rispetto a traslazioni arbitrarie della forma  $X^i \mapsto X^i + \xi^i$ , con  $\xi^i(u) = 0$  sul bordo di  $D$ . Un altro caso particolare si ottiene prendendo come  $M$  uno spazio vettoriale e  $\pi$  una funzione lineare su  $M$ . In questo caso  $M$  è il duale di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  dotata di una struttura di Poisson con coefficienti di Kirillov–Kostant. La parentesi di Lie di due funzioni lineari  $f, g \in \mathfrak{g} = M^*$  è la parentesi di Poisson ed è ancora una funzione lineare su  $M$ . L'azione può essere vista come una funzione di un campo  $X$  a valori in  $\mathfrak{g}^*$  e una connessione  $d + \eta$  su un

fibrato principale triviale su  $D$ . Effettuando integrazione per parti, l'azione diviene di tipo BF [14]  $S = \int_D \langle X, F(\eta) \rangle$  dove  $F(\eta)$  è la curvatura di  $d + \eta$ . In questo caso, la trasformazione di gauge è la solita trasformazione di una connessione e un campo  $X$  nella rappresentazione coaggiunta.

Studiamo ora l'algebra di gauge, cioè cosa succede quando effettuiamo due trasformazioni in successione. Iniziamo dal campo  $X$ :

$$\delta_\beta \delta_{\beta'} X^i = \partial_k \pi^{ij}(X) \pi^{kl}(X) \beta_l \beta'_j,$$

da cui si ottiene:

$$[\delta_\beta, \delta_{\beta'}] X^i = (\partial_k \pi^{ij(X)}) \pi^{kl}(X) \beta_l \beta'_j - (\partial_k \pi^{ij(X)}) \pi^{kl}(X) \beta'_l \beta_j,$$

usando l'identità di Jacobi per  $\pi$ :

$$\begin{aligned} [\delta_\beta, \delta_{\beta'}] X^i &= \pi^{ij}(X) (-\partial_k \pi^{lj}(X)) \beta'_j \beta_l =: \\ &= \pi^{ij}(X) \{ \beta, \beta' \}'_k = \delta_{\{ \beta, \beta' \}'} X^i, \end{aligned} \quad (2.19)$$

abbiamo appena trovato che il commutatore di due trasformazioni di gauge agenti su  $X$  è ancora una trasformazione di gauge. Per il campo  $\eta$  le cose non vanno così bene:

$$\begin{aligned} \delta_\beta \delta_{\beta'} \eta^i &= \\ &= \partial_i (\partial_l \pi^{jk}(X) \delta_\beta X^l) \eta_j \beta'_k + \partial_i \pi^{jk}(X) (d\beta_j + \partial_l \pi^{ml} \eta_m \beta_l) \beta'_k, \end{aligned} \quad (2.20)$$

accoppiando a due a due i termini corrispondenti ottenuti da  $-\delta_{\beta'} \delta_\beta \eta^i$  con quelli appena calcolati si ottiene:

$$[\delta_\beta, \delta_{\beta'}] \eta_i = \delta_{\{ \beta, \beta' \}'} \eta_i - \partial_i \partial_k \alpha^{rs} \beta_r \beta'_s (dX^k + \alpha^{kj}(X) \eta_j).$$

Come prima abbiamo usato  $\{ \beta, \beta' \}'_i = -\partial_i \alpha^{jk}(X) \beta_j \beta'_k$ . Osserviamo che  $dX^k + \alpha^{kj} \eta_j = 0$  è una delle equazioni di Eulero-Lagrange per l'azione  $S$ . Sottolineiamo come l'utilizzo dell'identità di Jacobi è essenziale per ottenere questi risultati. L'algebra di gauge è un'algebra di Lie solo quando agisce sui punti critici dell'azione, è chiusa solo *on shell*.

## 2.3 Quantizzazione BV del $P\sigma M$

Questa sezione è il punto di arrivo di questi primi due capitoli: in particolare vedremo come il problema della *deformation quantization* può essere risolto quantizzando il *Poisson Sigma Model* con il *metodo di Batalin-Vilkovinsky*.

I risultati sulle simmetrie e l'algebra di gauge del Poisson Sigma Model ci mettono in guardia circa l'utilizzo del formalismo BRST per effettuare la quantizzazione funzionale del  $P\sigma M$ , lo strumento principale di questa tecnica — l'operatore BRST  $\delta$  — non gode in questo schema della sua caratteristica

peculiare: non è un differenziale. Quindi non siamo in grado di costruire delle osservabili fisiche se la coomologia dell'operatore BRST non è ben definita. E' proprio per questa ragione che siamo costretti a rivolgerci alle più complicate tecniche BV.

Nel formalismo BRST il parametro infinitesimo  $\beta_i$  viene promosso a campo ghost anticommutante che si annulla sul bordo del disco  $D$  e l'operatore  $\delta_0$ , una derivazione dispari delle funzioni  $X, \eta, \beta$  tale che:

$$\begin{aligned}\delta_0 X^i &= \pi^{ij}(X)\beta_j \\ \delta_0 \eta_i &= -d\beta_i - \partial_i \pi^{kl}(X)\eta_k \beta_l \\ \delta_0 \beta_i &= \frac{1}{2} \partial_i \pi^{jk}(X)\beta_j \beta_k.\end{aligned}$$

Dai calcoli precedenti sappiamo che  $\delta_0$  è un differenziale on shell, i.e. modulo le equazioni del moto il suo quadrato è nullo. Più precisamente:

$$\delta_0^2 X^i = \delta_0^2 \beta_i = 0, \quad \delta_0^2 \eta_i = -\frac{1}{2} \partial_i \partial_k \pi^{rs} \beta_r \beta_s (dX^k + \pi^{kj}(X)\eta_j).$$

Assegnamo una gradazione, il *ghost number*, ai campi:  $\text{gh}(X^i) = \text{gh}(\eta_i) = 0$ ,  $\text{gh}(\beta_i) = 1$ . Quindi, l'operatore BRST ha ghost number 1. Inoltre abbiamo anche la gradazione dovuta al fatto che i campi sono delle forme sul disco, che indichiamo con:  $\text{deg}(X^i) = \text{deg}(\beta_i) = 0$ ,  $\text{deg}(\eta_i) = 1$ .

La prima prescrizione del formalismo BV è quella di aggiungere gli *anticampi*:  $X^+, \eta^+, \beta^+$  con ghost number  $\text{gh}\phi^+ = -\text{gh}\phi - 1$  e grado come forme differenziali su  $D$  complementare rispetto ai corrispondenti campi. La tabella 2.3 riassume l'assegnazione del grado di forma differenziale (da sinistra e destra) e del ghost number. Il passo successivo è trovare un'azione di

	0	1	2
-2			$\beta^{+i}$
-1		$\eta^{+i}$	$X_i^+$
0	$X^i$	$\eta_i$	
1	$\beta_i$		

Batalin-Vilkovisky  $S_{\text{BV}}[\phi, \phi^+]$  di ghost number zero dipendente dai campi  $\phi^1, \phi^2, \dots$  (nel nostro caso  $X^i, \eta_i, \beta_i$ ) e dagli anticampi  $\phi_1^+, \phi_2^+, \dots$ , che soddisfino i due requisiti seguenti: per prima cosa  $S_{\text{BV}}[\phi, 0]$  deve ridursi all'azione classica  $S[\phi]$  e la seconda richiesta è che  $S_{\text{BV}}$  soddisfi la *quantum master equation*:

$$(S_{\text{BV}}, S_{\text{BV}}) - 2i\hbar \Delta S_{\text{BV}} = 0.$$

Ricordiamo dal primo capitolo, e in particolare dalla 1.9 la versione BV dell'operatore BRST, che agisce sui campi secondo le definizioni le seguenti

formule

$$\delta\phi^\alpha = (-1)^{\text{gh}(\phi^\alpha)} \frac{\vec{\delta} S_{\text{BV}}}{\partial\phi_\alpha^+}, \quad \delta\phi_\alpha^+ = (-1)^{\text{gh}(\phi^\alpha) + \text{deg}(\phi^\alpha)} \frac{\vec{\delta} S_{\text{BV}}}{\partial\phi^\alpha}.$$

Una tecnica standard per indirizzare la ricerca dell'azione BV è di iniziare con l'azione  $S_{\text{BV}}^0 = S + \int_D X_i^+ \delta_0 X^i + \eta^{+i} \wedge \delta_0 \eta_i - \beta^{+i} \delta_0 \beta_i$ , che ha come operatore  $\delta = \delta_0$  e aggiungere dei termini in maniera opportuna, tali che  $\delta^2 = 0$ .

Il termine incriminato è la variazione BRST seconda del campo  $\eta$ , in altri termini anche  $\delta_0 \eta^{+i} = \partial S_{\text{BV}}^0 / \partial \eta_i$ , infatti è quello che contiene le equazioni del moto più altri termini negli anticampi che devono essere in qualche modo eliminati da  $\delta_0^2 \eta_i$ :

$$\begin{aligned} \delta_0^2 \eta_i &= \delta_0 \frac{\partial S_{\text{BV}}^0}{\partial \eta_i^+} = \\ &= -\frac{1}{2} \partial_i \partial_k \pi^{rs}(X) \beta_r \beta_s (dX + \pi^{kj} \eta_j) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Un termine che funziona è il seguente:

$$\frac{1}{4} \int_D \eta^{+i} \wedge \eta^{+j} \partial_i \partial_j \alpha^{kl}(X) \beta_k \beta_l,$$

Calcoliamone la variazione seconda rispetto all'operatore BRST. Dopo la prima applicazione mi ritrovo con:

$$\begin{aligned} &\left( S_{\text{BV}}, -\frac{1}{2} \eta^{+j} \partial_j \partial_i \pi^{kl}(X) \beta_k \beta_l \right) = \\ &= \frac{S_{\text{BV}} \overleftarrow{\partial}}{\partial \eta^m} \wedge \left( -\frac{1}{2} \partial_m \partial_i \pi^{kl}(X) \beta_k \beta_l \right) + \frac{S_{\text{BV}} \overleftarrow{\partial}}{\partial X_m^+} \wedge \left( -\frac{1}{2} \eta^{+j} \partial_j \partial_i (\partial_r \pi^{kl}(X) \delta_m^r) \beta_k \beta_l \right) + \\ &\quad + \frac{S_{\text{BV}} \overleftarrow{\partial}}{\partial \beta^m} \wedge \left( \eta^{+j} \partial_j \partial_i \pi^{kl}(X) \beta_k \delta_{ml} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Nel secondo e nel terzo termine, la derivata sinistra dell'azione di BV fornisce le variazioni BRST dei campi  $\beta$  e  $X$ : sostituendo le espressioni esplicite si ottiene subito che i due termini si cancellano a vicenda. la derivata nel primo termine invece da le equazioni del moto e cancella il termine (2.21). Come azione BV allora prendiamo la seguente:

$$\begin{aligned} S_{\text{BV}} &= S_{\text{BV}}^0 - \frac{1}{4} \int_D \eta^{+i} \wedge \eta^{+j} \partial_i \partial_j \alpha^{kl}(X) \beta_k \beta_l \\ &= \int_D \eta_i \wedge dX^i + \frac{1}{2} \alpha^{ij}(X) \eta_i \wedge \eta_j + X_i^+ \alpha^{ij}(X) \beta_j - \eta^{+i} \wedge (d\beta_i + \partial_i \alpha^{kl}(X) \eta_k \beta_l) \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta^{+i} \partial_i \alpha^{jk}(X) \beta_j \beta_k - \frac{1}{4} \eta^{+i} \wedge \eta^{+j} \partial_i \partial_j \alpha^{kl}(X) \beta_k \beta_l, \end{aligned}$$



Inoltre  $S_{\text{BV}}$  è BRST chiusa, i.e. soddisfa  $\delta S_{\text{BV}} = 0$ , che equivalente a dire che soddisfa la classical quantum equation. Mostriamo questo fatto sfruttando il formalismo dei supercampi nella prossima sezione.

Con una regolarizzazione appropriata del Laplaciano BV, si può dimostrare che  $\Delta S_{\text{BV}} = 0$ . Applicando tale operatore all'azione, gli unici termini che contribuiscono devono contenere per ogni campo il rispettivo anticampo, quindi:

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{BV}} &= \Delta \int_D X_i^+ \alpha^{ij}(X) \beta_j - \eta^{+i} \wedge \partial_i \alpha^{kl}(X) \eta_k \beta_l - \frac{1}{2} \beta^{+i} \partial_i \alpha^{jk}(X) \beta_j \beta_k \\ &= (1 - 2 + 1)C \int_D \partial_i \alpha^{ij}(X) \beta_j dv \\ &= 0,\end{aligned}$$

dove  $C$  è una costante a priori infinita. Il fattore numerico tiene in considerazione il contributo del primo termine (1), del secondo termine ( $-2$  in quanto la uno forma  $\eta_i$  ha due componenti) e il terzo termine (1). Anche se  $C$  tende all'infinito, i termini si cancellano per ogni valore di  $C$  e quindi l'identità è supposta valere anche rimuovendo la regolarizzazione.

Concludiamo con qualche osservazione sulle condizioni al contorno. La regola per avere consistenza è che gli anticampi devono avere condizioni duali rispetto ai campi. Le condizioni al contorno per i campi sono: per  $u \in \partial D$ ,  $\beta_i(u) = 0$  e  $\eta_i(u)$  si annulla sui vettori tangenti al bordo. Quindi  $\beta^{+i}(u) = 0$  e  $\eta_i^+(u)$  si annulla sui vettori normali al bordo.

### 2.3.1 Superformalismo

Un modo per semplificare la notazione e di conseguenza i calcoli, è quello di effettuare delle combinazioni di campi e anticampi a formare entità dette *supercampi*. Questo nome indica semplicemente che c'è una dipendenza sia da variabili "normali" che da variabili *anticommutanti*: nel nostro caso i supercampi sono funzione delle coordinate pari  $u^1, u^2$  su  $D$  e delle corrispondenti coordinate dispari  $\theta^1, \theta^2$ . Un supercampo  $\phi$  ha quindi la forma seguente  $\phi(u, \theta) = \phi^{(0)}(u) + \theta^\mu \phi_\mu^{(1)}(u) + \theta^\mu \theta^\nu \frac{1}{2} \phi_{\mu\nu}^{(2)}$ . Le sue componenti sono una funzione scalare  $\phi^{(0)}$ , una 1-forma  $\phi^{(1)} = \phi_\mu^{(1)} du^\mu$  e una 2-forma  $\phi^{(2)} = \frac{1}{2} \phi_{\mu\nu}^{(2)} du^\mu \wedge du^\nu$ . I campi di grado totale zero (grado di forma più ghost number) possono essere combinati tra loro a dare un supercampo pari  $X^i$ , le "supercoordinate".

$$X^i = X^i + \theta^\mu \eta_\mu^{+i} - \frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \beta_{\mu\nu}^{+i},$$

mentre i campi con grado totale uno, si combinano e dare una "1-superforma"  $\eta_i$ :

$$\eta_i = \beta_i + \theta^\mu \eta_{i,\mu} + \frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu X_{i,\mu\nu}^+.$$

Come vedremo nel capitolo 3,  $D = \theta^\mu \partial / \partial u^\mu$  agisce come il differenziale di De Rham sulle singole componenti dei supercampi. Definisco l'azione dell'operatore BRST  $\delta$  sulle funzioni dei supercampi  $X^i$ ,  $\eta_i$  secondo le seguenti regole:

$$\delta X^i = DX^i + \pi^{ij}(X)\eta_j, \quad (2.23)$$

$$\delta \eta_i = D\eta_i + \frac{1}{2} \partial_i \pi^{jk}(X)\eta_j \eta_k. \quad (2.24)$$

Con questa definizione, l'azione di  $\delta$  sui campi (i.e. le componenti dei supercampi) è identica a quella ottenuta in precedenza. Per ricavare le espressioni esplicite è sufficiente inserire nelle (2.23) le formula per  $X^i$  e  $\eta_i$  e sviluppare il tensore di Poisson  $\pi$  al secondo ordine nelle variabili anticommutanti  $\theta^\mu$ . Si trova così un supercampo le cui componenti sono una funzione, una 1-forma e una 2-forma: la funzione è la variazione BRST di  $X$ , la 1-forma è la variazione BRST di  $\eta^+$  e infine la 2-forma la variazione di  $\beta^+$ . Seguendo questa ricetta si ottengono:

$$\begin{aligned} \delta X^i &= \pi^{ij}(X)\beta_j, \\ \delta \eta^{+i} &= -dX^i - \pi^{ij}(X)\eta_j - \partial_k \pi^{ij}(X)\eta^{+k}\beta_j, \\ \delta \beta^{+i} &= -d\eta^{+i} - \pi^{ij}(X)X_j^+ + \frac{1}{2} \partial_k \partial_l \pi^{ij}(X)\eta^{+k} \wedge \eta^{+l}\beta_j \\ &\quad + \partial_k \pi^{ij}(X)\eta^{+k} \wedge \eta_j + \partial_k \pi^{ij}(X)\beta^{+k}\beta_j. \end{aligned}$$

Allo stesso modo dalla variazione BRST di  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \delta \beta_i &= \frac{1}{2} \partial_i \pi^{kl}(X)\beta_k \beta_l, \\ \delta \eta_i &= -d\beta_i - \partial_i \pi^{kl}(X)\eta_k \beta_l - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \pi^{kl}(X)\eta^{+j} \beta_k \beta_l, \\ \delta X_i^+ &= d\eta_i + \partial_i \pi^{kl}(X)X_k^+ \beta_l - \partial_i \partial_j \pi^{kl}(X)\eta^{+j} \wedge \eta_k \beta_l + \frac{1}{2} \partial_i \pi^{kl}(X)\eta_k \wedge \eta_l \\ &\quad - \frac{1}{4} \partial_i \partial_j \partial_p \pi^{kl}(X)\eta^{+j} \wedge \eta^{+p} \beta_k \beta_l - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \pi^{kl}(X)\beta^{+j} \beta_k \beta_l. \end{aligned}$$

Inoltre, l'identità di Jacobi implica che  $\delta^2 = 0$ .

L'azione di Batalin–Vilkovisky può essere scritta come l'integrale

$$S_{BV} = \int_D L^{(2)}$$

della componente di  $L$  corrispondente ad una 2-forma. Un modo per isolarla è effettuare l'integrale grassmaniano su tutte le variabili odd, e visto che una forma di grado due è anche di grado massimo, otteniamo  $L^{(2)} = \int d^2\theta L$ . L'azione in termini dei supercampi è magicamente data dalla semplice:

$$L = \eta_i DX^i + \frac{1}{2} \pi^{ij}(X)\eta_i \eta_j.$$

Dobbiamo verificare che è BRST chiusa, cioè che soddisfa la master equation. Infatti:

$$\delta L = (\delta\eta_i)DX^i + \delta\eta_i D(\delta X^i) + \frac{1}{2}\partial_l\pi^{ij}(X)\delta X^l\eta_i\eta_j + \pi^{ij}(\delta\eta_i)\eta_j,$$

e sostituito le variazioni BRST di  $X^i$  e  $\eta_i$  si ottiene che

$$\delta L = D(\eta_i DX^i),$$

quindi  $\delta L^{(2)}$  è il differenziale di una forma che si annulla sul bordo:

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{BV}} &= \int d^2\theta \int_D \delta L = \\ &= \int_D \delta L^{(2)} = \int_D D(\eta_i DX^i) = 0\end{aligned}\quad (2.25)$$

Prima di poter passare al calcolo dei propagatori, necessari per la valutazione perturbativa dell'integrale funzionale, dobbiamo dare gli ultimi ritocchi all'azione: manca ancora il *gauge fixing*. Nell'ottica del formalismo BV questo equivale alla scelta di una sottovarietà lagrangiana definita attraverso un fermione di gauge fixing dalla relazione  $\phi_\alpha^+ = \bar{\partial}_{\phi\alpha}\Psi$  (per qualche parola in più si veda il capitolo 1) sulla quale l'integrale funzionale è ben definito come serie perturbativa. Gli ingredienti necessari oltre al fermione di gauge fixing sono i campi *antighost* e i moltiplicatori di Lagrange, insieme con i relativi anticampi.

Scegliamo un gauge che generalizza il tipico gauge di Lorenz dell'elettromagnetismo:  $d*\eta_i = 0$ . L'operatore star (\*) di Hodge agisce come  $*du^1 = du^2$ ,  $*du^2 = -du^1$  in termini di coordinate standard su  $\mathbb{R}^2$ . Poi introduciamo gli antighosts (campi scalari anticommutanti)  $\gamma^i$  su  $D$  con ghost number  $-1$ , e i moltiplicatori di Lagrange  $\lambda^i$ , anch'essi campi scalari, con ghost number zero, e infine introduciamo i rispettivi anticampi come prescritto dalla procedura BV:  $\gamma_i^+$ ,  $\lambda_i^+$ . La condizione al contorno per  $\lambda^i$  è di Dirichlet:  $\lambda^i(u) = 0$ ,  $u \in \partial D$ , mentre  $\gamma^i$  è costante sul bordo. L'azione per questi campi è data da  $-\int_D \lambda^i \gamma_i^+$ . L'azione dell'operatore BRST è:

$$\delta\lambda = \delta\gamma^+ = 0, \quad \delta\lambda^+ = -\gamma^+, \quad \delta\gamma = \lambda.$$

Questa aggiunta all'azione soddisfa ancora la master equation. La condizione di gauge fixing  $d*\eta = 0$  è contenuta nel fermione di gauge fixing  $\Psi = -\int_D d\gamma^i * \eta_i$ . Sulla sottovarietà lagrangiana abbiamo quindi  $X^+ = \beta^+ = \lambda^+ = 0$ ,  $\gamma_i^+ = d*\eta_i$  e  $\eta^{+i} = *d\gamma^i$ . La condizione al contorno per  $\gamma^i$  è stata scelta in maniera da soddisfare le condizioni al contorno di  $\eta^+$ . L'azione tenendo conto del gauge scelto è quindi:

$$\begin{aligned}S_{\text{gf}} &= \int_D \eta_i \wedge dX^i + \frac{1}{2}\pi^{ij}(X)\eta_i \wedge \eta_j - *d\gamma^i \wedge (d\beta_i + \partial_i\pi^{kl}(X)\eta_k\beta_l) \\ &\quad - \frac{1}{4}*d\gamma^i \wedge *d\gamma^j \partial_i\partial_j\pi^{kl}(X)\beta_k\beta_l - \lambda^i d*\eta_i.\end{aligned}$$

### 2.3.2 Propagatori e Sviluppo perturbativa

In questa sezione vediamo finalmente il Poisson Sigma Model in azione, dopo gli assaggi che abbiamo avuto lavorando con delle versioni semplificate (??), siamo finalmente in grado di derivare la fomula di Kontsevich attraverso la quantizzazione funzionale.

L'ultimo strumento che ancora manca alla nostra cassetta sono i *propagatori*; essi possono essere dedotti dalla parte cinetica dell'azione con il termine di gauge fixing:

$$\begin{aligned} S_{\text{gf}}^0 &= \int_D \eta_i \wedge d\xi^i - *d\gamma^i \wedge d\beta_i - \lambda^i d*\eta_i \\ &= \int_D \eta_i \wedge (d\xi^i + *d\lambda^i) + \beta_i d*d\gamma^i. \end{aligned}$$

Gli altri termini dell'azione sono considerati come perturbazioni e li raccogliamo tutti nel termine  $S_{\text{gf}}^1$ . Dobbiamo invertire gli operatori  $d \oplus *d : \Omega^0(D) \oplus \Omega_0^0(D) \rightarrow \Omega^1(D)$  e  $d*d : \Omega^0(D) \rightarrow \Omega^2(D)$ .  $\Omega^p(D)$  è lo spazio delle  $p$ -forme su  $D$  e  $\Omega_0^0(D)$  lo spazio delle funzioni con condizioni di Dirichlet  $\lambda^i(u) = 0, u \in \partial D$ . entrambi gli operatori sono suriettivi ma hanno un kernel monodimensionale formato dalle funzioni costanti. Qui mettiamo a frutto tutta la nostra conoscenza dei modelli banali studiati nel capitolo 2.2.2. Gli inversi sono operatori integrali e per descriverli in maniera più convincente mappiamo il disco nel semipiano superiore  $H_+$  con una trasformazione conforme<sup>1</sup>. Il kernel integrale di  $(d*d)^{-1}$  è la funzione di Green  $\frac{1}{2\pi}\psi(z, w)$ , con

$$\psi(z, w) = \ln \left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right|.$$

Il kernel integrale di  $(d \oplus *d)^{-1}$  è invece la funzione di green  $G(w, z) = \frac{1}{2\pi}(*d_z\psi(z, w) \oplus d_z\phi(z, w))$ , dove  $d_z = dz\frac{\partial}{\partial z} + d\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  è il differenziale rispetto a  $z$  e

$$\phi(z, w) = \frac{1}{2i} \ln \frac{(z-w)(z-\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})(\bar{z}-w)},$$

I propagatori dunque sono:

$$\langle \gamma^k(w)\beta_j(z) \rangle = \frac{i\hbar}{2\pi} \delta_j^k \psi(z, w), \quad \langle \xi^k(w)\eta_j(z) \rangle = \frac{i\hbar}{2\pi} \delta_j^k d_z\phi(z, w),$$

$$\langle \lambda^k(w)\eta_j(z) \rangle = \frac{i\hbar}{2\pi} \delta_j^k *d_z\psi(z, w).$$

Osserviamo che  $*d_w\psi(z, w) = d_w\phi(z, w)$  quindi  $\langle *d\gamma^k(w)\beta_j(z) \rangle = \delta_j^k \frac{i\hbar}{2\pi} d_w\phi(z, w)$ . La verifica è semplice algebra sapendo che  $*dw = -idw$  e  $*d\bar{w} = id\bar{w}$ . Da

<sup>1</sup>La mappa che fa al caso nostro è  $f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$

questa osservazione segue che i propagatori possono essere scritti come il *superpropagatore*

$$\langle \xi^k(w)\eta_j(z) \rangle + \langle *d\gamma^k(w)\beta_j(z) \rangle = \frac{i\hbar}{2\pi} \delta_j^k d\phi(z, w),$$

con  $d = d_z + d_w$ . In termini di supercampi  $\boldsymbol{\eta}_j(z, \theta) = \beta_j(z) + \theta^\mu \eta_{j,\mu}(w)$ ,  $\boldsymbol{\xi}^k(w, \zeta) = \xi^k(w) + \zeta^\mu \eta_\mu^{+j}(w)$ , con  $\eta^{+j} = *d\gamma^j$ , il superpropagatore si scrive

$$\langle \boldsymbol{\xi}^k(w, \zeta) \boldsymbol{\eta}_j(z, \theta) \rangle = \frac{i\hbar}{2\pi} \delta_j^k D\phi(z, w),$$

Dove  $D = \theta^\mu \frac{\partial}{\partial z^\mu} + \zeta^\mu \frac{\partial}{\partial w^\mu}$ .

Lo sviluppo perturbativo alla Feynman è una serie di potenze in  $\hbar$  attorno alla soluzione classica  $X(u) = x$ ,  $\eta(u) = 0$ . Separiamo la parte cinetica dell'azione da quella di interazione  $S_{\text{gf}} = S_{\text{gf}}^0 + S_{\text{gf}}^1$  e effettuiamo il classico sviluppo della teoria dei campi:

$$\int e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{gf}}} \mathcal{O} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{\hbar^n n!} \int e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{gf}}^0} (S_{\text{gf}}^1)^n \mathcal{O}.$$

Questa espressione può essere calcolata in termini dei propagatori grazie al teorema di Wick per gli integrali gaussiani

$$\begin{aligned} & \int e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{gf}}^0} \boldsymbol{\xi}^{k_1}(w_1, \zeta_1) \cdots \boldsymbol{\xi}^{k_N}(w_N, \zeta_N) \boldsymbol{\eta}_{j_1}(z_1, \theta_1) \cdots \boldsymbol{\eta}_{j_N}(z_N, \theta_N) \delta_x(X(\infty)) \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \langle \boldsymbol{\xi}^{k_{\sigma(1)}}(w_{\sigma(1)}, \zeta_{\sigma(1)}) \boldsymbol{\eta}_{j_1}(z_1, \theta_1) \rangle \cdots \langle \boldsymbol{\xi}^{k_{\sigma(N)}}(w_{\sigma(N)}, \zeta_{\sigma(N)}) \boldsymbol{\eta}_{j_N}(z_N, \theta_N) \rangle. \end{aligned}$$

Il fattore  $\delta_x(X(t)) = \prod_{i=1}^d \delta(X^i(t) - x^i) \gamma^i(t)$  fissa il valore dei modi di punto zero (funzioni costanti) di  $X$  e le  $\gamma$  sono necessarie altrimenti l'integrale sarebbe nullo.

Espandendo il termine di interazione in potenze di  $\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\eta}$  si ottengono i vertici:

$$S_{\text{gf}}^1 = \frac{1}{2} \int_D \int d^2\theta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{\xi}^{j_1} \cdots \boldsymbol{\xi}^{j_k} \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_k} \pi^{ij}(x) \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_j. \quad (2.26)$$

Essendo la teoria non lineare esistono un numero infinito di vertici differenti. L'integrale bereziniano seleziona la componente 2-forma dell'azione. Per ottenere la formula di Konstevich consideriamo l'osservabile:

$$\mathcal{O} = f(X(1))g(X(0))\delta_x(X(\infty)), \quad (2.27)$$

con  $f, g \in C^\infty(M)$ . Espandendo  $f$  e  $g$  in potenze di  $\boldsymbol{\xi}$  otteniamo una somma di diagrammi di Feynman. Scriviamo la formula generale, esplicita. É

sconvenientemente ingombrante ma da essa si coglie con facilità la struttura generale di un diagramma:

$$\begin{aligned}
 f \star g(x) &= \int DXD\boldsymbol{\eta} e^{\frac{i}{\hbar} S_{\text{gf}}^0} \times \\
 &\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{i^n}{\hbar^n n!} \left( \frac{1}{2} \int_D \int d^2\theta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{\xi}^{j_1} \dots \boldsymbol{\xi}^{j_k} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} \pi^{ij}(x) \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_j \right)^n \right] \times \\
 &\left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \boldsymbol{\xi}^{\alpha_1} \dots \boldsymbol{\xi}^{\alpha_m} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_m} f(x) \right] \times \left[ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \boldsymbol{\xi}^{\beta_1} \dots \boldsymbol{\xi}^{\beta_p} \partial_{\beta_1} \dots \partial_{\beta_p} g(x) \right]
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Da questa formula si legge che i punti esterni, associati alle due funzioni  $f$  e  $g$ , accettano un numero qualsiasi di linee entranti, mentre i vertici hanno due linee uscenti (associate ai due  $\boldsymbol{\eta}$ ), e un numero qualsiasi di linee entranti (associate alle  $\boldsymbol{\xi}$ ).

I termini con  $n$  vertici sono etichettati dai diagrammi di Kontsevich  $\Gamma$  di ordine  $n$ , con in più la possibilità di avere *tadpoles*, linee che iniziano e finiscono sullo stesso vertice. I propagatori forniscono i pesi:

$$\frac{1}{n!} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{2^n} \left( \frac{i\hbar}{2\pi} \right)^{2n} \int \wedge_{j=1}^n d\phi(u_j, u_{v_1(j)}) \wedge d\phi(u_j, u_{v_2(j)}) = (-1)^n w_\Gamma,$$

Il fattore  $1/\prod k_j!$ , dove  $k_j$  è il numero di linee che entrano in  $j$ , è compensato dal fatto che ci sono altrettanti termini che secondo il teorema di Wick danno lo stesso contributo poichè  $k_j$  degli argomenti di  $\boldsymbol{\xi}$  sono uguali tra loro.

La serie perturbativa quindi coincide termine a termine con quella di Kontsevich: restano i diagrammi con propagatori che partono e terminano sullo stesso vertice (tadpole) ma procediamo ed eliminarli con una procedura di rinormalizzazione nella prossima sezione.

### 2.3.3 Rinormalizzazione

Nello sviluppo perturbativo descritto prima, tutti gli integrali sono assolutamente convergenti, eccetto quelli relativi a diagrammi contenenti dei *tadpole*: quelli nei quali un lato connette un vertice a se stesso. La corrispondente ampiezza contiene la grandezza singolare  $d\phi(z, z)$ , il superpropagatore valutato in punti coincidenti. La tecnica per trattare queste divergenze in teoria dei campi è detta *rinormalizzazione*. Quello che facciamo è ridefinire il propagatore preso a punti coincidenti attraverso una opportuna procedura di limite con l'intento di eliminare in questo modo la singolarità. A questo punto è possibile rimuovere l'ambiguità legata alla rinormalizzazione cancellando i termini ad essa relativi.

Introduciamo dapprima una *regolarizzazione* e poniamo  $d\phi(z, z)$  uguale al limite

$$d\phi(z, z) = \kappa(z; \zeta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} d\phi(z, z + \epsilon\zeta(z)).$$

Dove  $\zeta(z)$  è un campo vettoriale su  $D$  che non si annulla nel suo interno. Svolgendo il limite si vede che esso esiste e dipende dal vettore di regolarizzazione  $\zeta(z)$ . Passando in coordinate polari  $\zeta(z) = r(z)e^{i\vartheta(z)}$  si ottiene

$$\kappa(z; \zeta) = d\vartheta(z).$$

Con questa regolarizzazione la singolarità del propagatore è descritta da un termine finito. Per rimuoverlo possiamo aggiungere un controtermine:

$$S_{\text{c.t.}} = \frac{i\hbar}{2\pi} \int_D \int d^2\theta \partial_i \pi^{ij}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\eta}_j \tilde{\kappa}, \quad \tilde{\kappa} = \theta^\mu \kappa_\mu, \quad (2.29)$$

o anche semplicemente scegliere  $\vartheta$  costante, in entrambi i casi rimuoviamo il contributo dei diagrammi tadpole e lo sviluppo perturbativo fornisce esattamente la formula di Kontsevich. L'azione con il controtermine aggiuntivo soddisfa ancora sia la master equation classica che quella quantistica.





## Capitolo 3

# Il metodo AKSZ

La tecnica di Batalin e Vilkovisky è il mezzo più potente fino ad ora sviluppato per la quantizzazione di una teoria classica, permette infatti di riformulare l'integrale funzionale in una forma equivalente in cui la parte quadratica dell'azione non è degenere ed affrontarne lo sviluppo perturbativo. Nonostante la procedura sia in un certo senso automatica – basta seguire passo passo la ricetta – *trovare una azione che soddisfi la master equation è un'operazione decisamente non banale*. In [1] il problema della ricerca di soluzioni della master equation viene affrontato in maniera sistematica: descriviamo ora questo risultato noto come *metodo AKSZ* (Alexandrov–Kontsevich–Schwarz–Zaboronsky).

L'approccio seguito è quello di natura più concettuale: si studiano le strutture geometriche alla base della master equation. Oltre al primario obiettivo – ottenere in questo modo delle soluzioni, si coglie finalmente la naturalezza del formalismo BV. Siamo nel contesto di teorie il cui contenuto in termini di campi è dato da mappe tra fibrati vettoriali. Il metodo AKSZ permette di introdurre in maniera naturale una struttura – *QP-structure* – sullo spazio di queste mappe, in termini della quale è possibile formulare la master equation in maniera geometrica. Per naturalezza si intende come al solito l'assenza di scelte arbitrarie, più precisamente la struttura QP deriva esclusivamente dalle strutture presenti sugli spazi *source* e *target*. In particolare, visto che il formalismo BV richiede l'uso di gradazioni per i campi, le varietà in gioco saranno più precisamente *supervarietà*.

Ci sono delle sovrapposizioni tra questo capitolo e la prima parte del capitolo 1 ma si tratta di punti di vista complementari: quello algebrico e quello geometrico.

### 3.1 Supervarietà

Per cogliere l'essenza del metodo AKSZ, non è necessario affrontare la selva di definizioni necessarie ad inquadrare formalmente il calcolo differenziale

sulle supervarietà: è sufficiente tenere in mente che una supervarietà  $N$  di tipo  $(m, n)$  è modellata localmente su  $\mathbb{R}^m \times \pi\mathbb{R}^n$ , dove  $\pi$  è il funtore di inversione di parità (1.1). L'algebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduata (esattamente come avviene per le applicazioni lineari in  $\mathbb{R}^m \times \pi\mathbb{R}^n$ ) delle funzioni lisce si denota con  $Fun(N)$ . Non è sufficiente considerare funzioni a valori in  $\mathbb{R}$ , ma bisogna prevedere la possibilità di avere come valori variabili di Grassmann di ogni ordine. Per includere tutti i casi basta ricorrere all'algebra esterna di  $\mathbb{R}$ :

$$\Lambda := \varinjlim \wedge^\bullet \mathbb{R}^k = \wedge^\bullet \mathbb{R}^\infty$$

e quindi:

$$Fun(N) = \{f : N \rightarrow \Lambda\}$$

### 3.1.1 $Q$ -strutture

Per  $Q$ -struttura su una supervarietà si intende la scelta di un campo vettoriale *odd* il cui commutatore con se stesso si annulla. Scegliendo delle coordinate locali  $\{y_1, \dots, y_n\}$ :

$$Q = Q^i \partial_i,$$

L'aggettivo *odd* significa che il grado del coefficiente è shiftato di 1 da quello del corrispondente elemento della base dei campi, in formule  $\deg Q^i \equiv \deg y_i + 1 \pmod{2}$ . Il commutatore di due supercampi omogenei è in generale definito così:

$$[A, B] = AB - (-)^{AB} BA$$

dove ad esponente si intende ovviamente il prodotto dei rispettivi *gradi*. La seconda richiesta si traduce in:

$$\begin{aligned} [Q, Q] &= [Q^i \partial_i, Q^j \partial_j] = \\ &= (Q^j \partial_j Q^i) \partial_i - (-)^{\deg Q^i \deg y_i} (Q^i \partial_i Q^j) \partial_j = \\ &= 2Q^2 = 2(Q^j \partial_j Q^i) \partial_i = 0. \end{aligned}$$

Questo semplice calcolo dice che la scelta di una  $Q$ -struttura è equivalente alla scelta di un differenziale sulla algebra  $Fun(N)$ , un'altra variante di questa affermazione è chiamare il campo vettoriale  $Q$  *coomologico*.

Una fabbrica di esempi sono le varietà differenziali — e gli oggetti da esse ottenuti — se viene applicato sapientemente il funtore di inversione di parità  $\pi$ : sia  $N = \pi T\Sigma$  il fibrato tangente a  $M$  a cui è stata invertita la parità di ogni fibra per mezzo di  $\pi$ . Questa è la varietà source per la formulazione AKSZ del Poisson Sigma Model. Per definizione l'algebra delle funzioni lisce di  $\pi T\Sigma$  è isomorfa all'algebra delle forme differenziali su  $\Sigma$  a valori in  $\Lambda$ . Scrivendo esplicitamente chi è  $\wedge^\bullet \Sigma$

$$\wedge^\bullet \Sigma = C^\infty(\Sigma) \oplus \wedge^1 \Sigma \oplus \dots \oplus \wedge^n \Sigma$$

è facile ricordare il perchè della definizione: il primo fattore include la parte funzionale dipendente da variabili ordinarie mentre i fattori successivi descrivono la dipendenza da variabili di Grassmann. Infine, il prodotto tensore serve per avere come codominio l'algebra  $\Lambda$ . Sia dunque l'isomorfismo

$$Fun(\pi T\Sigma) \simeq \wedge^\bullet \Sigma \otimes \Lambda$$

realizzato dalla applicazione  $\phi$ :

$$\phi : Fun(\pi T\Sigma) \rightarrow \wedge^\bullet \Sigma \otimes \Lambda.$$

Il differenziale universale, i.e. la derivata esterna, sull'algebra delle forme induce una  $Q$ -struttura su  $Fun(\pi T\Sigma)$  data dal campo vettoriale odd  $D$  definito da  $Df := \phi^{-1}(d\phi(f))$ . Per avere un'espressione esplicita di questa struttura conviene scegliere un sistema di coordinate  $\{u^1, \dots, u^s\}$ , le cui variabili odd associate sono le  $\{\theta^1, \dots, \theta^s\}$ , e considerare una funzione qualsiasi in  $Fun(\pi T\Sigma)$ . Applicando  $\phi$  e il differenziale:

$$\phi(f) \xrightarrow{d} du_i \frac{\partial \phi(f)}{\partial u^i}$$

ma dato che i  $du_i$  anticommutano fra loro deve valere  $\phi^{-1}(du_i) = \theta^i$ . Ora non resta che scrivere esplicitamente l'azione di  $D$  sulla funzione  $f$

$$\phi^{-1}d\phi(f) = \theta^i \frac{\partial}{\partial u^i} f$$

e si ottiene infine l'espressione coordinata per il  $Q$ -vettore  $D$ :

$$D = \theta^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}.$$

In particolare è manifesto che  $D$  è un campo vettoriale *odd*: vale infatti  $\deg \theta^i \equiv \deg u_i + 1 \pmod{2}$ .

Un altro esempio di vettore coomologico si ottiene a partire dall'inserzione  $\iota_v$  di un campo vettoriale  $v$ . La  $Q$ -struttura è data da:

$$K_v := \phi^{-1} \iota_v \phi = v^\mu(u) \frac{\partial}{\partial \theta^\mu},$$

come si ottiene seguendo un ragionamento simile al precedente; anche questa volta dall'espressione coordinata è evidente che  $K_v$  è *odd*.

Nella geometria differenziale i due operatori  $d$  e  $\iota$  danno origine ad una importante derivazione, la derivata di Lie. Questo fatto rientra perfettamente in questo schema; definita la derivata di Lie  $L_v$  per i supercampi tramite  $L_v := [D, K_v]$ , si ottiene la corrispondenza  $L_v = \phi^{-1} L_v \phi$ .

### 3.1.2 $P$ -strutture

Una  $P$ -struttura è data da una *forma simplettica odd* su una supervarietà. La definizione di odd è molto simile a quella del caso precedente, ma vediamo in dettaglio. Un modo di definirla è dire che essa induce un parentesi di Poisson odd sull'algebra delle funzioni.

In coordinate locali una struttura simplettica si può scrivere con la seguente utile notazione:

$$\omega = \frac{1}{2} dy^i \omega_{ij} dy^j,$$

dove si è tralasciato il simbolo  $\wedge$  e si intende che i prodotti vadano eseguiti seguendo la regola del segno di Koszul:

$$dy^i dy^j = -(-1)^{\deg y_i \deg y_j} dy^j dy^i.$$

Una forma simplettica sarà di tipo *even* se il grado del coefficiente è uguale alla somma dei gradi dei corrispondenti elementi della base,  $\deg \omega_{ij} \equiv \epsilon_i + \epsilon_j$ , di tipo *odd* se invece verifica:

$$\deg \omega_{ij} \equiv \deg y_i + \deg y_j + 1.$$

Come al solito, la struttura simplettica mi permette di associare ad ogni funzione  $f$  un campo vettoriale  $X_f$ , definito in maniera tale da soddisfare la relazione  $\iota_{X_f} \omega = df$ .

In aggiunta a quanto succede nella geometria simplettica non gradata, si ha in questa situazione che l'assegnazione:

$$f \mapsto X_f$$

conserva il grado (odd o even) se la forma simplettica è even, lo inverte se è odd. Anche la definizione del bracket indotto dalla struttura simplettica si arricchisce in questo contesto graduato: una forma even dà luogo all'usuale parentesi di Poisson gradata, mentre una nel caso odd il bracket — le cui proprietà sono quelle della parentesi BV — dà luogo ad un'algebra di Gerstenhaber (altro nome per chiamare un'algebra di BV). In entrambi i casi la definizione è:

$$(f, g) := X_f(g) = \iota_{X_f} \iota_{X_g} \omega.$$

Un utile esempio — lo spazio *target* del Poisson Sigma Model — di varietà dotata di una struttura simplettica odd è dato da  $N = \pi T^*M$ : la sua algebra di funzioni si indentifica con l'algebra dei campi multivettoriali a valori in  $\Lambda$ :

$$Fun(N) = Fun(\pi T^*M) \simeq T^\bullet(M) \otimes \Lambda \quad (3.2)$$

La forma simplettica odd canonica su  $\pi T^*M$  è data, avendo scelto delle coordinate  $x^1, \dots, x^m$  e le loro rispettive controparti odd  $p_1, \dots, p_m$ , si scrive

$\omega = dp_i dx^i$ , in completa analogia con quanto accade in meccanica classica sullo spazio delle fasi. In questo caso, essendo le coordinate  $p_1, \dots, p_m$  odd, la forma simplettica risulta essa stessa odd. Il bracket indotto sull'algebra delle funzioni diviene la parentesi di Schouten-Nijenhuis [40] quando rivisto attraverso l'isomorfismo  $Fun(N) = \pi T^*M \simeq T^\bullet(M) \otimes \Lambda$ .

### 3.1.3 $QP$ -structures

Come suggerisce la poco fantasiosa nomenclatura, una varietà  $QP$  è dotata di un campo vettoriale coomologico e di una struttura simplettica, entrambe di tipo odd. Per evitare che questi due mondi siano indifferenti tra loro, si chiedono delle *condizioni di compatibilità*: un campo vettoriale  $Q$  è compatibile con una struttura simplettica  $\omega$  se quest'ultima è invariante sotto l'azione della famiglia di diffeomorfismi generata da  $Q$ . Semplicemente, la richiesta di compatibilità è che valga  $L_Q \omega = d\iota_Q \omega = 0$ , dove si è usato il fatto che  $\omega$  è chiusa.

**Definizione 3.1.1.** *Una varietà  $QP$  è una supervarietà con strutture  $P$  e  $Q$  compatibili. Se queste sono determinate da una forma simplettica odd  $\omega$  e da un campo vettoriale odd  $Q$ , deve valere*

$$d\iota_Q \omega = 0.$$

Seguendo la nomenclatura della meccanica classica e della geometria di Poisson, diciamo che il campo vettoriale  $Q$  è *hamiltoniano* se esiste una funzione  $S$  tale che  $\iota_Q \omega = dS$ . Considero ora la master equation  $(S, S) = 0$ : nelle ipotesi attuali si possono distinguere due casi corrispondenti alla parità di  $S$ . Se  $S$  è dispari — caso non interessante dal punto di vista fisico, infatti l'azione deve essere pari — è automaticamente soddisfatta:

$$(S, S) = \iota_Q \iota_Q \omega = \omega(Q, Q) = 0$$

visto che  $\omega$  è di tipo odd. Se invece  $S$  è pari si ottiene immediatamente la costanza della parentesi di  $BV$  di  $S$  con se stessa. Infatti, denotando con  $X_f$  il campo hamiltoniano associato ad una funzione  $f$ , si ha:

$$X_{(S, S)} = [X_S, X_S] = [Q, Q] = 0$$

da cui segue  $(S, S) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Affinchè la master equation sia soddisfatta bisogna fare l'ulteriore assunzione che l'azione  $S$  ammetta un punto critico. In questo caso, da  $dS(x) = 0$  con  $x$  punto critico, segue immediatamente  $(S, S) = 0$ , poichè la parentesi di  $BV$  è un operatore differenziale del primo ordine.

Supponiamo che la varietà  $\pi T^*M$  sia dotata di un campo multivettoriale even  $\alpha$  tale che  $[\alpha, \alpha] = 0$  dove la parentesi è quella di Schouten-Nijenhuis. Grazie all'isomorfismo 3.2 posso vedere  $\alpha$  come una funzione su  $N$  il cui

campo hamiltoniano  $Q$  agisce come  $[\alpha, -]$ , è odd e commuta con se stesso. In particolare nel Poisson Sigma Model  $\alpha$  è un bivettore di Poisson che visto come funzione in coordinate locali si scrive:

$$S_\alpha(x, p) = \frac{1}{2}\alpha^{ij}(x)p_ip_j. \quad (3.3)$$

Data questa espressione per  $S$  è facile vedere chi è il rispettivo campo hamiltoniano  $Q$ . Supponiamo che sia

$$Q = A^j(x, p)\frac{\partial}{\partial x^j} + B_j(x, p)\frac{\partial}{\partial p_i},$$

Posso calcolare  $\iota_Q\omega$  in due modi differenti:

$$\begin{aligned} \iota_Q\omega &= dS_\alpha = \frac{1}{2}d(\alpha^{ij}(x)p_ip_j) = \\ &= \frac{1}{2}d\alpha^{ij}(x)p_ip_j + \alpha^{ij}(x)p_idp_j = \\ &= \partial_l\alpha^{ij}(x)p_ip_jdx_l + \alpha^{ij}(x)p_idp_j, \\ \iota_Q\omega &= \iota_Qdp_idx^i = \\ &= dp_idx^i(A^j(x, p)\frac{\partial}{\partial x^j} + B_j(x, p)\frac{\partial}{\partial p_i}) = \\ &= A^i(x, p)dp_i + B_i(x, p)dx^i, \end{aligned}$$

confrontando le due espressioni segue l'espressione coordinata di  $Q$ :

$$Q_\alpha(x, p) = \alpha^{ij}(x)p_j\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\partial_i\alpha^{jk}p_jp_k\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

### 3.1.4 Sulle misure

Una *misura*  $\mu$  su una supervarietà  $N$  di tipo  $(m, n)$  è un funzionale su  $Fun(N)$  che è nullo su tutte le componenti di grado omogeneo minore di  $n$  nelle coordinate anticommutanti, i.e. di grado non massimo - questa richiesta è compatibile con la definizione dell'integrale grassmaniano (che i matematici chiamano di Berezin) che si trova in tutti i libri di teoria dei campi. Qualche definizione. E' detta *nondegenere* se la sua composizione con il prodotto da luogo ad una forma bilineare non degere su  $Fun(N)$  — analogo del prodotto scalare più elementare che si introduce in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dato un campo vettoriare  $D$  su  $N$ , la misura  $\mu$  è detta *D-invariante* se

$$\int_N Df \mu = 0, \forall f \in Fun(N)$$

Alcune varietà sono dotate di una misura naturale: ad esempio su  $N = \pi T\Sigma$  si può definire una misura canonica  $\mu$  grazie all'usuale isomorfismo

$\phi$  (vedi (3.2)) e sfruttando l'integrazione delle forme differenziali, che in analogia all'integrazione di Berezin è nulla sulle forme di grado non massimo:  $\int_{\pi T\Sigma} f \mu = \int_{\Sigma} \phi(f)$ ,  $f \in Fun(\pi T\Sigma)$ .

Questa misura è compatibile con il campo vettoriale  $D = \theta^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}$ , esso svolge il ruolo di differenziale nella rivisitazione del teorema di Stokes nel contesto delle supervarietà. Sia  $\Sigma$  dotato di bordo  $\partial\Sigma$ , siano  $\mu^\partial$  la misura canonica su  $\pi T\partial\Sigma$  e  $i_\partial$  l'inclusione  $\pi T\partial\Sigma \hookrightarrow \pi T\Sigma$  indotta da  $\partial\Sigma \hookrightarrow \Sigma$ . Sempre grazie alla  $\phi$ , il *teorema di Stokes* assume questa forma:

$$\int_{\pi T\Sigma} Df \mu = \int_{\pi T\partial\Sigma} i_\partial^* f \mu^\partial. \quad (3.5)$$

In particolare se  $\Sigma$  non ha bordo, allora la misura è  $D$ -invariante.

Con una misura è possibile costruire una mappa molto interessante tra spazi di forme, una mappa di complessi  $\mu_*: \Omega^\bullet(N \times L) \rightarrow \Omega^\bullet(L)$  dove gli spazi di supporto sono supervarietà e  $\mu$  una misura su  $N$ . Per ottenere un risultato del genere si capisce che la misura deve essere utilizzata per eliminare la dipendenza da  $N$  attraverso una integrazione. Per ogni valore di  $k$  una buona definizione è la seguente:

$$(\mu_*\omega)(z)(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \int_{y \in N} \omega(y, z)(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mu(y),$$

con  $z \in L$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in T_z L$ . Se la dimensione odd di  $N$  è pari, allora  $\mu_*$  preserva la parità, altrimenti la inverte. Per la definizione di mappa tra complessi vale  $d\mu_* = \mu_*d$ , quindi la  $D$ -invarianza può essere espressa, ricorrendo all'innalzamento  $D_1$  del campo vettoriale  $D$  da  $N$  a  $N \times L$  con la relazione  $\mu_* L_{D_1} = 0$ . Usando queste notazioni è possibile dare la versione infinitesima del teorema di Stokes nel caso interessante in cui  $N = \pi T\Sigma$ :

$$\mu_* L_{D_1} = \mu_*^\partial (\iota_\partial \times \text{id})^*, \quad (3.6)$$

per districare espressioni di questo tipo, è sempre buona cosa disegnare un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(\pi T\Sigma \times L) & \xrightarrow{L_{D_1}} & \Omega^\bullet(\pi T\Sigma \times L) \\ (\iota_\partial \times \text{id})^* \downarrow & & \mu_* \downarrow \\ \Omega^\bullet(\pi T\Sigma \times L) & \xrightarrow{\mu_*^\partial} & \Omega^\bullet(L). \end{array} \quad (3.7)$$

### 3.1.5 Gradazioni: da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}$

Finora ci siamo ristretti a considerare algebre con una gradazione  $\mathbb{Z}_2$ , in altre parole gli oggetti omogenei erano o pari o dispari. Con poco sforzo si sarebbe potuto lavorare fin da principio con una gradazione più generale data dai numeri naturali: nel caso di algebre di forme differenziali basta considerare

il grado della forma, mentre per quanto riguarda le superfunzioni omogenee si prende come riferimento il grado del sottospazio vettoriale di  $\Lambda$  in cui prendono valori. Anche seguendo questo approccio non avremmo ottenuto una teoria sufficientemente generale per le applicazioni al formalismo  $BV$  che vogliamo sviluppare: sono necessari oggetti geometrici con grado *negativo*. Più avanti vedremo un esempio di quando questa necessità diviene evidente in maniera elementare.

Per ottenere una  $\mathbb{Z}$ -gradazione si ricorre ad un trucco piuttosto formale. L'idea intuitiva è la seguente: si costruisce un'algebra prendendo tante copie dell'algebra originale ed etichettandole un numero intero, in questo modo c'è sufficiente "spazio" anche per elementi di grado negativo. Sarà necessario qualche accorgimento, precisamente definire l'azione di  $\mathbb{Z}_2$  su questa algebra e selezionarne le parti invarianti, per mantenere la compatibilità con la precedente gradazione che distingue solo tra even e odd.

Vediamo ora i dettagli.  $A$  è  $\mathbb{Z}_2$ -gradata, dunque può essere vista come somma diretta delle sue due componenti omogenee:  $A = A_+ \oplus A_-$ . Considero ora l'algebra

$$A[\mathbb{Z}] := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} A[j] = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (A_+[j] \oplus A_-[j])$$

in cui  $A[j]$  è una copia di  $A$ .  $A[\mathbb{Z}]$  è l'algebra delle funzioni  $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow A$  a supporto finito. Su  $A[\mathbb{Z}]$  è definita l'azione di  $\mathbb{Z}_2$  descritta da

$$\begin{cases} \epsilon n = (-1)^n n, \forall n \in \mathbb{Z} \\ \epsilon a = a, \forall a \in A_+ \\ \epsilon a = -a, \forall a \in A_- \end{cases}$$

dove  $\epsilon \in \mathbb{Z}_2$  è l'elemento non banale. Denoto con  $A[\mathbb{Z}]^{\mathbb{Z}_2}$  la parte invariata di  $A[\mathbb{Z}]$  rispetto all'azione appena definita: questa richiesta seleziona di ogni  $A[j]$  la parte pari, o dispari, se  $j$  è pari, o dispari. In conclusione:

$$A := A[\mathbb{Z}]^{\mathbb{Z}_2} = A_+[2\mathbb{Z}] \oplus A_-[2\mathbb{Z} + 1],$$

con notazione succinta:

$$A = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

dove

$$\begin{aligned} A_{2j} &= A_+[2j], \\ A_{2j+1} &= A_-[2j + 1]. \end{aligned}$$

Un elemento di  $A_j$  ha *ghost number*  $j$ , sarebbe a dire che il ghost number è il grado di un elemento nell'algebra  $\mathbb{Z}$ -gradata  $A$ . L'inclusione di  $A$  in  $A$  si ottiene mandando  $A_+$  in  $A_0$  e  $A_-$  in  $A_1$ .



Vediamo un caso più generale, dove compare un'algebra bigradata. Sia l'algebra  $A = \Omega^\bullet(N)$ , dove  $N$  è la supervarietà  $\pi E$  ottenuta da un fibrato vittoriale tramite inversione di parità sulla fibra. La costruzione precedente fornisce l'algebra bigradata  $\Omega^\bullet(N)$ . La mappa di complessi  $\mu_*$  si estende a:

$$\mu_* : \Omega^\bullet(N \times L) \rightarrow \Omega^\bullet(L)$$

e abbassa il ghost number di  $n$  se il fibrato  $\pi E$  ha rango  $n$ .

Torniamo ai campi vettoriali  $D$  e  $K_v$  definiti in precedenza.  $D$  ha ovviamente ghost number uguale a 1,  $K_v$  invece ha ghost number -1. Dalla sua espressione in coordinate  $v^\mu(u) \frac{\partial}{\partial \theta^\mu}$  si deduce la relazione  $\deg v^i \equiv \deg \theta_i - 1$ . Per quanto riguarda il campo vettoriale  $Q$  si può subito dire che il suo ghost number è 1 essendo generato da una funzione di ghost number 0 e da una forma simplettica di ghost number 1. In termini di gradazione  $\mathbb{Z}$  un vettore  $Q$  definisce una  $Q$ -struttura se, oltre ad essere odd e commutante con se stesso, ha in particolare ghost number uguale a 1. Per quanto riguarda la struttura simplettica definente la  $P$ -struttura, si richiede che il suo grado sia dispari.

## 3.2 Spazi di Mappe

La costruzione di AKSZ permette di definire una struttura  $QP$  sullo spazio  $Y^X$  delle mappe lisce tra supervarietà da  $X$  a  $Y$ . L'interesse in spazi di questo tipo è dato dal fatto che le variabili dinamiche nelle teorie di campo sono proprio elementi di spazi di questo genere.

I diffeomorfismi di  $X$  e  $Y$ , agiscono su  $Y^X$  rispettivamente da destra e da sinistra, le due azioni commutano tra loro: con notazione ovvia, il risultato dell'applicazione di queste azioni a  $f : X \rightarrow Y$  la forma tipica  $\psi_Y \circ f(\psi_X(x))$ . A livello infinitesimo questo si traduce nell'esistenza del lift di campi vettoriali su  $X$  e  $Y$  a campi su  $Y^X$ .

### 3.2.1 $Q$ -strutture, $P$ -strutture e $QP$ -struttura indotta da $Y$

Iniziamo col descrivere le  $Q$ -strutture che possono essere indotte sullo spazio di mappe  $Y^X$  a partire da  $Q$ -strutture presenti su  $X$  e  $Y$ . In questo caso l'ipotesi più semplice è quella corretta: la struttura  $Q$  generica sarà una combinazione lineare dei lift dei campi vettoriali odd anticommutanti presenti sulle due varietà source e target.

È possibile caratterizzare lo spazio tangente in un punto di  $Y^X$  come le sezioni di un certo fibrato. Dato il punto  $f : X \rightarrow Y$  posso spostarmi attorno ad esso ottenendo la funzione  $f + t\epsilon$ , segue che per ogni  $x \in X$ ,  $\epsilon(x) \in T_{f(x)}Y$ , in altre parole  $\epsilon$  è sezione del fibrato  $f^*TY$ . Tutto questo equivale a:

$$T_f Y^X \simeq \Gamma(X, f^*TY).$$

Dunque un campo vettoriale su  $Y^X$  assegna ad ogni  $x \in X$  e ogni  $f \in Y^X$  un elemento di  $T_{f(x)}Y$ . Il lift  $\check{Q}$  di  $Q$  è subito definito:

$$\check{Q}(x, f) = Q(f(x)).$$

Osservando che  $df(x) : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  si capisce che la giusta definizione del lift di  $D$  è:

$$\hat{D}(x, f) = df(x)(D(x)).$$

$\hat{D}$  e  $\check{Q}$  sono odd e autocommutanti se lo sono  $D$  e  $Q$ , quindi una loro combinazione lineare definisce una  $Q$ -struttura su  $Y^X$ .

Preoccupiamoci ora di come può essere indotta una struttura  $P$ . Sia  $\mu$  una misura nondegenere su  $X$  e  $\omega$  una struttura simplettica su  $Y$ . La evaluation map:

$$\begin{aligned} X \times Y^X &\rightarrow Y, \\ (x, f) &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

induce la mappa di complessi  $\mu_* \text{ev}^* : \Omega^\bullet(Y) \rightarrow \Omega^\bullet(Y^X)$  che attraverso l'integrazione abbassa il ghost number di  $n$  se  $X$  è una  $(m, n)$ -supervarietà. E' utile visualizzare l'applicazione in successione di queste mappe:

$$\Omega^\bullet(Y) \xrightarrow{\text{ev}^*} \Omega^\bullet(X \times Y^X) \xrightarrow{\mu_*} \Omega^\bullet(Y)$$

Ora ci sono gli ingredienti necessari per definire una forma simplettica  $\omega$  sullo spazio delle mappe  $Y^X$ :

$$\omega := \mu_* \text{ev}^* \omega.$$

Affinchè  $\omega$  sia di tipo odd assumiamo  $\omega$  even se  $n$  è dispari, altrimenti odd - questa scelta sempre legata alle proprietà della mappa  $\mu_*$ .

$\check{Q}$  è compatibile con  $\omega$ :

$$\iota_{\check{Q}} \omega = \iota_{\check{Q}} \mu_* \text{ev}^* \omega = \mu_* \text{ev}^* \iota_Q \omega \implies d\iota_{\check{Q}} \omega = 0$$

dove la prima uguaglianza segue dalla commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(Y) & \xrightarrow{\mu_* \text{ev}^*} & \Omega^\bullet(Y^X) \\ \iota_Q \downarrow & & \downarrow \iota_{\check{Q}} \\ \Omega^\bullet(Y) & \xrightarrow{\mu_* \text{ev}^*} & \Omega^\bullet(Y^X), \end{array}$$

verificata grazie alla definizione di  $\check{Q}(x, f) = Q(f(x))$ . Se inoltre  $Q$  è hamiltoniano con funzione  $S$  allora  $\check{Q}$  è hamiltoniano con funzione

$$\check{S} = \mu_* \text{ev}^* S. \quad (3.8)$$

Indichiamo con  $(, )$  la parentesi di Gerstenhaber indotta da  $\omega$  su  $\text{Fun}(Y^X)$ .

**Proposizione 3.2.1.**  $\mu_*\text{ev}^*: (\text{Fun}(Y), (\cdot, \cdot)) \rightarrow (\text{Fun}(Y^X), (\cdot, \cdot))$  è un omomorfismo di algebre di Lie.

*Dimostrazione.*  $\mu_*\text{ev}^*$  è un omorfismo di algebre, basta quindi verificare che preserva il bracket. Siano  $F$  e  $G$  due funzioni su  $Y$ , sia  $Q$  il campo vettoriale hamiltoniano di  $F$ . Per definizione  $(F, G) = \iota_Q dG$ . Inoltre,  $\tilde{Q}$  è il campo vettoriale hamiltoniano di  $\mu_*\text{ev}^*F$ . Il seguente semplice calcolo mostra che la mappa  $\mu_*\text{ev}^*$  preserva il bracket, e quindi la proposizione è vera.

$$(\mu_*\text{ev}^*F, \mu_*\text{ev}^*G) = \iota_{\tilde{Q}} d\mu_*\text{ev}^*G = \mu_*\text{ev}^* \iota_Q dG = \mu_*\text{ev}^*(F, G).$$

□

Questa proposizione è cruciale nell'applicazione del metodo AKSZ, è infatti questa proprietà della mappa  $\mu_*\text{ev}^*$  che permetterà di ottenere le soluzioni della master equation.

### 3.2.2 La struttura $QP$ di ASKZ

Fino ad ora sullo spazio delle mappe abbiamo introdotto due strutture: la struttura  $Q$  data dal campo vettoriale  $\mathbb{Q} := \hat{D} + \tilde{Q}$  e la struttura  $P$  data dalla forma simplettica odd  $\omega$ . Inoltre sappiamo anche che  $(\tilde{Q}, \omega)$  è una  $QP$ -struttura. La struttura  $QP$  di AKSZ è invece data dalla coppia  $(\mathbb{Q}, \omega)$ , per verificare che quest'affermazione è sensata e sufficiente a questo punto verificare che  $\hat{D}$  è compatibile con  $\omega$ . Iniziamo con un lemma

**Lemma 3.2.2.** *Se  $\mu$  è  $D$ -invariante, allora  $L_{\hat{D}} \mu_*\text{ev}^* = 0$ .*

*Dimostrazione.* Dall'invarianza per diffeomorfismi  $\phi$  di  $X$

$$\text{ev}(\phi^{-1}(x), f \circ \phi) = \text{ev}(x, f)$$

segue le relazione infinitesima

$$L_{D_1} \text{ev}^* = L_{\hat{D}_2} \text{ev}^*,$$

dove  $D_1$  e  $\hat{D}_2$  sono i lifts dei campi vettoriali  $D$  e  $\hat{D}$  alla varietà  $X \times Y^X$ . Abbiamo già osservato in precedenza che, dalla definizione di  $\mu_*$ , segue  $\iota_{\hat{D}} \mu_* = \mu_* \iota_{\hat{D}_2}$ . Da queste identità otteniamo:

$$\begin{aligned} L_{\hat{D}} \mu_*\text{ev}^* &= (d\iota_{\hat{D}} + \iota_{\hat{D}} d) \mu_*\text{ev}^* = \mu_*(d\iota_{\hat{D}_2} + \iota_{\hat{D}_2} d) \text{ev}^* = \\ &= \mu_* L_{\hat{D}_2} \text{ev}^* = \mu_* L_{D_1} \text{ev}^* = 0. \end{aligned}$$

perchè  $\mu_* L_{D_1} = 0$  per la  $D$ -invarianza della misura. □

Questo lemma è valido nel caso di  $\pi T\Sigma$  equipaggiato con la misura canonica solo nel caso in cui  $\Sigma$  non ha bordo, in queste ipotesi è verificata la  $D$ -invarianza.

Possiamo ora enunciare il risultato principale legato al metodo AKSZ, esso fornisce una azione sullo spazio delle mappe  $Y^X$  che soddisfa la master equation nell'ipotesi in cui i campi vettoriali che definiscono la  $Q$ -struttura siano hamiltoniani.

**Teorema 3.2.3.** *Siano i campi  $D$  sulla  $(m, n)$ -varietà  $X$  e  $Q$  su  $Y$  delle  $Q$ -strutture,  $\mu$  una misura  $D$ -invariante non degenera su  $X$  e  $\omega$  una forma simplettica su  $Y$  (con parità opposta a quella di  $n$ ).*

1.  $(\hat{D} + \check{Q}, \omega)$  è una  $QP$ -struttura sullo spazio di mappe  $Y^X$ ;
2. Se  $\omega = d\vartheta$ , allora  $\hat{D}$  è hamiltoniano e la sua funzione hamiltoniana è

$$\hat{S} = -\iota_{\hat{D}}\vartheta,$$

con  $\vartheta = \mu_*\text{ev}^*\vartheta$ ;

3. Se inoltre anche  $Q$  ammette funzione  $S$ , allora  $(\hat{S}, \check{S}) = 0$ . In particolare  $\mathcal{S} = \hat{S} + \check{S}$  soddisfa la master equation  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}) = 0$ .

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda il primo punto, resta solo da verificare la compatibilità dalla  $P$ -struttura con il campo  $\hat{D}$ . Ma questa è ovvia conseguenza del lemma precedente, infatti  $L_{\hat{D}}\omega = L_{\hat{D}}\mu^*\text{ev}\omega = 0$ .

La seconda affermazione segue da un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} d\hat{S} &= -d\iota_{\hat{D}}\vartheta = \\ &= -L_{\hat{D}}\vartheta + \iota_{\hat{D}}d\vartheta = \\ &= \iota_{\hat{D}}\mu^*\text{ev}d\vartheta = \iota_{\hat{D}}\omega \end{aligned}$$

dove si è trascurato  $L_{\hat{D}}\vartheta$  in quanto per la condizione di compatibilità è una costante che può essere imposta uguale a zero tramite una ridefinizione di  $\vartheta$ .

Infine, per quanto riguarda il terzo punto:

$$X_{(\hat{S}, \check{S})} = [X_{\hat{S}}, X_{\check{S}}] = [\hat{D}, \check{Q}] = 0,$$

le altre parentesi si annullano utilizzando il fatto che  $\mu^*\text{ev}$  è un omomorfismo di algebre di Lie.  $\square$

Per brevità e chiarezza si è scelto di non introdurre nell'enunciato del teorema la richiesta che  $S$  abbia un almeno un punto critico, osservazione già fatta in precedenza.

### 3.2.3 Generalizzazione a varietà con bordo

Oltre ad avere un interesse proprio, la generalizzazione della costruzione AKSZ a varietà source dotate di bordo è necessaria per la sua applicazione alla versione del Poisson Sigma Model che fornisce la formula per il prodotto star di Kontsevich. Come osservato nel paragrafo precedente, il Lemma 3.2.2 non è valido nel caso lo spazio base  $\Sigma$  della varietà source  $\pi T\Sigma$  abbia bordo, in quanto la misura canonica è spogliata della  $D$ -invarianza. È chiaro che la generalizzazione del Lemma 3.2.2 sarà caratterizzata dalla comparsa di *termini di bordo*.

**Lemma 3.2.4.** *Sia  $\mu^\partial$  la misura canonica su  $\pi T\partial\Sigma$ ,  $i_\partial$  l'inclusione canonica  $\pi T\partial\Sigma \hookrightarrow \pi T\Sigma$  indotta dall'inclusione del bordo in  $\Sigma$ . Sia*

$$\text{ev}_\partial^* = (i_\partial \times \text{id})^* \text{ev}^* : \Omega^\bullet(Y) \rightarrow \Omega^\bullet(\pi T\partial\Sigma \times Y^{\pi T\Sigma}).$$

Allora

$$L_{\hat{D}} \mu_* \text{ev}^* = \mu_*^\partial \text{ev}_\partial^*.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è indentica a quella del Lemma 3.2.2, con l'accortezza di considerare i termini di bordo

$$L_{\hat{D}} \mu_* \text{ev}^* = \mu_* L_{\hat{D}_2} \text{ev}^* = \mu_* L_{D_1} \text{ev}^* = \mu_*^\partial (i_\partial \times \text{id})^* \text{ev}^* = \mu_*^\partial \text{ev}_\partial^*$$

come suggerito dalla formulazione infinitesima del teorema di Stokes (3.6):

$$\mu_* L_{\hat{D}_2} = \mu_*^\partial (i_\partial \times \text{id})^*$$

□

Come sempre, è utile visualizzare la composizione

$$\mu_*^\partial \text{ev}_\partial^* = \mu_*^\partial (i_\partial \times \text{id})^* \text{ev}^* :$$

attraverso il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(Y) & \xrightarrow{\text{ev}^*} & \Omega^\bullet(\pi T\Sigma \times Y^{\pi T\Sigma}) & \xrightarrow{(i_\partial \times \text{id})^*} \\ & \longrightarrow & \Omega^\bullet(\pi T\partial\Sigma \times Y^{\pi T\Sigma}) & \xrightarrow{\mu_*^\partial} \Omega^\bullet(Y^{\pi T\Sigma}) \end{array}$$

Da ora in avanti assumiamo che la  $P$ -struttura sia data da  $\omega = d\vartheta$ , i.e. che esiste ammette potenziale simplettico. Usando le duali delle evaluation map, definisco le due forme:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \mu_* \text{ev}^* \vartheta & \in & \Omega^1(Y^{\pi T\Sigma}) \\ \tau &= \mu_*^\partial \text{ev}_\partial^* \vartheta & \in & \Omega^1(Y^{\pi T\Sigma}) \end{aligned}$$

In particolare  $\vartheta$  è odd mentre  $\tau$  è even. Che cos'è la 1-forma  $\tau$ ? È l'ostruzione all'avere  $\hat{D}$  hamiltoniano. Infatti, dal lemma 3.2.4, usando la solita definizione algebrica della derivata di Lie, si ottiene:

$$\iota_{\hat{D}}\omega = \iota_{\hat{D}}d\vartheta = -d\iota_{\hat{D}}\vartheta + \tau. \quad (3.9)$$

Per ovviare a questo inconveniente una soluzione è quella di restringerci ai luoghi degli zeri  $\mathcal{C}$  di  $\tau$  che può essere descritto come il luogo degli zeri comuni di un certo insieme di funzioni. Infatti una forma differenziale ha uno zero in punto se si annulla quando valutata su un qualsiasi vettore tangente in quel punto; per trovare una conveniente descrizione di  $\mathcal{C}$  basta ora ricordare che nel contesto infinito dimensionale in cui stiamo lavorando, i punti non sono altro che i morfismi  $f : X \rightarrow Y$ . Per ogni campo vettoriale  $\xi$  su  $Y^{\pi T\Sigma}$ , definisco la funzione  $H_\xi := \iota_\xi\tau$ ; l'osservazione precedente sugli zeri di  $\tau$  si traduce in:

$$\mathcal{C} = \{f \in Y^{\pi T\Sigma} : H_\xi(f) = 0 \forall \xi\}.$$

$H_\xi(f)$  dipende solo dai valori che  $\xi(f)$ , visto come elemento di  $\Gamma(\pi T\Sigma, f^*TY)$ , assume su  $\partial\Sigma$ . Per convincersi di questo basta scrivere esplicitamente  $H_\xi(f)$ :

$$\begin{aligned} H_\xi(f) &:= \iota_\xi\tau(f) = \tau(f)(\xi_f) = (\mu_*^{\partial} \text{ev}_\partial^* \vartheta)(f)(\xi_f) = \\ &= \int_{\pi T\partial\Sigma} (\text{ev}_\partial^* \vartheta)(x, f)(\xi_f) \mu^\partial(x) = \\ &= \int_{\pi T\partial\Sigma} \xi^i(f, x) \vartheta_i(x, f) \mu^\partial(x) = \\ &= \int_{\pi T\partial\Sigma} \langle \xi(f, x), \vartheta(x, f) \rangle \mu^\partial(x). \end{aligned}$$

dove le parentesi angolari denotano il pairing canonico tra campi e forme su  $Y$ . Quindi  $H_\xi(f)$  dipende solo dai valori che  $\xi(f)$  assume su  $\pi T\partial\Sigma$ . Indicando con  $Z(\vartheta)$  il luogo degli zeri di  $\vartheta$ , possiamo scrivere

$$\mathcal{C} = \{f \in Y^{\pi T\Sigma} : \iota_\partial^* f(\pi T\partial\Sigma) \subset Z(\vartheta)\}.$$

Infatti,  $\iota_\partial^* f$  è una mappa definita su  $\pi T\partial\Sigma$  e ne considero l'immagine  $\iota_\partial^* f(\pi T\partial\Sigma)$ : se è contenuta in  $Z(\vartheta)$  allora  $H_\xi(f) = 0 \forall \xi$ . L'inverso è ovvio.

La costruzione appena effettuata è tuttavia troppo singolare, infatti alle funzioni  $H_\xi$  non corrisponde alcun campo vettoriale su  $Y^{\pi T\Sigma}$ . Il nostro intento è quello di prendere in considerazione la parte di  $Y^{\pi T\Sigma}$  costituita dall'insieme degli zeri comuni delle  $H_\xi$  — i.e. il luogo degli zeri di  $\tau$  — e procedere considerando il quoziente attraverso la foliazione generata da questi campi hamiltoniani, in modo da ottenere una nuova  $P$ -varietà dove  $\hat{D}$  è hamiltoniano. Infatti tale varietà sarebbe costituita da classi di equivalenza di punti che appartengono al kernel di  $\tau$ , che quindi scomparirebbe dall'equazione di ostruzione.

Per sviluppare questa idea, dobbiamo introdurre una *regolarizzazione* delle funzioni  $H_\xi$ . Scegliamo un intorno aperto  $U$  di  $\partial\Sigma$  con l'intenzione prenderne il limite in cui coincide con il bordo dopo aver fatto le manipolazioni necessarie. Prendiamo su  $U$  una coordinata normale al bordo  $x_n$  con corrispondente coordinata odd  $\theta_n$ ) e definiamo la forma su  $U$

$$\tau^U = \mu_*^U(\text{ev}_U^* \vartheta \theta_n),$$

Grazie alla coordinata odd  $\theta_n$  e all'integrazione di Berezin, siamo in grado di rimuovere da  $\tau^U$  la dipendenza da dalla componente normale dei vettori tangenti a  $U$ . Questo accorgimento ci permetterà in seguito di prendere il limite per  $U$  che diventa piccolo in maniera consistente.

Sia ora  $\mathfrak{X}^U$  lo spazio dei campi vettoriali  $\xi$  su  $Y^{\pi T\Sigma}$  tali che  $\xi(f)$ , vista come sezione in  $\Gamma(\pi T\Sigma, f^*TY)$ , ha supporto  $U$  per ogni  $f \in Y^{\pi T\Sigma}$ . Definisco l'altro ingrediente necessario per passaggio al limite:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^U &= \{f \in Y^{\pi T\Sigma} : H_\xi^U(f) = 0 \forall \xi \in \mathfrak{X}^U\} \\ &= \{f \in Y^{\pi T\Sigma} : \theta_n f(\pi TU) \subset Z(\vartheta)\}. \end{aligned}$$

Il seguente lemma si dimostra considerando campi vettoriali

$$\xi(f, u) = \rho(x_n) \tilde{\xi}(f, u),$$

con  $\tilde{\xi}$  indipendente da  $x_n$  e  $\theta_n$ .

**Lemma 3.2.5.** *Per ogni due intorni  $U$  e  $V$  con  $U \subset V$ , vale  $\mathcal{C}^V \subset \mathcal{C}^U$ . inoltre,  $\mathcal{C}^U \subset \mathcal{C}$  per ogni intorno  $U$ .*

Il campi hamiltoniani relativi alle  $H_\xi^U$  sono proporzionali a  $\theta_n$ , come si ottiene dalla espressione esplicita di  $H_\xi^U$ . Quindi la loro applicazione ad una qualsiasi  $H_\xi^U$  è zero grazie a  $(\theta_n)^2 = 0$ . Questo significa che la distribuzione dei campi hamiltoniani generati dalle funzioni  $H_\xi^U$  è in particolare involutiva. Seguendo il procedimento di *riduzione simplettica*<sup>1</sup> è possibile quindi definire un nuovo  $P$ -spazio considerando il quoziente di  $\mathcal{C}^U$  ottenuto dalla foliazione generata da campi vettoriali hamiltoniani associati ad ogni  $H_\xi^U$ . Indichiamo lo spazio così ottenuto  $Y^{\pi T\Sigma}/\tau^U$ . A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per enunciare e dimostrare il teorema che generalizza la procedura AKSZ al caso di varietà con bordo.

**Teorema 3.2.6.** *Con le notazioni e ipotesi introdotte:*

1.  $\hat{D}$  è hamiltoniano su  $Y^{\pi T\Sigma}/\tau^U$  e la sua funzione hamiltoniana  $\hat{S} = -\iota_{\hat{D}} \vartheta$  soddisfa.  $(\hat{S}, \hat{S}) = 0$ .

<sup>1</sup>Il procedimento di riduzione simplettica è descritto in dettaglio nel prossimo capitolo, dove viene affrontato il problema nel caso più generale delle varietà di Poisson.

2. Se anche  $Q$  è hamiltoniano e la sua funzione generatrice  $S$  è localmente costante sul luogo degli zeri di  $\vartheta$ , allora la restrizione di  $\check{S}$  a  $\mathcal{C}^U$  è una funzione invariante. Di conseguenza  $\check{S}$  induce una funzione sullo spazio  $Y^{\pi T\Sigma} // \tau^U$ . Inoltre  $(\hat{S}, \check{S}) = 0$  still holds if  $(S, S) = 0$ .
3. Se invece  $S$  è nulla sul luogo degli zeri di  $\vartheta$  ed ammette un punto critico, allora  $(\hat{S}, \check{S}) = 0$ . In particolare,  $S = \hat{S} + \check{S}$  soddisfa la master equation  $(S, S) = 0$ .

*Dimostrazione.* Il primo punto segue da (3.9) e dal lemma 3.2.5. Dobbiamo verificare che  $\hat{S}$  ristretto a  $\mathcal{C}^U$  è invariante. Questo fatto segue dalle indentità:

$$(\hat{S}, H_\xi^U) = L_{\hat{D}} \iota_\xi \tau^U = L_{[\hat{D}, \xi]} \tau^U \pm \iota_\xi L_{\hat{D}} \tau^U = 0.$$

L'ultima uguaglianza è verificata su  $\mathcal{C}^U$  in quanto  $[\hat{D}, \xi] \in \mathfrak{X}^U$  per  $\xi \in \mathfrak{X}^U$  e per il fatto che la restrizione di  $\text{ev}_U^* \vartheta \theta_n$  a  $\pi T\partial U$  si annulla (avendo imposto  $\theta_n = 0$ ). Infine,  $(\hat{S}, \check{S}) = -L_{\hat{D}} \iota_{\hat{D}} \vartheta = \iota_{\hat{D}} L_{\hat{D}} \vartheta = \iota_{\hat{D}} \tau = 0$ .

Per quanto riguarda il secondo punto, indichiamo con  $\theta_n X$  il campo vettoriale hamiltoniano di  $H_\xi^U$ . Visto che  $X(f, \bullet)$  ha supporto in  $U$ , si ha

$$(H_\xi^U, \check{S})(f) = \int_{\pi TU} \theta_n X^i(f, u) \partial_i S(f(u)) \mu.$$

D'altra parte, se ci restringiamo a  $\mathcal{C}^U$ , allora  $\theta_n f(u)$  appartiene al luogo degli zeri di  $\vartheta$  per tutti i  $u \in U$ , e  $S$  è costante su esso per ipotesi. In conclusione,  $(H_\xi^U, \check{S}) = 0$ .

Dato che i campi  $\hat{D}$  e  $\check{Q}$  commutano, la parentesi  $(\hat{S}, \check{S})$  è costante. Dal lemma 3.2.4 segue:

$$(\hat{S}, \check{S}) = L_{\hat{D}} \check{S} = \mu_*^\partial \text{ev}_\partial^* S = 0,$$

dove l'ultima uguaglianza è intesa su  $\mathcal{C}$  (e quindi su  $\mathcal{C}^U$ ) poichè  $f(u)$  appartiene di  $\vartheta$  per  $u \in \partial\Sigma$ , e  $S$  è nulla in esse per ipotesi.  $\square$

L'applicazione di questo teorema alla valutazione perturbativa di un integrale di cammino può essere fatta in due modi. Il primo è quello di definire l'integrale funzionale su  $Y^{\pi T\Sigma} // \tau^U$  per un certo intorno  $U$  e passare al limite per  $U$  che diventa piccolo dopo aver calcolato i propagatori. Un altro approccio possibile è quello di fissare degli elementi rappresentativi in  $Y^{\pi T\Sigma} // \tau^U$  come elementi di  $\mathcal{C}^U$  sottoposti a condizioni aggiuntive, indichiamo questo spazio — isomorfo a  $Y^{\pi T\Sigma} // \tau^U$  — con  $\tilde{\mathcal{C}}^U$ . Definiamo  $\tilde{\mathcal{C}}$  come  $\bigcup \tilde{\mathcal{C}}^U$ : allora l'integrale di cammino può essere calcolato via integrazione su una sottovarietà lagrangiana (gauge fixing) di  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

Il metodo AKSZ induce una azione classica *a posteriori* per la quale la funzione  $S$  è l'azione classica di BV, cioè soddisfa la master equation. Per



ricavarla bisogna distinguere le componenti di  $f : X \rightarrow Y$  in base al ghost number. Le componenti con ghost number non negativo sono i *campi*, le altre sono dette *anticampi*; tra i campi ci sono i *campi classici* — con ghost number zero — e i *ghost*. L'azione classica  $S^{\text{cl}}$  si ottiene da  $S$  mettendo tutti gli anticampi a zero. L'azione del campo vettoriale  $Q$  genera le simmetrie infinitesime della teoria, i.e. è l'*operatore BRST*.

### 3.3 Applicazione al Poisson Sigma Model — $P\sigma M$

Applichiamo ora il metodo AKSZ, in particolare la sua generalizzazione, al Poisson Sigma Model: siano  $\Sigma$  e  $M$  due varietà ordinarie,  $\Sigma$  bidimensionale. Gli ingredienti necessari sono:  $X = \pi T\Sigma$  dotato della misura canonica  $\mu$  e di una struttura  $Q$  data dal campo vettoriale  $D = \theta^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}$ ,  $Y = \pi T^*M$  equipaggiato con una struttura simplettica canonica odd  $\omega$ . Con le scelte fatte, visto che  $\omega$  ha ghost number 1, otterremo una azione  $S$  avente ghost number uguale a zero.

A differenza del Poisson Sigma Model classico sto lavorando con campi dati da *mappe tra supervarietà* e non da *mappe tra fibrati*. Per trovare le corrispondenze con l'approccio già sviluppato tramite il formalismo BV, descrivo gli elementi di  $Y^X$  come coppie  $(X, \eta)$  con

$$X : \pi T\Sigma \rightarrow M$$

e  $\eta \in \Gamma(\pi T\Sigma, X^* \pi T^*M)$ .

$$\begin{array}{ccc} X^* \pi T^*M & \xrightarrow{X^*} & \pi T^*M \\ \pi_{\pi T\Sigma} \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ \pi T\Sigma & \xrightarrow{X} & M \end{array}$$

Quindi per ogni punto  $p$  di  $\pi T\Sigma$ ,  $\eta$  è a valori nella fibra sopra  $X(p)$  che è di grado odd. Da questa analisi segue che la decomposizione  $(X, \eta)$  è naturale,  $X$  è a valori even, mentre  $\eta$  è a valori odd. In coordinate:

$$\begin{aligned} X &= X + \theta^\mu \eta_\mu^+ - \frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu \beta_{\mu\nu}^+, \\ \eta &= \beta + \theta^\mu \eta_\mu + \frac{1}{2} \theta^\mu \theta^\nu X_{\mu\nu}^+, \end{aligned}$$

con  $X$  una mappa ordinaria  $X : \Sigma \rightarrow M$  e le altre componenti di ghost number tali per cui  $X$  sia even e  $\eta$  sia odd. Data una connessione su  $X^* \pi T^*M$ ,

le varie componenti sono:

$$\begin{aligned}\eta^+ &\in \Gamma(\Sigma, T^*\Sigma \otimes X^*TM) \otimes \Lambda_-[-1], \\ \beta^+ &\in \Gamma(\Sigma, \wedge^2 T^*\Sigma \otimes X^*TM) \otimes \Lambda_+[-2], \\ \beta &\in \Gamma(\Sigma, X^*T^*M) \otimes \Lambda_-[1], \\ \eta &\in \Gamma(\Sigma, T^*\Sigma \otimes X^*T^*M) \otimes \Lambda_+[0], \\ X^+ &\in \Gamma(\Sigma, \wedge^2 T^*\Sigma \otimes X^*T^*M) \otimes \Lambda_-[-1],\end{aligned}$$

Quindi i campi classici sono  $X$  e  $\eta$ , l'unico ghost è  $\beta$ , e tutte le altre componenti sono anticampi. Tramite la forma symplettica  $\omega$ , i supercampi  $X$  e  $\eta$  sono coniugati tra loro. In termini di componenti, ogni campo è canonicamente coniugato al corrispondente anticampo, in maniera consistente con la notazione (+) introdotta.

La forma symplettica canonica è esatta:  $\omega = d\vartheta$ ; scegliamo  $\vartheta = p_i dx^i = \langle p, dx \rangle$ , dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è il pairing canonico tra i vettori e i covettori di  $M$ , e definiamo  $\vartheta = \mu^* \text{ev}^* \vartheta$  come nelle sezioni precedenti.

Lo spazio tangente di  $Y^X$  ha uno splitting:

$$T(\pi T^* M^{\pi T \Sigma}) = \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{E}$$

dato da vettori “nella direzione di  $X$  e nella direzione di  $\eta$ ”. Preso un punto qualunque  $f = (X, \eta)$  e variando prima solo la componente  $X$  e poi solo quella  $\eta$  si conclude:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_{(X, \eta)} &= T_{(X, \eta)} M^{\pi T \Sigma} \simeq \Gamma(\pi T \Sigma, X^* T M), \\ \mathfrak{E}_{(X, \eta)} &= T_{(X, \eta)} \Gamma(\pi T \Sigma, X^* \pi T^* M) \simeq \Gamma(\pi T \Sigma, X^* \pi T^* M).\end{aligned}$$

Grazie a questo splitting è possibile dare una descrizione più esplicita della forma  $\omega$ . Per qualsiasi  $\xi \in \mathfrak{X}_{(X, \eta)}$  e  $e \in \mathfrak{E}_{(X, \eta)}$ :

$$\vartheta(X, \eta)(\xi \oplus e) = (\mu_* \text{ev}^* \vartheta)(X, \eta)(\xi \oplus e) = \quad (3.10)$$

$$= \int_{\pi T \Sigma} (\text{ev}^* \vartheta)(X, \eta)(\xi \oplus e) \mu = \quad (3.11)$$

$$= \int_{\pi T \Sigma} \langle dX, \eta \rangle (\xi \oplus e) \mu = \quad (3.12)$$

$$= \int_{\pi T \Sigma} \langle \xi, \eta \rangle \mu. \quad (3.13)$$

### 3.3.1 La struttura $QP$ e l'azione classica

Come nelle sezioni precedenti definiamo una  $Q$ -struttura su  $Y^X$  a partire dalle  $Q$ -strutture su  $X$  e su  $Y$ .

Su  $Y = \pi T^* M$  cerco un campo vettoriale hamiltoniano di ghost number 1, in questo modo il campo indotto su  $Y^X$  avrà ghost number -1. Dato che

$\omega$  ha ghost number 1, questo significa che dobbiamo cercare una funzione hamiltoniana  $S$  su  $Y$  di ghost number 2, cioè una funzione corrispondente ad un campo bivettoriale commutante con se stesso rispetto alla parentesi di Schouten-Nijenhuis: cioè un campo bivettoriale  $\alpha$  di Poisson su  $Y$ . Definiamo  $S_\alpha$  come in (3.3):

$$S_\alpha(x, p) = \frac{1}{2} \alpha^{ij}(x) p_i p_j .$$

$S$  induce una funzione  $\check{S}_\alpha$  su  $Y^X$  data da:

$$\check{S}_\alpha(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}) = (\mu_* ev^* \alpha)((\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta})) = \frac{1}{2} \int_{\pi T\Sigma} (\alpha \circ \mathbf{X})(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \mu .$$

Su  $X = \pi T\Sigma$  scelgo come  $Q$ -vettore  $D$  indotto dal differenziale canonico  $d$  sulle forme su  $\Sigma$ . Definisco  $\hat{S} = -\iota_{\hat{D}} \boldsymbol{\vartheta}$  da cui

$$\begin{aligned} \hat{S}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}) &= -(\iota_{\hat{D}} \boldsymbol{\vartheta})(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}) = \\ &= - \int_{\pi T\Sigma} \iota_{\hat{D}_1} \langle d\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta} \rangle ; \mu, = \\ &= - \int_{\pi T\Sigma} \langle D\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta} \rangle \mu, \end{aligned}$$

dove  $D\mathbf{X}$  indica la proiezione di  $\hat{D}$  a  $\mathfrak{X}$ , e  $D_1$  è il lift di  $D$  a campo su  $X \times Y^X$ . Si è usato lo splitting dello spazio tangente allo spazio delle mappe  $Y^X$  e l'espressione esplicita per  $\boldsymbol{\vartheta}$  ottenuta alla fine del paragrafo precedente.

Dal teorema 3.2.3, la funzione  $S_\alpha = \hat{S} + \check{S}_\alpha$  soddisfa la master equation se  $\partial\Sigma = \emptyset$ . Come già asservato, possiamo riottenere la teoria classica alla quale corrisponde l'azione di BV data da  $S$  mettendo a zero tutti gli anticampi; otteniamo così la *azione classica*

$$S_\alpha^{\text{cl}} = \int_{\Sigma} \left( \langle \boldsymbol{\eta}, dX \rangle + \frac{1}{2} (\alpha \circ X)(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \right),$$

che descrive il *Poisson Sigma Model*.

### 3.3.2 Poisson Sigma Model e $\partial\Sigma \neq \emptyset$

Il caso di interesse per la deformation quantization è quello in cui la varietà sorgente  $\Sigma$  è dotata di bordo, i.e.  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ . In questo caso, il luogo degli zeri di  $\boldsymbol{\vartheta}$  è la sezione nulla di  $\pi T^*M$ , cioè la sezione corrispondente a  $p^i = 0$ ; questa osservazione è immediata conseguenza dell'espressione canonica per il potenziale simplettico che abbiamo introdotto in precedenza:  $\boldsymbol{\vartheta} = p_i dx^i = \langle p, dx \rangle$ . Quindi  $S$  soddisfa le assunzioni più stringenti del teorema 3.2.6 ed è soluzione della master equation per ogni intorno  $U$ . Per descrivere  $\mathcal{C}^U$  consideriamo le contrazioni della 1-forma odd  $\tau^U$ : ne possiamo calcolare il valore esplicito per vettori in  $\mathfrak{E}$  o in  $\mathfrak{X}$  utilizzando l'espressione per  $\boldsymbol{\vartheta}$  ricavata

all'inizio della sezione. Da ((3.10)) segue che  $\tau^U$  è nulla per ogni vettore in  $\mathfrak{E}$ , mentre per ogni vettori  $\xi$  in  $\mathfrak{X} = \xi(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}) \in \Gamma(\pi T\Sigma, X^*TM)$ , otteniamo

$$H^U = \iota \tau^U = \int_{\pi TU} \langle \xi, \boldsymbol{\eta} \rangle \theta_n \mu^U.$$

Siamo in grado ora di descrivere  $\mathcal{C}^U$  imponendo delle condizioni sulla coppia  $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta})$ ; la definizione

$$\mathcal{C}^U = \{f \in Y^{\pi T\Sigma} : \theta_n f(\pi TU) \subset Z(\vartheta)\}.$$

si traduce nella richiesta:

$$\theta_n \iota_U^* \boldsymbol{\eta} = 0.$$

Il campo hamiltoniano  $H$  corrispondente ad un campo vettoriale costante  $\xi$  è uguale a  $\xi \theta_n$ . Questo significa che, su  $\pi T^*M^{\pi T\Sigma} / \tau^U$ ,  $\mathbf{X}$  è definito a meno di traslazione nella direzione normale  $\theta_n$ . Si possono fissare dei rappresentativi di  $\mathbf{X}$  scegliendo una direzione  $n'$  trasversale a  $\partial\Sigma$  e richiedendo che componendi lungo  $n'$  di  $\mathbf{X}$  siano nulle. Con la scelta  $n' = n$ , questo significa porre  $\beta^+ = 0$  e  $\eta_{n'}^+ = 0$ . A questo punto possiamo rimuovere la regolarizzazione e lavorare sullo spazio:

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}) : \beta(u) = 0, \eta_t(u) = 0, \eta_{n'}^+(u) = 0, \beta_{n't}^+(u) = 0 \forall u \in \partial\Sigma\}, \quad (3.14)$$

dove  $t$  denota la direzione tangente a  $\partial\Sigma$  e sono state messe uguali a zero anche le componenti dei rispettivi campi coniugati.

Questo procedimento porta alla stessa azione BV e alle stesse condizioni al contorno derivate nel capitolo precedente, in quanto, come già visto nel paragrafo 2.3, l'azione  $S$  soddisfa separatamente la master equation e quindi è una azione quantistica idonea per la quantizzazione alla Batalin-Vilkovinsky. Per valutare perturbativamente l'integrale di cammino relativo alla quantizzazione di questa teoria bisogna tenere anche in conto i moltiplicatori di Lagrange e gli antighost.

La potenza e generalità del metodo AKSZ sono perfettamente illustrate da questa rapida applicazione al Poisson Sigma Model: in maniera completamente diretta, esso fornisce la soluzione al problema di determinare azione BV per una teoria il cui contenuto dinamico è espresso in termini di mappe tra supervarietà.

## Capitolo 4

# Sottovarietà Coisotrope nel $P\sigma M$

### 4.1 Sottovarietà Coisotrope

La geometria delle *sottovarietà coisotrope* è particolarmente interessante grazie al fatto che attraverso il processo di *riduzione* è possibile ottenere un'altra varietà di Poisson. Si tratta della generalizzazione della più nota riduzione simplettica. Questa è la proprietà cruciale che lega queste particolari sottovarietà ad una classe molto generale di possibili condizioni al contorno per il Poisson Sigma Model. In questa sezione dimostriamo la proprietà di riducibilità delle sottovarietà coisotrope.

Prima di tutto, un veloce riassunto sulle varietà di Poisson. Una *varietà di Poisson*  $(M, \pi)$  è una varietà  $M$  equipaggiata con un campo bivettoriale  $\pi$  tale che il bracket  $\{f, g\} := \pi(df, dg)$  è una parentesi di Lie su  $C^\infty(M)$ . Equivalentemente, il campo bivettoriale  $\pi$  su  $M$  deve soddisfare  $[\pi, \pi] = 0$  dove  $[\ , \ ]$  è la parentesi di Schouten–Nijenhuis. In coordinate locali l'identità di Jacobi per il bracket di Poisson si traduce in:

$$\pi^{ij} \partial_i \pi^{kl} + \pi^{il} \partial_i \pi^{jk} + \pi^{ik} \partial_i \pi^{lj} = 0. \quad (4.1)$$

che è esattamente l'espressione coordinata per  $[\pi, \pi] = 0$ . Il campo bivettoriale  $\pi$  induce una mappa di fibrati  $\pi^\sharp: T^*M \rightarrow TM$  nel seguente modo:

$$\langle \pi^\sharp(x)\sigma, \tau \rangle = \pi(x)(\sigma, \tau), \quad \forall x \in M, \quad \forall \sigma, \tau \in T_x^*M,$$

dove  $\langle \ , \ \rangle$  è il pairing canonico.

Due esempi estremi di strutture di Poisson sono quella banale, data da  $\pi = 0$  e quella simplettica, nel quale la forma simplettica non degenera  $\omega$  è l'inversa del tensore di Poisson  $\pi$ . Un caso intermedio particolarmente interessante è il cosiddetto caso *lineare*:  $M = \mathfrak{g}^*$ , dove  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie e il bracket sui funzionali lineari è definito dalla parentesi di Lie. Infatti

$$M = \mathfrak{g}^*, \quad f \in Fun(M) = \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{g},$$

quindi posso definirlo:

$$\{f, g\} := [f, g] \quad \forall f, g \in Fun(M) \simeq \mathfrak{g}.$$

Questa struttura di Poisson è detta di Kostant–Kirillov.

Una mappa  $\phi : (M_1, \pi_1) \rightarrow (M_2, \pi_2)$  tra due varietà di Poisson è un *morfismo di Poisson* se  $\forall f, g \in Fun(M_2)$  si ha:

$$\{f \circ \phi, g \circ \phi\}_1 = \{f, g\}_2 \circ \phi$$

Esprimendo le parentesi di Poisson della precedente relazione in termini di campi hamiltoniani, si ottiene che  $\phi$  è di Poisson se i due campi  $X_{\phi \circ f}$  e  $X_\phi$  sono  $\phi$ -correlati, i.e.  $\phi_* X_{\phi \circ f} = X_\phi$ . Inoltre, visto che  $X_f = \pi_2^\# df$  e  $X_{\phi \circ f} = \pi_1^\# d(f \circ \phi)$ , la stessa relazione può essere messa nella forma:

$$\pi_2^\# = \phi_* \circ \pi_1^\# \circ \phi^*. \quad (4.2)$$

#### 4.1.1 Distribuzioni Generalizzate e Foliazioni Caratteristiche

In generale, le varietà di Poisson sono fogliettate dalla distribuzione involutiva  $\pi^\#(T^*M)$  e ogni foglio è una varietà simplettica. Discutiamo in dettaglio questo fatto.

È chiaro che l'insieme dei campi hamiltoniani

$$\chi_\pi := \{X_f : f \in Fun(M)\} \quad (4.3)$$

gioca un ruolo fondamentale; per comprenderlo più a fondo considero lo spazio vettoriale dei vettori tangenti in un punto  $x_0$  corrispondenti ad un campo hamiltoniano:

$$\mathcal{S}_{x_0}(M) = \{v \in T_{x_0} : \exists f \in Fun(M), X_f(x_0) = v\}. \quad (4.4)$$

Visto che  $X_f = \pi^\#(df)$ , vale  $\mathcal{S}_{x_0}(M) = \text{im } \pi_{x_0}^\#$ . L'insieme di spazi lineari  $\mathcal{S}(M) = \{\mathcal{S}_{x_0}(M)\}$  è un esempio di *distribuzione generalizzata* — a differenza di una *distribuzione regolare* non è fissata la dimensione degli spazi lineari presenti nella collezione — e viene chiamata *distribuzione caratteristica* della struttura di Poisson  $\pi$ . Le definizioni di sottovarietà integrali e distribuzione completamente integrabile sono quelle usuali. In particolare si può dimostrare che anche per le distribuzioni generalizzate completamente integrabili esistono i fogli e ne passa uno e uno solo per ogni punto della varietà.

Nel contesto delle distribuzioni generalizzate il classico teorema di Frobenius non è più valido, ma esiste una semplice condizione che assicura la completa integrabilità in tutti i casi.

**Definizione 4.1.1.** Una distribuzione generalizzata  $\mathcal{S}(M)$  è detta  $\chi_0$ -invariante se:

1. esiste un insieme  $\chi_0\mathcal{S}(M)$  di campi vettoriali su  $M$  tale che  $\forall x \in M$ , i valori in  $x$  dei campi di  $\chi_0\mathcal{S}(M)$  generano lo spazio lineare  $\mathcal{S}_x(M)$ ;
2.  $\forall X \in \chi_0\mathcal{S}(M)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  e  $\forall x \in M$ , per i quali  $(\exp tX)(x)$  è definito, valga:

$$(\exp tX)_*[\mathcal{S}_x(M)] = \mathcal{S}_{(\exp tX)(x)}(M) . \quad (4.5)$$

$\chi_0\mathcal{S}(M)$  è una sorta di generalizzazione dello spazio dei campi hamiltoniani: infatti nel caso in cui  $M$  sia una varietà di Poisson e si consideri la distribuzione caratteristica, l'insieme  $\chi_0\mathcal{S}(M)$  coincide con i campi hamiltoniani. La seconda condizione è una affermazione di compatibilità della distribuzione rispetto all'azione indotta dai diffeomorfismi generati dai campi in  $\chi_0\mathcal{S}(M)$ , cioè i campi sulla distribuzione stessa.

Il seguente teorema generalizza Frobenius ed è noto come teorema di Sussmann-Stefan.

**Teorema 4.1.2.** *Una distribuzione generalizzata  $\mathcal{S}(M)$  è completamente integrabile se e solo se è una distribuzione invariante.*

*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{S}(M)$  è completamente integrabile, basta prendere  $\chi_0$  uguale allo spazio dei campi vettoriali su  $\mathcal{S}(M)$ . La condizione (4.5) è garantita dal fatto che le orbite di  $X \in \chi_0$  sono costrette sui fogli.

Dimostriamo l'implicazione inversa. Siano  $x_0 \in M$  e i campi vettoriali  $X_1, \dots, X_r \in \chi_0$  tali che la loro valutazione in  $x_0$  fornisce una base per  $\mathcal{S}_{x_0}(M)$ . Allora esiste un intorno  $W$  di  $0 \in \mathbb{R}^n$  tale che la mappa:

$$(\exp t_r X_r) \circ \dots \circ (\exp t_1 X_1)(x_0) : W \rightarrow M \quad (4.6)$$

è ben definita  $\forall (t_1, \dots, t_r) \in W$ . Questa mappa è ovviamente differenziabile e manda la base  $\frac{\partial}{\partial t_i} \Big|_0$  di  $T_0\mathbb{R}$  in  $(X_1(x_0), \dots, X_r(x_0))$ , quindi, è una immersione e genera una sottovarietà  $r$ -dimensionale di  $M$  passante per  $x_0$ . Gli spazi tangenti di questa sottovarietà sono dati dall'azione del flusso di (4.6) su  $\mathcal{S}_{x_0}$ , e la condizione di compatibilità (4.5) garantisce che gli spazi così ottenuti sono esattamente gli  $\mathcal{S}_x(M)$ .  $\square$

Ecco il teorema più interessante di questa sezione:

**Teorema 4.1.3.** *La distribuzione caratteristica  $\mathcal{S}(M)$  della varietà di Poisson  $(M, \pi)$  è completamente integrabile, inoltre la struttura di Poisson induce una struttura simplettica sui fogli di  $\mathcal{S}(M)$ .*

*Dimostrazione.* L'identità di Jacobi e la formula  $\{f, g\} = X_f g$  implicano

$$X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g] , \quad (4.7)$$

quindi  $\chi_\pi(M)$  (analogo dei campi hamiltoniani) è un'algebra di Lie ed inoltre  $\mathcal{S}(M)$  è una distribuzione involutiva. D'altra parte:

$$(\mathbf{L}_{X_h} \pi)(df, dg) = X_h(\{f, g\}) - \{X_h f, g\} - \{f, X_h g\} = 0 \quad (4.8)$$

dove l'ultima uguaglianza è di nuovo dovuta all'identità di Jacobi. Quindi un campo vettoriale hamiltoniano è un *automorfismo infinitesimo di Poisson*. Segue che  $\exp(tX_h)$  è un automorfismo di Poisson. Quindi la distribuzione caratteristica è  $\chi_\pi$ -invariante e la completa integrabilità segue dal teorema 4.1.2 di Sussmann-Stefan.

In questo caso,  $\dim \mathcal{S}_x(M)$  è detto *rango* della struttura di Poisson nel punto  $x$ , visto che coincide con il rango di  $\pi^\sharp$ . Per l'antissimmetria, il rango è ovviamente pari in ogni punto e i fogli  $S(x)$  di  $\mathcal{S}(M)$  sono sottovarietà di dimensione pari. Se  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  sono due funzioni su  $S(x)$ , posso estenderle localmente a funzioni su  $M$  e definire:

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\}(x) := \{f, g\}(x) = X_f(x)g.$$

Il risultato dipende solo da  $\tilde{g}$  perchè viene calcolato lungo la curva integrale di  $X_f$  passante per  $x$  che appartiene al foglio  $S(x)$ ; per lo stesso ragionamento il risultato dipende da  $\tilde{f}$  e non da  $f$ . In questo modo ho definito una struttura di Poisson su  $S(x)$ . Ma ovviamente  $\mathcal{S}(S(x)) = T_x S$ , quindi la struttura di Poisson su  $S(x)$  è *non degenera* e la sua inversa è una forma simplettica.  $\square$

#### 4.1.2 Sottovarietà coisotrope e completa integrabilità

Finalmente, introduciamo le sottovarietà coisotrope. Sia  $C$  una sottovarietà di  $(M, \pi)$ . Indichiamo con  $N^*C$  il fibrato conormale di  $C$ , sarebbe a dire il sottofibrato di  $T_C^*M$  formato da tutti i covettori che si annullano sui vettori di  $TC$ .

**Definizione 4.1.4.** *Una sottovarietà  $C$  di una varietà di Poisson  $(M, \pi)$  è detta coisotropa se*

$$\pi^\sharp(N^*C) \subset TC.$$

In termini di covettori, si ha la seguente definizione equivalente:

**Definizione 4.1.5.** *Una sottovarietà  $C$  di una varietà di Poisson  $(M, \pi)$  è detta coisotropa se  $\pi|_{\text{Ann } TC} \equiv 0$ , dove  $\text{Ann } T_x M = \{\alpha \in T_x^*M : \alpha(v) = 0, \forall v \in T_x C\}$  è l'annullatore di  $T_x C$ .*

Queste definizioni sono la generalizzazione poissoniana delle più intuitive sottovarietà coisotrope della geometria simplettica: in questo caso la richiesta è che per  $\forall x$  valga:

$$\begin{aligned} T_x C^\perp &\subset T_x C \\ T_x C^\perp &= \{v \in T_x M : \omega(x)(v, w) = 0 \forall w \in T_x C\} \end{aligned}$$

dove  $\omega$  è la forma simplettica.



Per ogni sottovarietà  $C$  di  $M$ ,  $\pi^\sharp(N^*C)$  è il complemento simplettico di  $(T_x N) \cap \mathcal{S}_x(M)$  calcolato rispetto alla struttura simplettica sul foglio  $\mathcal{S}_x M$ , visto che il prodotto scalare simplettico soddisfa  $\omega_{\mathcal{S}}(v_1, v_2) = \pi(\alpha_1, \alpha_2)$ , con  $\pi^\sharp \alpha_i = v_i, i = 1, 2$ .

Il motivo dell'interesse nelle varietà coisotrope è il seguente:

**Teorema 4.1.6.** *La distribuzione caratteristica  $\pi^\sharp N^*C$  di una sottovarietà coisotropa  $C$  è completamente integrabile.*

*Dimostrazione.* Mostriamo innanzitutto che la distribuzione caratteristica di una sottovarietà coisotropa  $C$  è involutiva. Introduco la notazione  $\pi^\sharp(\alpha) = \pi_\alpha \forall \alpha \in \text{Ann } TN$ .

$$\begin{aligned} [\pi_\alpha, \pi_\beta]^i &= \pi_\beta \pi^{ij} \alpha_j - \pi_\alpha \pi^{ij} \beta_j = \\ &= \pi^{kl} \beta_k \partial_l \pi^{ij} \alpha_j - \pi^{kl} \alpha_k \partial_l \pi^{ij} \beta_j = \\ &= (\pi^{il} \partial_l \pi^{jk}) \alpha_j \beta_k + \pi^{kl} \beta_k \pi^{ji} \partial_l \alpha_j + \pi^{jl} \alpha_j \pi^{ki} \partial_l \beta_k, \end{aligned}$$

dove si è usata l'identità di Jacobi per  $\pi$ . Il primo termine è nullo per la seconda definizione di sottovarietà coisotropa, il secondo e il terzo si annullano quando valutati su vettori  $v \in TC$  e raccogliendo i termini opportuni si ottiene:

$$[\pi_\alpha, \pi_\beta]^i = -\pi^{ik} (\beta_j \pi^{ki} \partial_l \alpha_k + \alpha_j \pi^{ki} \partial_l \beta_j) =: \pi^{ik} \gamma_k.$$

Quindi  $\pi^\sharp N^*C$  è involutiva e l'insieme costituito da tutti i campi vettoriali definiti su di essa soddisfa la prima condizione del criterio Sussmann-Stefan. Inoltre:

$$(\mathbb{L}_{\pi_\gamma} \pi)(\alpha, \beta) = \pi_\gamma(\pi(\alpha, \beta)) - \pi(\pi_\gamma \alpha, \beta) - \pi(\alpha, \pi_\gamma \beta) = 0$$

ancora grazie alla seconda definizione di sottovarietà coisotropa. Quindi il flusso di  $\pi_\gamma$  genera un diffeomorfismo della sottovarietà coisotropa che conserva l'algebra di Lie dei campi definiti sulla sua distribuzione caratteristica. Ma allora  $\pi^\sharp N^*C$  soddisfa anche la seconda richiesta del criterio di Sussmann-Stefan ed è quindi completamente integrabile per il teorema 4.1.2.  $\square$

Un modo per costruire sottovarietà coisotrope è dato dal teorema seguente:

**Teorema 4.1.7.** *Una mappa  $\varphi : (M_1, \pi_1) \rightarrow (M_2, \pi_2)$  è un morfismo di Poisson se e solo se il grafico di  $\varphi$  è coisotropico in  $M_1 \times M_2^-$ , dove  $M_2^-$  indica la varietà di Poisson  $(M_2, -\pi_2)$ .*

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $\text{Graph } \varphi = \{(x, \varphi(x)) : x \in M_1\}$  è una sottovarietà embedded chiusa di  $M_1 \times M_2^-$ .

Un vettore tangente a  $\text{Graph } \varphi$  è una coppia  $(v_x, \varphi_*(v_x))$  con  $x \in M_1$ . Quindi  $N^*(\text{Graph } \varphi)$  è composto dalle coppie di covettori  $(-\varphi^*\lambda, \lambda)$  con  $\lambda \in T_{\varphi(x)}^*M_2$  e la condizione di coisotropia 4.1.4 è soddisfatta se e solo se

$$\varphi_*(\pi_1^\sharp(-\varphi^*\lambda)) = -\pi_2^\sharp(\lambda),$$

che è esattamente la condizione necessaria e sufficiente affinché  $\varphi$  sia un morfismo di Poisson data dall'equazione (4.2).  $\square$

Un altro esempio di sottovarietà coisotropa è dato dalla preimmagine attraverso un morfismo di Poisson  $\varphi : (M, \pi_1) \rightarrow (N, \pi_2)$  di un foglio simplettico di  $N$ . Innanzitutto osserviamo che, per una sottovarietà  $C$  di  $M$ ,  $(T_x C \cap \mathcal{S}_x(M))^\perp$  è costituito possibilmente da vettori nel tangente al foglio simplettico passante per  $x$ . Nel caso in cui la sottovarietà considerata  $S$  — in questo caso in  $N$  — è simplettica si ha:

$$(T_{\varphi(x)} S \cap \mathcal{S}_{\varphi(x)}(N))^\perp = T_{\varphi(x)} S^\perp \subseteq T_{\varphi(x)} S$$

ma visto che i campi sono  $\varphi$ -correlati deve essere anche:

$$(T_x C \cap \mathcal{S}_x(M))^\perp \subseteq T_x C.$$

Un'applicazione interessante di questo esempio si ha quando  $N$  è il duale di un'algebra di Lie, in questo caso  $\varphi$  è data anche *equivariant momentum map*. Come esempio particolare consideriamo l'inclusione  $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ , e pongo  $M = \mathfrak{g}^*$ ,  $N = \mathfrak{h}^*$  (con struttura di Poisson di Kostant–Kirillov) e  $\varphi = \iota^*$ .  $\{0\}$  è un foglio simplettico di  $\mathfrak{h}^*$  (è invariante rispetto all'azione dell'algebra dei campi), prendendone la controimmagine  $\mathfrak{h}^\perp := (\iota^*)^{-1}(0)$  (l'annullatore di  $\mathfrak{h}$ ) ottengo una sottovarietà coisotropa in  $\mathfrak{g}^*$ .

### 4.1.3 Caratterizzazione dell'algebra delle funzioni di $C$

Dato che il nostro obiettivo principale è la *deformazione dell'algebra delle funzioni* di una varietà di Poisson, per sfruttare le sottovarietà coisotrope in questo contesto abbiamo bisogno di una caratterizzazione della loro algebra e dell'algebra delle funzioni sullo spazio dei fogli simplettici.

Sia  $\mathcal{I}$  l'ideale delle funzioni che si annullano quando ristrette alla sottovarietà  $C$ : i differenziali degli elementi di  $\mathcal{I}$  possono essere ristretti a sezioni del fibrato conormale  $N^*C$ . La condizione di coisotropicità  $\pi^\sharp(N^*C) \subset TC$  è equivalente alla richiesta che l'ideale  $\mathcal{I}$  non sia semplicemente una sottoalgebra, ma sia invece una *sottoalgebra di Poisson*, questa richiesta infatti vincola i campi di  $\pi^\sharp(N^*C)$  ad essere inclusi in  $TC$ .

**Lemma 4.1.8.** *Una sottovarietà  $C$  di  $M$  è coisotropa se e solo se  $\mathcal{I}$  è una sottoalgebra di Poisson di  $C^\infty(M)$ .*

Nella terminologia di Dirac le funzioni generatrici di  $\mathcal{I}$  sono dei vincoli di prima classe.

Sia  $N(\mathcal{I}) := \{g \in C^\infty(M) : \{g, \mathcal{I}\} \subset \mathcal{I}\}$  il normalizzatore di  $\mathcal{I}$ . Se  $\mathcal{I}$  è una sottoalgebra di Poisson, l'identità di Jacobi implica subito che anche  $N(\mathcal{I})$  è una sottoalgebra di Poisson. Inoltre,  $\mathcal{I}$  è un ideale di Poisson in  $N(\mathcal{I})$ , quindi si può costruire il quoziente  $N(\mathcal{I})/\mathcal{I}$  che è una nuova algebra di Poisson. Visto che  $N(\mathcal{I})$  è l'algebra delle funzioni di  $M$  invarianti rispetto all'azione della distribuzione caratteristica di  $C$ , quindi — modulo le funzioni nulle su  $C$  — abbiamo trovato l'algebra delle funzioni invarianti su  $C$ , i.e:

$$C^\infty(C)^{\text{inv}} = N(\mathcal{I})/\mathcal{I}.$$

Ricordiamo che una funzione  $f$  è invariante se  $X(f) = 0$  per tutte le sezioni  $X \in \pi^\sharp N^*C$ . Se denotiamo con  $\underline{C}$  (spazio delle fasi ridotto) lo spazio dei fogli generato dalla distribuzione caratteristica di  $C$  possiamo definirne l'algebra delle funzioni nel seguente modo:

$$C^\infty(\underline{C}) := C^\infty(C)^{\text{inv}}$$

Nel caso in cui  $\underline{C}$  sia una varietà liscia, l'inclusione  $\iota: C \rightarrow M$  e la proiezione  $p: C \rightarrow \underline{C}$ :

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \iota \swarrow & & \searrow p \\ M & & \underline{C} \end{array}$$

inducono delle mappe di algebre commutative che danno a  $C^\infty(C)$  una struttura di bimodulo su  $C^\infty(\underline{C})$  and  $C^\infty(M)$ :

$$\begin{array}{ccc} & C^\infty(C) & \\ \iota^* \swarrow & & \searrow p^* \\ C^\infty(M) & & C^\infty(\underline{C}) \end{array}$$

Queste mappe si possono ovviamente definire anche nel caso in cui  $\underline{C}$  non è una varietà, conserando la proiezione  $\iota^*: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)/\mathcal{I}$  e l'inclusione  $p^*: N(\mathcal{I})/\mathcal{I} \rightarrow C^\infty(M)/\mathcal{I}$ .

Un altro caso che può essere considerato è quello di due sottovarietà coisotrope  $C_0$  e  $C_1$ : se indichiamo  $\underline{C_0 \cap C_1}$  il quoziente di  $C_0 \cap C_1$  rispetto all'intersezione delle foliazioni caratteristiche (ottenendo così una distribuzione su  $C_0 \cap C_1$ ), dal diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & C^\infty(\underline{C_0 \cap C_1}) & \\ \iota_0^* \swarrow & & \searrow \iota_1^* \\ C^\infty(\underline{C_0}) & & C^\infty(\underline{C_1}) \end{array}$$

si ottiene che  $C^\infty(\underline{C_0 \cap C_1})$  è un bimodulo sulle algebre commutative  $C^\infty(\underline{C_0})$  e  $C^\infty(\underline{C_1})$  (il caso precedente corrisponde a  $C_0 = C$  e  $C_1 = M$ ).

## 4.2 Condizioni al contorno generiche nel $P\sigma M$

Ricordiamo l'azione per il Poisson Sigma Model è data da:

$$S(X, \eta) = \int_{\Sigma} (\langle \eta, dX \rangle + \frac{1}{2} \langle \pi \circ X, \eta \wedge \eta \rangle),$$

nel caso di interesse alla deformation quantization la varietà  $\Sigma$  è un disco con bordo. Le condizioni al contorno finora considerate, i.e. la richiesta che la forma  $\eta$  si annullasse sui vettori tangenti al bordo  $\partial\Sigma$ , possono essere generalizzate in maniera naturale sfruttando le proprietà delle sottovarietà coisotrope. Per fare in modo che le equazioni di Eulero–Lagrange siano delle equazioni differenziali, e quindi che i termini di bordo si annullino, si possono imporre le seguenti condizioni al contorno:  $\hat{X} = (X, \eta)$  deve mandare lo spazio tangente  $T\partial\Sigma$  nel fibrato conormale  $N^*C$  di una sottovarietà  $C$ . Variando  $X$  nell'azione e integrando per parti si ottiene il termine di bordo:

$$\int_{\partial\Sigma} \langle \eta, \delta X \rangle, \quad (4.9)$$

che si annulla sempre in quanto la forma  $\eta$  valutata in  $\partial\Sigma$  è a valori nel fibrato conormale  $N^*C$ , dunque il pairing quel pairing è nullo per ogni variazione  $\delta X$ .

Nel caso in cui  $C$  sia la varietà  $M$  la nuova condizione coincide con quella considerata nel capitolo 2 e conduce quindi alla formula di Kontsevich per la deformation quantization di  $M$ .

In particolare, le condizioni al contorno per le trasformazioni di gauge del modello, possono essere generalizzate al caso in cui  $C$  è una varietà coisotropa. Ripercorrendo il calcolo della variazione dell'azione sotto trasformazioni di gauge 2.2.3 si ottiene che l'invarianza è ancora soddisfatta a meno del termine di bordo (4.9), in cui per  $\delta$  si intende la trasformazione infinitesima di gauge  $\delta_{\beta}$  (2.16), con  $\beta \in \Gamma(\Sigma, X^*T^*M)$  parametro della trasformazione. Le condizioni al contorno generalizzate per il parametro si riassumono nella richiesta che la sezione  $\beta$  si restringa ad una sezione del fibrato  $X^*N^*C$  con base  $\partial\Sigma$ . Dato che:

$$\delta_{\beta} X = \pi^{ij} \beta_j = \pi^{\sharp} \beta,$$

tale termine di bordo si annulla se  $C$  è coisotropa, infatti l'integranda diviene  $\pi(\eta, \beta)$ , che si annulla se  $C$  è coisotropa visto che i due argomenti sono elementi nell'annullatore  $N^*C$ .

### 4.2.1 Impostazione della quantizzazione BV

La quantizzazione è data dall'integrale funzionale  $\int \exp(iS/\hbar) \mathcal{O} d\hat{X}$  eseguito sullo spazio delle mappe di fibrati  $\hat{X} = (X, \eta)$  che soddisfano le condizioni

al contorno, dove  $\mathcal{O}$  indica un osservabile, i.e. una funzione gauge invariante sullo spazio dei campi  $\hat{X}$ . Una classe di osservabili di particolare interesse è data dalla valutazione di funzioni di  $M$  nell'immagine di  $X$  dei punti del bordo  $\partial\Sigma$ :  $\mathcal{O} = \prod_{i=1}^k f_i(X(p_i))$ ,  $p_i \in \partial\Sigma$ . In questa famiglia figura ovviamente il prodotto di due funzioni, la cui quantizzazione (i.e. valutazione del valore di aspettazione) fornisce la deformazione della struttura di algebra. La condizione di gauge invarianza è  $\pi(df_i, c) = 0$  con  $\beta \in N^*C$ , infatti:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_\beta \mathcal{O} = \delta_\beta \prod_{i=1}^k f_i(X(p_i)) = \\ &= (\delta_\beta f_1(X(p_1))) \dots f_k(X(p_k)) + \dots + f_1(X(p_1)) \dots f_{k-1}(\delta_\beta f_k(X(p_k))) \end{aligned}$$

deve annullarsi per ogni  $\beta$ , quindi deve essere  $0 = \delta_\beta f_i(X(p_i)) \forall i$ , visto che:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_\beta f_i(X(p_i)) = df_i \delta_\beta X(p_i) = \\ &= df_i \pi^\sharp \beta = \pi(df, \beta). \end{aligned}$$

Vedendo  $\beta$  localmente come  $dg$  per qualche funzione  $g \in \mathcal{I}$  (il cui differenziale è cioè una sezione di  $N^*C$ ) la condizione di gauge invarianza si traduce in  $\{f_i, g\} = 0$ , i.e.  $f_i \in N(\mathcal{I})$ , normalizzatore di  $\mathcal{I}$ . Visto che siamo interessati solo ai valori che  $f_i$  assume su  $C$ , possiamo considerare direttamente  $f_i \in N(\mathcal{I})/\mathcal{I} = C^\infty(\underline{C})$ . Ricordiamo che questo significa che  $f_i$  è costante sui fogli di  $C$ .

I risultati ottenuti nel capitolo 2 suggeriscono che il calcolo perturbativo dell'integrale funzionale secondo il metodo BV dovrebbe fornire un prodotto associativo su  $C^\infty(\underline{C})$ , ottenuto come al solito scegliendo tre punti distinti orientati  $p, q, r$  sul bordo del disco  $\Sigma$  e ponendo:

$$(f \star g)(x) = \int_{X(r)=x} e^{\frac{i}{\hbar} S(X, \eta)} f(X(p)) g(X(q)) dX d\eta, \quad (4.10)$$

con  $f, g \in C^\infty(\underline{C})$ . La procedura da seguire è esattamente la stessa affrontata nel capitolo 2, oppure seguendo il metodo AKSZ descritto nel capitolo 3. In questo caso la condizioni al contorno sono cruciali nella verifica che l'azione  $S$  soddisfa la master equation  $(S, S) = 0$ , esse sono che la mappa tra  $Q$ -varietà  $(X, \eta) : \pi T\Sigma \rightarrow \pi T^*M$  si restringa ad una mappa  $\pi T\partial\Sigma \rightarrow \pi N^*C$ . Seguendo 2.3.2 posso scrivere:

$$S = S_0 + S_\pi.$$

In generale  $\{S_\alpha, S_\beta\} = S_{[\alpha, \beta]}$ , quindi  $\{S_\pi, S_\pi\} = 0$  poichè  $\pi$  è di Poisson. La parentesi con  $S_0$  produce un termine di bordo via integrazione per parti. Le condizioni al contorno fissate implicano che  $\{S_0, S_0\}$  si annulli per ogni sottovarietà  $C$  e  $\{S_0, S_\pi\}$  per ogni  $C$  coisotropa, visto che il termine di bordo è proporzionale a  $\int_{\partial\Sigma} \langle \pi \circ \mathbf{X}, \eta \wedge \eta \rangle$ .

Questa nuova impostazione del Poisson Sigma Model si presta ad una notevole generalizzazione: si possono considerare  $k$  sottovarietà coisotrope  $C_0, \dots, C_{k-1}$  e il solito  $\Sigma$  come un disco il cui bordo è suddiviso in  $k$  intervalli. La richiesta naturale come condizione di bordo per la mappa  $\hat{X}$  è di mandare il fibrato tangente dell' $i$ -intervallo  $I_i$  nel fibrato conormale  $N^*C_i$ . Le trasformazioni di gauge si generalizzano richiedendo che il parametro di gauge  $\beta$  mandi ogni  $I_i$  nel corrispondente fibrato conormale  $N^*C_i$ . Si possono ottenere delle osservabili gauge invarianti valutando delle funzioni in  $C^\infty(\underline{C}_i)$  nei punti corrispondenti all'immagine attraverso  $X$  di punti nell'interno di  $I_i$  o funzioni in  $C^\infty(\underline{C}_i \cap \underline{C}_{i+1})$  valutate nell'immagine del punto che separa i due intervalli adiacenti  $I_i$  e  $I_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, k-2$ . Il punto  $r$  che separa gli intervalli  $I_{k-1}$  e  $I_0$  usato per selezionare la soluzione classica attorno alla quale iniziare lo sviluppo perturbativo dell'integrale funzionale (come vedremo più avanti) imponendo la condizione  $X(r) = x$ .

Di questa generalizzazione, consideriamo il caso più semplice  $k = 2$ , in cui ci sono due varietà coisotrope  $C_0, C_1$  e il bordo del disco  $\Sigma$  è diviso in due intervalli  $I_0, I_1$  aventi in comune due punti  $p, q \in \partial\Sigma$ . Considerando integrali di cammino con queste condizioni al contorno e la richiesta che  $X(q) = x \in C_0 \cap C_1$  si ottengono vari prodotti tra le funzioni di  $C^\infty(\underline{C}_i)$  e  $C^\infty(\underline{C}_0 \cap \underline{C}_1)$ , a seconda dei punti di  $\Sigma$  nei quali le valutiamo. Ci aspettiamo che questi prodotti siano associativi e quindi diano una deformazione della struttura di  $C^\infty(\underline{C}_0)$ - $C^\infty(\underline{C}_1)$ -bimodulo di  $C^\infty(\underline{C}_0 \cap \underline{C}_1)$ , dove la deformazione di  $C^\infty(\underline{C}_i)$  è ottenuta seguendo la procedura delineata in precedenza per  $k = 1$ .

Nel seguito, vedremo di determinare in quali ipotesi questo sviluppo euristico risulta essere vero in ambito semiclassico.

### 4.2.2 Diagrammi di Feynman nel caso $k = 1$

Iniziamo dal caso più elementare: scegliamo  $M$  come un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  con coordinate  $x_1, \dots, x_n$  e consideriamo una sola sottovarietà coisotropa  $C$  data dalle equazioni:

$$x^\mu = 0, \quad \mu = m+1, \dots, n, \quad (4.11)$$

Lo spazio tangente a  $C$  in un suo punto è generato dai vettori  $\partial/\partial x^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e il fibrato conormale dai  $dx^\mu$ ,  $\mu = m+1, \dots, n$ . Con la convenzione che gli indici latini minuscoli hanno valori in  $\{1, \dots, m\}$  e quelli greci in  $\{m+1, \dots, n\}$ , la condizione di coisotropicità si riscrive:

$$\pi^{\mu\nu}(x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) = 0,$$

per le componenti del tensore di Poisson  $\pi$ . Le funzioni coordinate  $x^\mu$  sono un sistema di generatori per l'ideale  $\mathcal{I}$  delle funzioni nulle su  $C$  e la foliazione

caratteristica su  $C$  è generata dai vettori  $\pi^\sharp(\partial_\mu)$ , i.e.  $E^\mu = \sum_{i=1}^n \pi^{\mu i} \partial_i$ . Le funzioni invarianti su  $C$  sono soluzioni di

$$E^\mu(f) = \sum_{i=1}^m \pi^{\mu i} \partial_i f = 0. \quad (4.12)$$

La condizioni al contorno per i supercampi sono  $X^\mu = 0$ ,  $\eta_i = 0$  su  $\Pi T\partial\Sigma$ .

La valutazione dell'integrale (4.10) come una serie di potenze in  $\epsilon$  seguendo il procedimento descritto nel capitolo 2 fornisce una formula di Kontsevich modificata, per la presenza di grafici differenti. L'espressione della soluzione è comunque la stessa:

$$f \star g = fg + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \sum_{\Gamma \in G_{k,2}} w_\Gamma B_\Gamma(f, g), \quad f, g \in C^\infty(C). \quad (4.13)$$

La somma è sui grafici ammissibili  $\Gamma$  di ordine  $k$ , ai quali sono associati un peso  $w_\Gamma \in \mathbb{R}$  e un operatore bidifferenziale  $B_\Gamma$ . Il parametro di deformazione è  $\epsilon = i\hbar$ .

Descriviamo ora la struttura dei grafici e dei pesi, rimandando alla fine della sezione la loro giustificazione. Un grafo ammissibile in  $G_{k,2}$  ha  $k$  vertici  $1, \dots, k$  del primo tipo e 2 vertici  $\bar{1}, \bar{2}$  del secondo tipo, come segue dall'espressione esplicita dell'integrale funzionale in cui la parte di interazione sia stata trattata come una piccola perturbazione (vedi paragrafo 2.3.2). I lati (propagatori) sono orientati e sono di due tipi: li indicheremo con una linea dritta o con una linea ondulata. Sempre seguendo l'analisi già effettuata in precedenza, si trova che ci sono esattamente due propagatori uscenti da ogni vertice del primo tipo e nessuno dai vertici del secondo tipo. I propagatori sono ordinati e possono avere come punto finale un altro qualsiasi vertice che sia diverso da quello da cui emergono; un esempio è dato in figura Fig. 4.1. L'operatore bidifferenziale associato a  $\Gamma$  è ottenuto attraverso la seguente regola: a ogni vertice del primo tipo associamo una componente di  $\pi$  e ad ogni vertice del secondo tipo associamo una tra le funzioni  $f$  e  $g$ . Ad un propagatore da un vertice  $a$  a un vertice  $b$  associamo una derivata parziale agente sull'oggetto associato a  $b$  (una funzione o una componente del tensore di Poisson) rispetto alla variabile con lo stesso indice della componente di  $\pi$  associata ad  $a$ . Facciamo il prodotto di tutti questi termini e sommiamo sugli indici latini per i propagatori dritti e su quelli greci per quelli ondulati. Infine valutiamo in risultato in un punto  $x \in C$ . Per esempio, il grafico in figura 4.1 da origine al seguente operatore bidifferenziale:

$$\partial_l \pi^{i\lambda} \partial_\lambda \partial_\mu \pi^{jk} \pi^{l\mu} \partial_i \partial_j f \partial_k g.$$

Le somme sugli indici latini e greci corrono rispettivamente sugli insiemi  $\{1, \dots, m\}$  e  $\{m+1, \dots, n\}$  e sono sottointese per indici ripetuti secondo la convenzione di Einstein.

Il peso associato a  $\Gamma$  è

$$w_\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^{2k}} \int_{C_{k,2}^+} \prod_{\text{lati } e} d\phi_e.$$

L'integrale è sullo spazio delle configurazioni  $C_{k,2}^+$  di  $k$  punti distinti  $z_i$  nel semipiano superiore e due punti ordinati  $z_{\bar{1}} < z_{\bar{2}}$  sull'asse reale, modulo dilatazioni e traslazioni nella direzione dell'asse reale. La forma differenziale  $d\phi_e$  associata ad un propagatore  $e$  da  $a$  a  $b$  è  $d\phi(z_a, z_b)$  se il propagatore è dritto e  $d\phi(z_b, z_a)$  se ondulato. Sempre in analogia a quanto fatto in 2.3.2  $d\phi(z, w)$  è il differenziale della funzione:

$$\phi(z, w) = \frac{1}{2i} \log \frac{(z-w)(z-\bar{w})}{(\bar{z}-w)(\bar{z}-\bar{w})} = \arg(z-w) + \arg(z-\bar{w}).$$

L'ordinamento dei fattori nel prodotto è ottenuto dall'ordinamento dei vertici e dall'orientamento dato dei propagatori.

Il fatto che a linee ondulate corrisponda il propagatore  $d\phi(z_b, z_a)$  piuttosto che  $d\phi(z_a, z_b)$  e il fatto che la valutazione del risultato dell'azione degli operatori bidifferenziale viene fatta in un punto  $x \in C$  sono gli unici particolari in cui la formula differisce dal quella di Kontsevich del caso  $C = M$ . Ovviamente queste differenze sono da imputare interamente alle diverse condizioni al contorno. Nel caso  $C = M$  il superpropagatore:

$$\langle \eta_I(z) \xi^J(w) \rangle$$

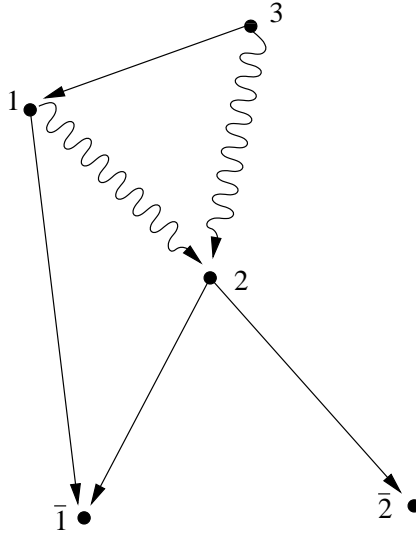


Figura 4.1: Un grafo ammissibile



si annulla quando  $z$  viene ristretto al bordo  $\partial\Sigma$ . Questo è ancora vero per le componenti di  $\boldsymbol{\eta}$  corrispondenti agli indici latini, ma non vale più per quelli greci; in quest'ultima situazione il propagatore si annulla (in particolare si annulla  $\boldsymbol{\xi}$ ) quando  $w$  viene ristretto al bordo. Queste osservazioni derivano dal fatto che — come già osservato — la mappa  $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\eta}) : \Pi T\Sigma \rightarrow \Pi T^*M$  si restringa ad una mappa  $\Pi T\partial\Sigma \rightarrow \Pi N^*C$ . Un modo per soddisfare questa richiesta in termini di propagatori è proprio effettuare l'inversione delle variabili. Più precisamente il calcolo del propagatore con le giuste condizioni al contorno può essere effettuato integrando per parti il termine quadratico dell'azione corrispondente. A questo punto basta rinominare i campi ed effettuare il cambio di variabile nell'integrale funzionale per ottenere il risultato voluto.

Osserviamo inoltre che i differenziali associati a propagatori ondulati agenti sui punti  $\bar{1}$  o  $\bar{2}$  si annullano per la condizione di coisotropia o sfruttando l'invarianza delle funzioni  $f$  e  $g$ : quindi le funzioni  $f$  e  $g$  sono derivate solo lungo le direzioni tangenziali  $\partial_j$ . In conclusione gli operatori differenziali  $B_\Gamma$  sono ben definiti sulle funzioni di  $C$ .

Nel caso di sottovarietà coisotrope per ottenere l'associatività dello star prodotto è necessario richiedere qualche condizione in più. Scelti dei campi vettoriali  $\xi, \eta$  su  $M$  intruciamo l'operatore differenziale  $A(\xi)$  su  $C^\infty(C)[[\epsilon]]$ , definito da:

$$A(\xi)f = \xi f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \sum_{\Gamma \in G_{k+1,1}} w_\Gamma B_\Gamma(\xi) f$$

e una funzione:

$$F(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \sum_{\Gamma \in G_{k+2,0}} w_\Gamma B_\Gamma(\xi, \eta) \in C^\infty(C)[[\epsilon]].$$

Le definizioni di  $w_\Gamma, B_\Gamma$  sono le stesse a quella di  $G_{k,2}$  ad eccezione del fatto che i grafi in  $G_{k+1,1}$  hanno un vertice del primo tipo in più associato a  $\xi$  e un vertice del secondo in meno; analogamente per i grafici in  $G_{k+2,0}$ . Nel caso  $C = M$ , questi operatori sono stati introdotti per la prima volta in [12], a cui rimandiamo per maggiori dettagli sul loro significato.

Da ora in avanti facciamo la seguente assunzione:

**Assunzione 4.2.1.**  $F(E^\mu, E^\nu) = 0$  for  $m+1 \leq \mu, \nu \leq n$ .

La versione quantistica dell'algebra delle funzioni su  $C$  è definita come il  $\mathbb{R}[[\epsilon]]$ -modulo

$$C_\epsilon^\infty(\underline{C}) = \{f \in C^\infty(C)[[\epsilon]] : A(E^\mu)f = 0\}.$$

Osserviamo che la condizione  $A(E^\mu)f = 0$  è una generalizzazione quantistica della condizione di invarianza per le funzioni sulla sottovarietà coisotropa.

**Teorema 4.2.2.** *Se vale 4.2.1, il prodotto (4.13) si restringe ad un prodotto associativo su  $C_\epsilon^\infty(\underline{C})$*

Per i dettagli della dimostrazione si veda [6].

In generale,  $(C_\epsilon^\infty(\underline{C}), \star)$  non è una deformazione di  $C^\infty(\underline{C})$ . Però, la mappa

$$p: f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots \mapsto f_0$$

è un omomorfismo in generale non suriettivo di anelli  $(C_\epsilon^\infty(\underline{C}), \star) \rightarrow (C^\infty(\underline{C}), \cdot)$  con la proprietà che  $p((f \star g - g \star f)/\epsilon) = \{f, g\}$ .

### 4.2.3 Bimoduli, i.e. caso $k = 2$

Analizziamo ora cosa succede quando si prendono in considerazione due varietà coisotrope che abbiano una *intersezione pulita*. L'intersezione di  $C_0$  e  $C_1$  è pulita se  $C_0 \cap C_1$  è una sottovarietà e  $T(C_0 \cap C_1) = TC_0 \cap TC_1$ . Consideriamo il solito integrale di cammino e valutiamolo in un punto  $x \in C_0 \cap C_1$ . Suddividiamo il bordo del disco  $\Sigma$  in due parti, che sono mappate in due sottovarietà coisotrope, e mappiamo il disco nel primo quadrante  $\text{Re } z \geq 0, \text{Im } z \geq 0$ . La parti del bordo corrispondenti a  $C_0, C_1$  sono rispettivamente l'asse immaginario e l'asse reale positivi. Il punto  $r$  nel quale valutiamo il prodotto ottenuto via integrale di cammino è mandato all'infinito. Gli altri due punti possono essere sistemati secondo 3 alternative: nello 0, sull'asse reale o sull'asse immaginario. Alle possibili combinazioni di queste scelte corrispondono le strutture di modulo indotte da ciascuna sottovarietà coisotropa (dalla sua algebra) sull'intersezione e quella di algebra sull'intersezione.

Ripetiamo quanto fatto nel caso  $k = 1$ . Sia  $M$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e siano le varietà coisotrope  $C_q, q = 0, 1$ , date dalle equazioni

$$x^\mu = 0, \quad \mu \in I_q^c,$$

per sottoinsiemi degli insiemi  $I_0, I_1$  di  $\{1, \dots, n\}$ , dove con  $I_0^c, I_1^c$  denotiamo le parti complementari. Le funzioni  $x^i, i \in I_q$  formano un sistema di coordinate per  $C_q$  e l'intersezione  $C_0 \cap C_1$  ha coordinate  $x^i, i \in I_0 \cap I_1$ .

Supponendo soddisfatta l'assunzione 4.2.1 per entrambe le sottovarietà  $C_0$  e  $C_1$ , otteniamo le due algebre  $C_\epsilon^\infty(\underline{C}_0), C_\epsilon^\infty(\underline{C}_1)$ . La valutazione dell'integrale funzionale fornisce una struttura di  $C_\epsilon^\infty(\underline{C}_0)$ - $C_\epsilon^\infty(\underline{C}_1)$ -bimodulo a  $C_\epsilon^\infty(\underline{C}_0 \cap \underline{C}_1)$ .

Descriviamo la costruzione di questa struttura in termini di somme sui grafi. L'insieme dei grafi ammissibili  $G_{k,2}$  consiste di grafi con  $k$  vertici  $1, \dots, k$  del primo tipo e 2 vertici  $\bar{1}, \bar{2}$  del secondo tipo. Le regole sono simili alle precedenti, solo che ora ci sono quattro tipi diversi di vertici in corrispondenza ai vari modi di scegliere la posizione del vertice in  $\Sigma$ :  $++$ ,  $+-$ ,  $-+$ ,  $--$ . Ad ogni grafo  $\Gamma$  si associa un operatore bidifferenziale  $B_\Gamma(f, g)$ . Le regole sono le stesse del caso con una sottovarietà, l'unica differenza è nelle somme sugli indici associati ai propagatori: ad un lato del

tipo  $++$ ,  $+-$ ,  $-+$ ,  $--$  è associata rispettivamente la somma sugli indici:  $I_0 \cap I_1$ ,  $I_0 \cap I_1^c$ ,  $I_0^c \cap I_1$ ,  $I_0^c \cap I_1^c$ .

Il peso  $w_\Gamma$  si ottiene, al solito, integrando il prodotto di una forme associate ai propagatori sullo spazio delle configurazioni. Le uno forme  $d\phi_{\sigma\tau}(z, w)$ ,  $\sigma, \tau = \pm 1$ , corrispondono ai differenti tipi di vertici e si ottengono applicando il teorema delle cariche immagine. In termini dell'angolo euclideo questo si traduce in riflessioni rispetto agli assi del primo quadrante:

$$\phi_{\sigma\tau}(z, w) = \phi_e(z, w) + \sigma\phi_e(z, \bar{w}) + \tau\phi_e(z, -\bar{w}) + \sigma\tau\phi_e(z, -w).$$

dove  $\phi_e(z, w) = \arg(z - w)$  è l'angolo euclideo.

Se  $\Gamma \in G_{k,2}$ , allora abbiamo due differenti pesi,  $w_\Gamma^0$  e  $w_\Gamma^1$ , legati alle due diverse strutture di modulo, che richiedono una integrazione su spazi delle configurazioni diversi. Il peso  $w_\Gamma^0$  è ottenuto integrando sullo spazio delle configurazioni di  $k$  punti distinti nel primo quadrante, un punto nell'origine (associato al vertice  $\bar{1}$ ) e un punto sull'asse reale positivo  $\bar{2}$ , a meno di dilatazioni. La struttura di  $C_\epsilon^\infty(\underline{C_0})$ -modulo destro è definita dallo star prodotto:

$$\psi \star_0 f = \psi f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \sum_{\Gamma \in G_{k,2}} w_\Gamma^0 B_\Gamma(\psi, f), \quad (4.14)$$

$\psi \in C_\epsilon^\infty(\underline{C_0 \cap C_1})$ ,  $f \in C_\epsilon^\infty(\underline{C_0})$ . Analogamente, i pesi  $w_\Gamma^1$  ottenuti assegnando il vertice  $\bar{1}$  ad un punto sull'asse immaginario positivo e  $\bar{0}$  all'origine, otteniamo la struttura di  $C_\epsilon^\infty(\underline{C_1})$ -modulo sinistro, definita dall'identità:

$$f \star_1 \psi = \psi f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \sum_{\Gamma \in G_{k,2}} w_\Gamma^1 B_\Gamma(f, \psi), \quad (4.15)$$

$\psi \in C_\epsilon^\infty(\underline{C_0 \cap C_1})$ ,  $f \in C_\epsilon^\infty(\underline{C_1})$ .

Il risultato fondamentale è il seguente [10]:

**Teorema 4.2.3.** *Sia la varietà di Poisson  $M$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  contenente l'origine e siano  $C_q$ ,  $q = 0, 1$  due sottovarietà coisotrope date dalle equazioni  $x^\mu = 0, \mu \in I_q^c$ . Se l'assunzione 4.2.1 è soddisfatta per entrambe  $C_0$  e  $C_1$ , allora:*

- (i) *Il prodotto  $\star_0$  (4.14) mappa  $C_\epsilon^\infty(\underline{C_0 \cap C_1}) \otimes C_\epsilon^\infty(\underline{C_0})$  in  $C_\epsilon^\infty(\underline{C_0 \cap C_1})$  ed è una struttura di  $C_\epsilon^\infty(\underline{C_0})$ -modulo destro.*
- (ii) *Il prodotto  $\star_1$  (4.15) mappa  $C_\epsilon^\infty(\underline{C_1}) \otimes C_\epsilon^\infty(\underline{C_0 \cap C_1})$  in  $C_\epsilon^\infty(\underline{C_0 \cap C_1})$  ed è una struttura di  $C_\epsilon^\infty(\underline{C_1})$ -modulo sinistro*
- (iii) *Vale*

$$(f \star_1 \psi) \star_0 g = f \star_1 (\psi \star_0 g)$$

*cioè le due strutture di modulo sono compatibili e si combinano in una struttura di bimodulo.*

#### 4.2.4 Alcuni esempi

Vediamo ora alcuni esempi in cui l'assunzione 4.2.1 è verificata. In tutti i casi assumiamo che la varietà di Poisson  $M$  sia un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e che le sottovarietà coisotrope siano dei sottospazi coordinati.

Un primo caso molto semplice è dato da *iperpiani coisotropi*: il fibrato conormale di tali iperpiani è monodimensionale e quindi l'assunzione 4.2.1 è soddisfatta per l'antisimmetria di  $F$ . Per ogni iperpiano coisotropico  $C$  si ottiene l'algebra  $C_\epsilon^\infty(\underline{C})$ , versione quantistica dell'algebra delle funzioni invarianti su  $C$ , un  $C_\epsilon^\infty(M)^{\text{inv}} \otimes C_\epsilon^\infty(\underline{C})$ -modulo  $C_\epsilon^\infty(C)$  e per ogni coppia di iperpiani coisotropi  $C_0, C_1$  otteniamo il bimodulo  $C^\infty(\underline{C}_0 \cap \underline{C}_1)$ .

Una *struttura di Poisson costante* fornisce un altro esempio in cui l'assunzione 4.2.1 è soddisfatta. Sia dunque  $M = \mathbb{R}^n$  equipaggiato con una struttura di Poisson costante e sia  $C$  una sottovarietà coisotropa. L'espressione esplicita di  $F$  contiene delle derivate delle componenti  $\pi^{ij}$  e quindi la richiesta è banalmente soddisfatta. Inoltre, la condizione quantistica di invarianza delle funzioni  $A(E^\mu)f = 0$  si riduce al primo termine (i.e. quello classico)  $E^\mu f = 0$  e quindi vale  $C_\epsilon^\infty(\underline{C}) = C^\infty(\underline{C})[[\epsilon]]$ . Per esempio, consideriamo la struttura simplettica standard su  $\mathbb{R}^{2m}$ . I sottospazi lagrangiani sono coisotropi e hanno foliazione caratteristica costituita da un solo foglio. Quindi  $C_\epsilon^\infty(\underline{C})$  è il modulo monodimensionale  $\mathbb{R}[[\epsilon]]$  delle funzioni costanti. Prendendo  $C_0 = M$  e  $C_1 = C$  otteniamo la struttura di modulo sinistro triviale e  $C_\epsilon^\infty(C) = C^\infty(C)[[\epsilon]]$  è un  $C_\epsilon^\infty(M)$ -modulo destro; questo è una versione formale dello spazio degli stati della meccanica quantistica.

L'ultimo esempio che affrontiamo è il *caso lineare*. Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie e  $M = \mathfrak{g}^*$  la varietà di Poisson con la struttura di Kostant–Kirillov. L'annullatore  $\mathfrak{h}^\perp$  di una sottoalgebra qualsiasi  $\mathfrak{h}$  è una sottovarietà coisotropa. Si può mostrare che l'assunzione 4.2.1 è soddisfatta in questo caso. Il Poisson Sigma Model fornisce una quantizzazione di  $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$  come  $S(\mathfrak{g})$ - $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^\mathfrak{h}$ -bimodulo. La quantizzazione di  $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^\mathfrak{h}$  è l'algebra  $S_\epsilon(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^\mathfrak{h}$ , ma in generale  $S_\epsilon(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^\mathfrak{h}/\epsilon S_\epsilon(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^\mathfrak{h}$  non è  $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^\mathfrak{h}$ , è quindi non si ha una deformazione per quantizzazione. Ciononostante vale il seguente:

**Teorema 4.2.4.** *Sia  $\mathfrak{h}$  una sottoalgebra di Lie di un'algebra di Lie finito dimensionale  $\mathfrak{g}$ . Supponiamo che  $\mathfrak{h}$  ammetta un complemento  $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -invariante. Allora l'algebra  $S_\epsilon(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^\mathfrak{h}$  è isomorfa a  $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^\mathfrak{h}[[\epsilon]]$  come  $\mathbb{R}[[\epsilon]]$ -modulo. I prodotti  $\star_0, \star_1$  definiscono una struttura di  $S(\mathfrak{g})^{\text{inv}} \otimes S_\epsilon(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^\mathfrak{h}$ -modulo sullo spazio  $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})[[\epsilon]]$  delle funzioni su  $\mathfrak{h}^\perp$ .*

## Capitolo 5

# Teorie di Campo e J-P $\sigma$ M

Le difficoltà tecniche legate alla costruzione di uno star prodotto hanno fino ad ora scoraggiato un approccio formale al problema della deformation quantization di una teoria di campo. La flessibilità dell'approccio via Poisson Sigma Model, data soprattutto dalla potenza dell'integrale funzionale, permette di affrontarlo in maniera diretta e prendere in considerazione teorie il cui spazio degli stati sia infinito-dimensionale.

Nascono però nuove complicazioni. Le teorie di campo di interesse sono tutte dotate di una simmetria di gauge, dalla quale derivano dei vincoli sullo spazio degli stati che rendono la definizione del corretto P $\sigma$ M non banale. La prima idea che tentiamo di sviluppare è quella di realizzare questi vincoli come sottovarietà coisotrope dello spazio target. Iniziamo con una teoria di campo in 3 dimensioni, descritta dall'azione di *Chern Simons*, i cui campi sono le connessioni principali che per brevità indichiamo con  $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ , assumiamo cioè di lavorare con fibrati banali. Isoliamo la componente temporale dello spazio tempo decomponendo  $M = \mathbb{R} \times S$  e diamo una interpretazione hamiltoniana della teoria: in questo modo si vede che la sottovarietà coisotropa da prendere in considerazione è quella delle connessioni piatte. Il risultato è piuttosto sorprendente: per prendere in considerazione i vincoli imposti dall'azione del gruppo di gauge  $\mathcal{G}$ , basta considerare l'azione data dalla somma di due P $\sigma$ M, uno per lo spazio dei campi  $\mathcal{M} = \Omega^1(S, \mathfrak{g})$  e uno per il duale  $\mathfrak{G}^*$  dell'algebra di Lie del gruppo di gauge che è una varietà di Poisson con la struttura di Kostant–Krilliov, un termine aggiuntivo che lega le strutture di Poisson su  $\mathcal{M}$  e  $\mathfrak{G}^*$  ed impone il vincolo a mano, introducendo un moltiplicatore di Lagrange.

Questa costruzione si presta ad una generalizzazione notevole. Nell'esempio precedente, la varietà coisotropa associata ai vincoli risulta essere descritta come kernel di una mappa equivariante degli impulsi

$$J : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{G}^*.$$

Questa mappa è collegata alla simmetria di gauge nel seguente modo. Le equazioni di Eulero Lagrange della teoria sono indeterminate nel senso che

non ci sono abbastanza equazioni di evoluzione per propagare tutte le componenti del campo. Questo accade perchè la teoria ha una libertà di gauge. Come conseguenza, alcuni campi (alcune componenti) non hanno evoluzione determinata. Questi campi *cinematici* non hanno significato fisico. Nel caso più semplice sono dei moltiplicatori di Lagrange per i vincoli imposti sullo spazio dei dati iniziali per i restanti campi *fisici*. Le funzioni vincolari  $\Phi^i$ , che individuano la varietà vincolare come luogo dei loro zeri comuni, generano le trasformazioni di gauge dei campi dinamici attraverso la struttura simplettica canonica dello spazio delle fasi. Le  $\Phi^i$  sono le componenti di una mappa equivariante degli impulsi  $J$ . Questo treno di idee è descritto in [21],[22].

Ci aspettiamo che la formulazione corretta del Poisson Sigma Model per una teoria di gauge sia la seguente:

$$P\sigma M(\mathcal{M}) \quad + \quad P\sigma M(\mathfrak{G}^*) \quad + \quad \text{struttura J-Poisson} \quad + \quad \text{vincolo}$$

dove per struttura J-Poisson si intende un termine che lega le strutture sullo spazio target e la coalgebra di Lie. L'origine di questo termine può essere collegata ad una deformazione della struttura canonica di Poisson sul prodotto  $\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*$  dovuta alla momentum map  $J$ .

Dopo aver descritto in dettaglio questa costruzione affrontiamo qualche applicazione meno ovvia della Chern Simons, come l'elettromagnetismo e il P $\sigma$ M stesso (nel caso affine) visto come teoria di gauge.

## 5.1 L'azione di Chern-Simons

La teoria di Chern-Simons è uno esempio di teoria di campo topologica, cioè che gode di invarianza per diffeomorfismi. L'azione che la descrive è

$$S_{CS} := \int_M \langle A, dA \rangle + \frac{1}{3} \langle A, [A, A] \rangle \quad (5.1)$$

dove  $M$  è una varietà tridimensionale e  $A$  è una connessione principale su un qualsiasi fibrato  $\pi : E \rightarrow M$ , identifichiamo lo spazio di tali connessioni con  $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è una forma bilineare ad -invariante non degenera. Ecco un rapido "perchè" di questa azione [2].

Esiste un legame tra la teoria di Chern-Simons e l'azione di Yang-Mills:

$$S_{YM} = \frac{1}{2} \int_N \langle F, *F \rangle, \quad F = dA + \frac{1}{2}[A, A];$$

la prima può essere interpretata, in qualche senso, come una derivata della seconda. La teoria di YM dipende da una scelta della metrica sullo spaziotempo, alla quale è associato l'operatore star di Hodge che compare nell'azione, che svolge il ruolo di una struttura di background privilegiata e arbitraria. Per lavorare in completa generalità dobbiamo tentare di scrivere

un'azione indipendente dalla metrica. Nel caso in cui  $\dim N = 4$  la risposta è immediata è data dall'azione di YM selfduale:

$$S_{YM}^{\text{self}} = \frac{1}{2} \int_N \langle F, F \rangle$$

Si osservi che *anche* nel caso quadridimensionale le azioni  $S_{YM}$  e  $S_{YM}^{\text{self}}$  sono diverse. Più in generale se  $N$  è un spazio di dimensione pari uguale a  $2k$ , posso definire l'azione:

$$S(A) := \int_N \langle F, F \wedge \dots \wedge F \rangle$$

la forma sotto l'integrale è detta  $k$ -forma di Chern. Il contenuto dinamico di questa teoria è banale, infatti  $\delta S = 0$  per ogni connessione  $A$ , quindi  $S$  è un numero che dipende solo dal fibrato  $\pi$ ! Di fatto l'azione legata alla forma di Chern ha molta più informazione: essendo chiuse per l'identità di Bianchi, definiscono una classe di coomologia in  $H^{2k}(M)$ . Ora la classe di coomologia non dipende dalla particolare connessione  $A$  scelta, mentre la forma di Chern Simons sì. Si può verificare che cambiando  $A$  con un'altra connessione  $A'$  la forma di CS cambia di una forma esatta. In conclusione è ben definita la  $k$ -esima classe di Chern  $c_k(E)$ , i.e. la classe di coomologia definita dalla  $k$ -esima forma di Chern. La dimostrazione che cambiare la connessione  $A$  cambia la seconda forma di Chern  $\langle F, F \rangle$  di una forma esatta, fornisce l'espressione esplicita di una 3-forma la cui derivata esterna è proprio  $\langle F, F \rangle$ :

$$\langle A, dA \rangle + \frac{1}{3} \langle A, [A, A] \rangle$$

detta *forma di Chern-Simons*. A questo punto possiamo pensare all'azione di Chern-Simons come il termine di bordo che si ottiene applicando il teorema di Stokes a  $N = [0, 1] \times S$  con  $\partial N = S$ .

L'importanza della teoria di Chern-Simons è data dalla relazione con la topologia delle varietà 3-dimensionali: la sua quantizzazione via integrale di cammino fornisce degli invarianti dei nodi (queste idee sono espresse in maniera non tecnica in [2]).

### 5.1.1 Simmetrie e formulazione hamiltoniana

L'invarianza per diffeomorfismi della teoria CS è facile da dimostrare e segue in maniera ovvia dall'invarianza per diffeomorfismi che preservano l'orientazione dell'integrazione. Questo ragionamento funziona perchè non ci sono delle strutture arbitrarie (per esempio una metrica) nella definizione della forma di Chern Simons.

La teoria possiede inoltre un'invarianza di gauge. Ricordiamo che una trasformazione di gauge per un fibrato principale  $\pi : E \rightarrow M$  con gruppo di struttura  $G$  e algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  è un automorfismo  $f$  che induce l'identità sulla

base. Questi automorfismi sono in corrispondenza biunivoca con le mappe equivarianti  $\psi : E \rightarrow G$ , i.e. le mappe tali che  $\psi(xg) = g^{-1}\psi(x)g$ . L'equivalenza è data ponendo  $f(x) = x\psi(x)$ . L'effetto di una tale trasformazione su una connessione principale è:

$$f^*A = \text{Ad}_{\psi^{-1}}A + \psi^{-1}d\psi$$

Scrivendo l'azione del gruppo data dalla  $\psi$  come esponenziale di una funzione  $\beta \in \Omega^0(M, \mathfrak{g})$  e sviluppando al primo ordine si ottiene la corrispondente trasformazione di gauge infinitesima:

$$(\mathbb{I} + \delta_\beta) : A \mapsto A + [A, \beta] + d\beta$$

la variazione dell'azione in seguito ad una trasformazione di gauge infinitesima si dimostra essere zero utilizzando il teorema di Stokes e la proprietà ciclica gradata della traccia.

Per applicare il PσM dobbiamo innanzitutto dare una *formulazione hamiltoniana* della teoria: il caso CS 3-dimensionale è molto semplice anche da questo punto di vista in quanto la teoria è *già* in forma hamiltoniana, basta effettuare la decomposizione spazio + tempo. Iniziamo scrivendo  $M = \mathbb{R} \times S$ , dove  $S$  è una varietà bidimensionale e  $\mathbb{R}$  è l'asse temporale. Dall'isomorfismo:

$$\Omega^1(M, \mathfrak{g}) \simeq \Omega^{1,0}(\mathbb{R} \times S) \oplus \Omega^{0,1}(\mathbb{R} \times S)$$

ho la decomposizione della connessione e del differenziale:

$$\begin{aligned} A &= A_0 dt + \alpha \quad ; \\ d_M &= dt \frac{\partial}{\partial t} + d_S := d_t + d_S \quad , \end{aligned}$$

Ora isolo i contributi in  $\Omega^3(M, \mathfrak{g}) \simeq \Omega^{2,1}(\mathbb{R} \times S)$  dei due termini dell'azione:

$$\begin{aligned} \langle A, dA \rangle &= \langle \alpha, d_S A_0 dt + \dot{\alpha} dt \rangle + \langle A_0 dt, d_S \alpha \rangle \\ \langle A, [A, A] \rangle &= \langle \alpha, [A, A] |_{\Omega^{1,1}(\mathbb{R} \times S)} \rangle + \langle A_0 dt, [A, A] |_{\Omega^{2,0}(\mathbb{R} \times S)} \rangle = \\ &= 3 \langle A_0 dt, [\alpha, \alpha] \rangle \end{aligned}$$

dove si è usata l'Ad-invarianza del prodotto scalare sull'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  e il fatto che tutte le forme in gioco sono di grado 1 (importante per l'uso, nell'ultimo passaggio, dell'identità di Jacobi gradata). Raccogliendo le identità finora prodotte, l'azione di Chern Simons si può riscrivere come:

$$\int_{\mathbb{R} \times S} \langle \alpha, d_t \alpha \rangle + 2 \langle A_0 dt, d_S \alpha \rangle + \langle A_0 dt, [\alpha, \alpha] \rangle$$



Da questa azione si legge che  $A_0$  non è una variabile dinamica, in quanto il suo momento coniugato è nullo. È quindi un campo cinematico che svolge il ruolo di moltiplicatore di Lagrange per la condizione:

$$\frac{\delta S}{\delta A_0} = d\alpha + [\alpha, \alpha] = 0 \quad (5.2)$$

Lo spazio dei campi della nostra teoria è quindi  $\Omega^{0,1}(\mathbb{R} \times S, \mathfrak{g})$ , mentre lo spazio delle fasi è  $\Omega^1(S, \mathfrak{g})$  è dotato della struttura simplettica costante e naturale data dal pairing delle forme associato al prodotto Ad-invariante definito su  $\mathfrak{g}$ :

$$(\alpha, \beta) := \int_S \langle \alpha, \beta \rangle. \quad (5.3)$$

Il pairing così definito è chiaramente bilineare e antisimmetrico, inoltre la forma simplettica associata è chiusa perchè costante. È inoltre non degenerare in senso debole, cioè  $(\alpha, \beta) = 0$  per ogni  $\alpha$  implica  $\beta = 0$ .

### 5.1.2 La sottovarietà coisotropa delle connessioni piatte

In questa sezione dimostriamo che la sottovarietà  $\mathcal{C} \subset \Omega^1(S, \mathfrak{g})$  delle connessioni piatte è coisotropa. È una dimostrazione diretta e costruttiva che paga queste proprietà con una certa complicatezza. Vedremo più avanti un modo più veloce di dimostrare questa affermazione sfruttando le proprietà delle mappe equivarianti del momento.

Iniziamo col descrivere lo spazio tangente  $T_\alpha \mathcal{C}$ . Considero i vettori come classi di equivalenza di cammini in  $\mathcal{C}$  che hanno un contatto del primo ordine. Sia  $\alpha(\cdot) : t \mapsto \alpha_t$  un cammino in  $\mathcal{C}$  tale che  $\alpha(0) = \alpha$ . È sufficiente considerare cammini lineari nel tempo:

$$\alpha(t) := \alpha + t\xi, \quad \xi \in \Omega^1(S, \mathfrak{g}). \quad (5.4)$$

Deve valere la condizione di piatezza ad ogni tempo.

$$d\alpha_t + [\alpha_t, \alpha_t] = 0$$

Sostituendo la (5.4) e tenendo solo i termini del primo ordine nel tempo ottengo la condizione che definisce un vettore tangente in  $\Omega^1(S, \mathfrak{g})$ :

$$\xi \in T_\alpha \mathcal{C} \iff \xi \in \Omega^1(S, \mathfrak{g}) \quad / \quad d\xi + [\alpha, \xi] = 0$$

Il prossimo passo è determinare l'annullatore di  $T_\alpha \mathcal{C}$ . Cerco i  $\beta \in T_\alpha \Omega^1(S, \mathfrak{g})$  tali che:

$$(\beta, \xi) = \int_S \langle \beta, \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in T_\alpha \mathcal{C}$$

I  $\beta$  che sono  $d_\alpha$ -esatti soddisfano questa richiesta. Infatti, sia:

$$\beta = d\tau + [\alpha, \tau] = d_\alpha\tau$$

con  $\tau \in \Omega^0(S, \mathfrak{g})$ . Segue che:

$$\int_S \langle \beta, \xi \rangle = \int_S \langle d_\alpha\tau, \xi \rangle = - \int_S \langle \tau, d_\alpha\xi \rangle = 0$$

poichè i vettori tangenti  $\xi$  sono  $d_\alpha$ -chiusi. Questo dimostra che:

$$\beta = d\tau + [\alpha, \tau] \implies \beta \in \text{Ann } T_\alpha\mathcal{C} \quad (5.5)$$

L'implicazione inversa è più laboriosa e la rimandiamo a tra poco, nel frattempo la supponiamo vera.

Quello che abbiamo sono le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \xi \in T_\alpha\mathcal{C} &\iff d_\alpha\xi = 0 \\ \beta \in T_\alpha^\perp\mathcal{C} &\iff \beta = d_\alpha\tau \end{aligned}$$

Queste relazioni implicano che  $\mathcal{C}$  è coisotropa, infatti:

$$\beta = d_\alpha\tau \implies d_\alpha\beta = d_\alpha^2\tau = [F_\alpha, \tau] = 0$$

poichè  $\alpha$  è piatta per ipotesi, i.e.  $F_\alpha = 0$ . Questo breve calcolo mostra che  $T_\alpha^\perp\mathcal{C} \subset T_\alpha\mathcal{C}$ , che è quello che volevamo dimostrare.

Le condizioni al contorno per i campi  $(X, \eta)$  del P $\sigma$ M sono quindi:

$$\begin{aligned} X &: \partial H \rightarrow \mathcal{C}; \\ \eta &: T\partial H \rightarrow T^\perp\mathcal{C} \end{aligned}$$

cioè, sul bordo  $\partial H$  devono valere:

$$\begin{aligned} d_S X + \frac{1}{2}[X, X] &= 0 \\ \eta &= d_S\tau + [X, \tau], \quad \tau \in \Omega^{1,0}(\partial H \times S, \mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Non resta che mostrare l'inversa dell'implicazione (5.5): a questo scopo mostro che tutti gli elementi dell'annullatore sono  $d$ - $\alpha$ -esatti. Per semplicità iniziamo dal caso abeliano e scegliamo una triangolazione  $\{U_i\}$  di  $S$ . Gli  $U_i$  sono contraibili e, visto che  $d\xi = 0$ , le restrizioni  $\xi_i = \xi|_{U_i}$  sono esatte: esistono delle funzioni  $\lambda_i$  tali che  $d\lambda_i = \xi_i$ . Osserviamo che in generale non esiste un  $\lambda$  definito globalmente come incollamento dei  $\lambda_i$ . Su un lato  $U_i \cap U_j$  della triangolazione deve valere:

$$d\lambda_i = d\lambda_j \implies \lambda_i - \lambda_j = c_{ij} \quad (5.6)$$

dove le  $c_{ij}$ , sono opportune costanti. Se  $\beta$  appartiene a  $T_\alpha^\perp \mathcal{C}$ , deve valere per ogni  $\xi$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S \langle \beta, \xi \rangle = \sum_i \int_{U_i} \langle \beta_i, \xi_i \rangle = \\ &= \sum_i \int_{U_i} \langle \beta_i, d\lambda_i \rangle = \sum_i (-)^{\lambda_i+1} \left( \int_{U_i} \langle d\beta_i, \lambda_i \rangle + \int_{\partial U_i} \langle \beta_i, \lambda_i \rangle \right) = \\ &= \sum_i (-)^{\lambda_i+1} \left( \int_{U_i} \langle d\beta_i, \lambda_i \rangle \right) + \sum_{ij} \left( \int_{U_i \cap U_j} \langle \beta_i, c_{ij} \rangle \right) \end{aligned}$$

Questa identità deve valere per tutte le scelte dei  $\lambda_I$ : scegliendoli concentrati nell'interno degli insiemi che costituiscono la triangolazione si ottiene:

$$\int_{U_i} \langle d\beta_i, \lambda_i \rangle = 0$$

cioè  $d\beta_i = 0$ , ma essendo gli  $U_i$  contraibili, esistono dei  $\tau_i$  (in generale non definiti globalmente) tali che  $\beta_i = d\tau_i$ . Sempre usando l'arbitrarietà nei  $\lambda_i$ , ottengo la condizione:

$$\int_{U_i \cap U_j} \langle \beta_i, c_{ij} \rangle = 0$$

che per  $c_{ij} = 1$  è:

$$\int_{U_i \cap U_j} d\tau_i = \tau_i^+ - \tau_i^- = 0 \quad (5.7)$$

dove  $+$  e  $-$  indicano la valutazione nei due vertici del lato  $U_i \cap U_j$  della funzione  $\tau$ . La (5.7) dice che le funzioni  $\tau_i$  sono tra loro compatibili (i.e. hanno lo stesso valore) su tutti i vertici della triangolazione, e visto che le differenze sono date dalle *costanti*  $c_{ij}$ , segue che queste sono nulle, e quindi le  $\tau_i$  possono essere incollate per ottenere una funzione globale  $\tau$  tale che  $\beta = d\tau$ , come volevamo dimostrare.

Nel caso non abeliano dobbiamo trattare con derivate covarianti piuttosto che con il differenziale di De Rham. La prima differenza è nella (5.6), le  $c_{ij}$  non sono più delle costanti, ma delle funzioni i cui valori si ottengono a partire da un punto attraverso le ologomie. Ripercorrendo gli stessi calcoli si giunge a:

$$c_{ij}^+ \tau_i^+ - c_{ij}^- \tau_i^- = 0.$$

Per l'arbitrarietà a meno di funzioni  $d_\alpha$ -esatte dei  $\tau_i$ , posso fissare il valore in un vertice in modo tale che sia uguale per tutti, a questo punto, l'ultima relazione, mi permette di costruire delle relazioni tra tutti i vertici consistenti col fatto che le  $c_{ij}$  si propagano con le ologomie e di ottenere per incollamento la forma globale  $\tau$  la cui derivata covariante è  $\beta$ .

### 5.1.3 Estensione del dominio temporale

Quando abbiamo costruito il Poisson Sigma Model (vedi capitolo 2), è stato cruciale estendere il dominio della variabile spaziale ad una varietà bidimensionale, il cui bordo rappresentava l'asse dei tempi. Per dare una formulazione corretta del Poisson Sigma Model applicato alla teoria di Chern Simons, adottiamo lo stesso punto di partenza. Seguiamo questa procedura per trovare il modo di includere in maniera naturale le condizioni al contorno per i campi  $X$  e  $\eta$ .

L'azione (5.1) può essere riscritta in maniera equivalente su una varietà di dimensione 4,  $H \times S$ , tale che  $\partial H = \mathbb{R}$  rappresenti l'asse dei tempi e  $H$  sia lo spazio sorgente del P $\sigma$ M. Per ottenere questo risultato, considero un'estensione qualsiasi della connessione  $A$  ad una forma in  $\Omega^1(H \times S, \mathfrak{g})$ . L'azione cercata è la seguente:

$$\int_{H \times S} \langle F, F \rangle$$

dove  $F$  è la curvatura della connessione  $A$ . Mostriamo l'equivalenza con la solita azione di CS. Sostituendo la forma esplicita della curvatura si ottiene, usando l'identità di Jacobi e la Ad-invarianza del prodotto scalare:

$$\int_{H \times S} \langle dA, dA + [A, A] \rangle = \int_{H \times S} d \langle A, dA + [A, A] \rangle = \int_{\mathbb{R} \times S} dA + [A, A].$$

Per ottenere una struttura che ricordi il P $\sigma$ M, introduco un campo ausiliario  $B \in \Omega^2(H \times S, \mathfrak{g})$  e riscivo l'equazione in un'altra forma equivalente:

$$\frac{1}{2} \int \langle F, F \rangle \sim \int \langle F, B \rangle + \frac{1}{2} \langle B, B \rangle \quad (5.8)$$

Che cos'è l'equivalenza in questo contesto? Visto che il nostro scopo ultimo è fare una teoria quantistica e attraverso il formalismo funzionale; due azioni saranno equivalenti se forniscono gli stessi valori di aspettazione per le osservabili (che dipendono per ipotesi solo da  $F$ ). In questo caso, un'integrazione gaussiana sul campo  $B$  mostra l'equivalenza.

### 5.1.4 Interpretazione attraverso il P $\sigma$ M

Quello che ci proponiamo di fare in questo capitolo, è dare una interpretazione dell'azione:

$$\int_{H \times S} \langle F, B \rangle + \frac{1}{2} \langle B, B \rangle$$

in termini del Poisson Sigma Model. I campi in questione sono:

$$\begin{aligned} A &\in \Omega^1(H \times S, \mathfrak{g}); \\ B &\in \Omega^2(H \times S, \mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Oltre a riconoscere la solita coppia  $(X, \eta)$  ci troviamo con molti altri campi disponibili: sono i campi necessari a prendere in considerazione la simmetria di gauge della teoria e ad imporre i vincoli.

Il punto di partenza sono questi due isomorfismi:

$$\begin{aligned}\Omega^1(H \times S, \mathfrak{g}) &\simeq \Omega^{1,0}(H \times S, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^{0,1}(H \times S, \mathfrak{g}) \\ \Omega^2(H \times S, \mathfrak{g}) &\simeq \Omega^{2,0}(H \times S, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^{1,1}(H \times S, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^{0,2}(H \times S, \mathfrak{g}).\end{aligned}$$

Identificare  $(X, \eta)$  è ora immediato:

$$\begin{aligned}X &\in \Omega^{0,1}(H \times S, \mathfrak{g}); \\ \eta &\in \Omega^{1,1}(H \times S, \mathfrak{g}),\end{aligned}$$

mentre per le altre componenti introduciamo la seguente nomenclatura:

$$\begin{aligned}\tau &\in \Omega^{1,0}(H \times S, \mathfrak{g}); \\ \lambda &\in \Omega^{2,0}(H \times S, \mathfrak{g}); \\ \mu &\in \Omega^{0,2}(H \times S, \mathfrak{g}).\end{aligned}$$

La decomposizione delle forme  $A$  e  $B$  è quindi:

$$A = \tau \oplus X; \tag{5.9}$$

$$B = \lambda \oplus \eta \oplus \mu. \tag{5.10}$$

Per cercare di fare ordine in questa selva di campi, riscivo tutti i termini del grado giusto sfruttando le (5.9). Dal termine  $\langle B, F \rangle$ :

$$\begin{aligned}\eta d_H X, & \quad \eta(d_S \tau + [X, \tau]), \\ \lambda(d_S X + \frac{1}{2}[X, X]), & \quad \mu(d_H \tau + \frac{1}{2}[\tau, \tau]);\end{aligned} \tag{5.11}$$

mentre dal termine  $\frac{1}{2}\langle B, B \rangle$ :

$$\frac{1}{2}\eta \eta, \quad \lambda \mu. \tag{5.12}$$

Ora, raggruppando i termini ottengo:

1. Un P $\sigma$ M per lo spazio target  $\mathcal{M} = \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ :

$$\langle \eta, d_H X \rangle + \frac{1}{2}\langle \eta, \eta \rangle$$

2. Un vincolo per  $X$ :

$$\left\langle \lambda, d_S X + \frac{1}{2}\langle X, X \rangle + \mu \right\rangle$$

3. Un PσM per lo spazio target  $\mathfrak{G}^*$ , algebra di Lie del gruppo di gauge  $\mathcal{G}$  che agisce sullo spazio delle connessioni  $\mathcal{M}$ , dato dal termine

$$\left\langle \mu, d_H \tau + \frac{1}{2}[\tau, \tau] \right\rangle. \quad (5.13)$$

Come abbiamo già ricordato, le trasformazioni di gauge sono in corrispondenza con le mappe  $\psi : S \rightarrow \mathcal{G}$ , la loro versione infinitesima sono quelle a valori nell'algebra di Lie  $\mathfrak{G}$ , vale quindi l'identificazione:

$$\mathfrak{G} \simeq \Omega^0(S, \mathfrak{g})$$

e anche:

$$\mathfrak{G}^* \simeq \Omega^2(S, \mathfrak{g}).$$

Questi isomorfismi mi permettono di vedere  $\mu \in \Omega^{0,2}(H \times S, \mathfrak{g})$  e  $\tau \in \Omega^{1,0}(H \times S, \mathfrak{g})$  come mappe:

$$\begin{aligned} \mu : H &\rightarrow \mathfrak{G}^* \simeq T\mathfrak{G}^* \\ \tau : TH &\rightarrow \mathfrak{G} \simeq T^*\mathfrak{G}^* \end{aligned}$$

Mettendo la condizione sul bordo di  $H$  per il campo  $\tau$ , i.e. che si annulli sui vettori tangenti a  $\partial H$ , posso integrare per parti la (5.13) ed ottenere la seguente lagrangiana:

$$\langle \tau, d_H \mu \rangle + \frac{1}{2} \langle \mu, [\tau, \tau] \rangle. \quad (5.14)$$

che è esattamente un PσM per la varietà target  $\mathfrak{G}^*$  con struttura di Poisson di Kostant-Krilliov.

4. Infine il termine:

$$\langle \eta, d_S \tau + \langle X, \tau \rangle \rangle = \langle \eta, d_X \tau \rangle$$

lega le due strutture di Poisson<sup>1</sup>

Per concludere questo paragrafo, scriviamo l'azione completa del Poisson Sigma Model della teoria di Chern Simons:

$$\begin{aligned} \int_{H \times S} \langle \eta, d_H X \rangle + \frac{1}{2} \langle \eta, \eta \rangle + \\ + \langle \tau, d_H \mu \rangle + \frac{1}{2} \langle \mu, [\tau, \tau] \rangle + \\ + \langle \eta, d_X \tau \rangle + \langle \lambda, d_X X + \mu \rangle \end{aligned} \quad (5.15)$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\tau|_{T\partial H} = 0$$

<sup>1</sup>Questa affermazione è ancora un po' troppo vaga, ma vedremo più avanti che questo termine è definito dal pering dato da un bivettore su  $\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*$ .

## 5.2 Momentum Map e J-PσM

In questa sezione introduciamo la *momentum map*  $J$ , che utilizziamo per dare la formulazione del  $J$ -PσM — cioè la formulazione del PσM per una teoria di gauge —, e le azioni hamiltoniane equivarianti di un gruppo su una varietà di Poisson. Come prima applicazione vedremo una dimostrazione più semplice del fatto che la sottovarietà  $\mathcal{C}$  nella teoria di Chern Simons è coisotropa; è stata proprio questo il punto di partenza che ha portato alla costruzione del  $J$ -PσM. La nostra attenzione si sposta sulla varietà di  $\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*$  su cui introduciamo una struttura di Poisson ad hoc, che comprende un termine legato a  $J : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{G}^*$ .

### 5.2.1 Azioni Hamiltoniane equivarianti

Considero una varietà di Poisson  $N$  e l'azione  $\Phi$  data da un gruppo di Lie  $G$ :

$$\Phi : G \times N \rightarrow N.$$

Se  $\mathfrak{g}$  è l'algebra di Lie di  $G$ , indico con  $X_\xi$  il campo su  $N$  pull back del campo invariante su  $G$  generato da  $\xi \in \mathfrak{g}$  tramite  $\Phi_*^x : TG \rightarrow N$  e dato esplicitamente da:

$$X_\xi(x) = -\Phi_*^x(e)(\xi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_{\exp -t\xi}(x),$$

dove il segno meno è necessario affinché la mappa  $\xi \mapsto X_\xi$ . L'equazione precedente definisce l'azione infinitesima associata a  $\Phi$ . Se per ogni  $g \in G$  la mappa  $\Phi(g, \bullet)$  è un morfismo di Poisson, allora l'azione è detta di Poisson; se per ogni  $g \in G$  esiste  $f_g \in \text{Fun}(N)$  tale che  $X_\xi$  sia il sucampo hamiltoniano allora diciamo che l'azione  $\Phi$  è *hamiltoniana*. Abbiamo il seguente importante:

**Teorema 5.2.1.** *Un'azione  $\Phi : G \times N \rightarrow N$  è hamiltoniana se e solo esiste una mappa  $J : N \rightarrow \mathfrak{g}^*$  tale che per ogni  $\xi \in \mathfrak{g}$ , la funzione  $J(\xi) \in \text{Fun}(N)$  definita da*

$$J(\xi)(x) = J(x)(\xi) \tag{5.16}$$

soddisfa:

$$X_\xi = X_{J(\xi)}. \tag{5.17}$$

**Definizione 5.2.2.** 1. *Una mappa  $J : N \rightarrow \mathfrak{g}^*$  che soddisfa (5.16) e (5.17) è detta momentum map dell'azione hamiltoniana di  $G$  su  $M$ .*

2. *Se inoltre  $J$  soddisfa:*

$$J(\phi(g, x)) = (\text{Coad } g)(J(x))$$

*allora è detta equivariante.*

Muniti di queste definizioni vediamo un po' cosa possiamo combinare con la teoria di Chern Simons. Iniziamo dalla definizione di J:

$$\begin{aligned} J : \Omega^1(S, \mathfrak{g}) &\rightarrow \Omega^2(S, \mathfrak{g}) \\ \alpha &\mapsto F_\alpha = d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]. \end{aligned}$$

Posso pensare la curvatura come un funzionale su  $\mathfrak{G} \simeq \Omega^0(S, \mathfrak{g})$  dato da  $J_\bullet(\alpha)$ , e tale che per ogni  $\beta \in \Omega^0(S, \mathfrak{g})$  valga:

$$J_\beta(\alpha) = \int \left\langle \beta, d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] \right\rangle,$$

in particolare  $J_\beta \in Fun(\Omega^1(S, \mathfrak{g}))$ . Mostriamo che è una moment map, cioè che  $X_\beta = X_{J_\beta}$ , dove  $X_{J_\beta}$  è il campo hamiltoniano di  $J_\beta$  e  $X_\beta$  è il pull back di  $\beta$ . Equivalentemente basta mostrare che:

$$\iota_{X_\beta}\omega = \iota_{X_{J_\beta}}\omega = dJ_\beta$$

Sia  $Y$  un campo vettoriale sullo spazio delle fasi  $\Omega^1(S, \mathfrak{g})$ , studiando la variazione  $\alpha \mapsto \alpha + t\gamma$  si ottiene:

$$\iota_Y dJ_\beta(\alpha) = \int \langle \beta, dY \rangle + \langle \beta, [\alpha, Y] \rangle = \int \langle Y, d\beta + [\alpha, \beta] \rangle,$$

dove si è usata al solito modo la Ad-invarianza. D'altro canto:

$$\iota_Y \iota_{X_\beta}\omega = \int \langle Y, X_\beta \rangle,$$

ma un campo vettoriale push forward di un elemento di  $\mathfrak{G}$  è della forma:

$$(X_\beta)_\alpha = d\beta + [\alpha, \beta],$$

quindi segue che J è una momentum map. L'equivarianza segue facilmente dalle proprietà di trasformazione della curvatura. Citiamo ora il seguente:

**Teorema 5.2.3.** *Una mappa del momento equivariante  $J : N \rightarrow \mathfrak{g}^*$  è un morfismo di Poisson se  $\mathfrak{g}^*$  è equipaggiato con la struttura di Kostant-Krilliov.*

Con questi strumenti a disposizione è immediato mostrare:

**Teorema 5.2.4.** *La sottovarietà  $\mathcal{C}$  delle connessioni piatte in  $\Omega^1(S, \mathfrak{g})$  è coisotropa.*

*Dimostrazione.*  $\mathcal{C}$  è la controimmagine dell'origine  $0 \in \mathfrak{G}^*$  attraverso la mappa equivariante del momento J. Ma 0 è un foglio simplettico in  $\mathfrak{G}^*$  e J è un morfismo di Poisson, ma allora  $\mathcal{C}$  è coisotropa, come osservato nel paragrafo 4.1.2.  $\square$



### 5.2.2 J-Prodotto di varietà di Poisson

Questa dimostrazione del fatto che  $\mathcal{C}$  è coisotropa, suggerisce un setting generale in cui inquadrare la teoria sviluppata precedente nel caso di Chern-Simons ed ottenere il preannunciato J-PσM.

Gli ingredienti della ricetta sono una varietà di Poisson  $\mathcal{M}$  e una mappa degli impulsi  $J : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{G}^*$ . Come omaggio otteniamo il seguente morfismo di algebre di Lie, che useremo in seguito:

$$J^* : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

Ricordiamo di nuovo quello che stiamo cercando di fare: formulare il PσM per una varietà di Poisson  $(\mathcal{M}, \pi)$  su cui è data una azione hamiltoniana equivariante di un gruppo (di gauge)  $\mathcal{G}$ , con algebra di Lie  $\mathfrak{G}$ , descritta dalla momentum map  $J$ . In particolare, voglio quantizzare  $J^{-1}(0)/\mathcal{G}$ . L'azione è costituita da 4 parti

$$\begin{aligned} \text{P}\sigma\text{M}(\mathcal{M}) &= \int \langle \eta, dX \rangle + \frac{1}{2} \langle \pi^\sharp(X)\eta, \eta \rangle \\ \text{P}\sigma\text{M}(\mathfrak{G}^*) &= \int \langle \tau, d\mu \rangle + \frac{1}{2} \langle \mu, [\tau, \tau] \rangle \\ \text{vincolo} &= \int \langle \lambda, J(X) + \mu \rangle \\ \text{J-struttura di Poisson} &= \int \langle J^*(\tau), \eta \rangle . \end{aligned}$$

I campi sono i seguenti:

$$\begin{aligned} X &: H \rightarrow \mathcal{M}, \\ \eta &\in \Omega^1(H, X^*T^*\mathcal{M}) \\ \mu &: H \rightarrow \mathfrak{G}^* \\ \tau &\in \Omega^1(H, \mathfrak{G}). \end{aligned}$$

Come abbiamo già visto, per ogni  $\xi \in \mathfrak{G}$ , la momentum map  $J$  induce una funzione su  $\mathcal{M}$ , data da:

$$J_\xi(x) = [J(x)](\xi)$$

Sfruttando la seguente relazione, data dalla definizione di momentum map:

$$\pi dJ_\xi = X_\xi = J^*(\xi)$$

posso riscrivere il quarto termine dell'azione:

$$\langle J^*(\tau), \eta \rangle = \langle \pi d_{\mathcal{M}} J_\tau(X), \eta \rangle$$

che in coordinate è:

$$= \pi^{ij} \partial_i J^d \eta_j \tau_d := \pi_j^{id} \eta_i \tau_d$$

dove il tensore  $\pi_J^{id}$  è un campo bivettoriale su  $\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*$ , cioè:

$$\pi_J \in \Gamma(\bigwedge^2 T(\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*))$$

In conclusione posso scrivere il quarto termine dell'azione come:

$$\langle J^*(\tau), \eta \rangle = \langle \pi_J(X)\tau, \eta \rangle$$

ed è ora chiaro che descrive una struttura di Poisson che lega i due spazi  $\mathcal{M}$  e  $\mathfrak{G}^*$ .

La nostra attenzione si sta spostando verso la varietà di Poisson  $\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*$ , non dotata della solita struttura del prodotto, ma con un termine aggiuntivo legato al campo bivettoriale  $\pi_J$  che abbiamo appena introdotto. La struttura di Poisson su questo spazio è data dal bivettore:

$$\tilde{\pi} = \pi_{\mathcal{M}} + \pi_{\mathfrak{G}^*} + \pi_J \quad (5.18)$$

Finalmente, abbiamo riordinato e spiegato nel dettaglio tutti gli elementi che compaiono nel J-PσM:

$$J - P\sigma M(\mathcal{M}) = P\sigma M(\mathcal{M}) + P\sigma M(\mathfrak{G}^*) + \text{struttura J-Poisson} + \text{vincolo}$$

Fondamentali sono le condizioni al contorno:

1.  $X|_{\partial H}$  libero;
2.  $\eta|_{\partial H}$  nullo sui vettori tangenti a  $\partial H$  ;
3.  $\mu|_{\partial H}$  a valori nella sottovarietà coistropa  $\{0\} \subset \mathfrak{G}^*$  ;
4.  $\tau|_{\partial H}$  a valori nel conormale di  $\{0\}$ , ma questo è tutto  $\mathfrak{G}$ ,  
quindi:

$$\tau|_{\partial H} \in \Omega^1(\partial H, \mathfrak{G}) \simeq \Omega^{1,0}(\partial H \times S, \mathfrak{g})$$

Le prime due condizioni sono le condizioni generiche che forniscono lo star prodotto di Konstevich. Non imponiamo condizioni particolari perchè ci aspettiamo che il vincolo risolva questo problema.

### 5.2.3 Le sottovarietà $J^{-1}(0)$ , $\mathcal{M} \times \{0\}$ e Graph J

In questa sezione esploriamo il significato geometrico del J-PσM, studiando le relazioni tra le varietà  $J^{-1}(0) \subset \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \times \{0\}$  e Graph J, le ultime due nel prodotto  $\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*$ .

Consideriamo prima di tutto il termine contenente il moltiplicatore di Lagrange  $\lambda$ :

$$\int \langle \lambda, J(X) - \mu \rangle .$$

Possiamo cambiare segno al campo  $\mu$  senza preoccuparcene troppo visto che le osservabili dipendono solo dal campo  $X$ . Questo contributo all'azione impone il vincolo:

$$J(X) = \mu,$$

cioè restringe i campi alle coppie  $((X, \eta), J(X))$  a valori in  $\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*$ , in altre parole alla sottovarietà  $\text{Graph } J$ .

**Teorema 5.2.5.** *Graph  $J$  è una sottovarietà di Poisson in  $(\mathcal{M} \times \mathfrak{G}_-^*, \tilde{\pi})$ .*

Con  $\mathfrak{G}_-^*$  indichiamo la varietà di Poisson  $\mathfrak{G}^*$  con struttura di Kostant-Krilliov con i segni invertiti.

*Dimostrazione.* Per definizione abbiamo:

$$\text{Graph } J = \{(x, J(x)), x \in \mathcal{M}\}$$

e il suo spazio tangente in punto qualsiasi è dato da:

$$T_{x,\mu} \text{Graph } J = \{(v, \varphi), v \in T_x \mathcal{M}, \varphi \in \mathfrak{G}^* / d_x J(v) - \varphi = 0\}.$$

L'annullatore  $N^* \text{Graph } J \subset T_{\text{Graph } J}^*(\mathcal{M} \times \mathfrak{G}_-^*)$  è dato dalle coppie  $(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha \in T^* \mathcal{M}$  e  $\beta \in \mathfrak{G}$ , tali che:

$$\langle (\alpha, \beta), (v, d_x J(v)) \rangle = 0, \forall v,$$

cioè:

$$\alpha(v) = -(d_x J)^* \beta \quad (5.19)$$

La struttura di Poisson su  $\text{Graph } J$  è la restrizione di  $\tilde{\pi}$ :

$$\tilde{\pi}^\#(\alpha \otimes \beta) = (\pi_{\mathcal{M}}^\#(\alpha) + \pi_J^{\#1}(\beta), \pi_J^{\#2}(\alpha) + \pi_{\mathfrak{G}^*}^\#(\beta)), \quad (5.20)$$

con la notazione:

$$\begin{array}{ccc} & T^* \mathcal{M} & \\ \pi_J^{\#2} \swarrow & & \searrow \pi_{\mathcal{M}}^\# \\ \mathfrak{G}^* & & T \mathcal{M} \\ \pi_{\mathfrak{G}^*}^\# \swarrow & & \searrow \pi^{\#1} \\ & \mathfrak{G} & \end{array}$$

Per verificare che  $\text{Graph } J$  è di Poisson, lavoro in coordinate. Il vincolo si scrive  $J^a = \mu^a$ , la condizione di tangenza è  $v^i \partial_i J^a = \varphi^a$  e infine, gli elementi dell'annullatore sono caratterizzati da  $\alpha^i = -\beta_a \partial_i J^a$ . Applico ora la (5.20) all'annullatore di  $\text{Graph } J$ . Per quanto riguarda la parte relativa a  $T^* \mathcal{M}$  ottengo:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{M}}^\#(\alpha) + \pi_J^{\#1}(\beta) &= \pi^{ij} \alpha_j + \pi^{ij} \partial_j J^a \beta_a = \\ &= -\pi^{ij} \beta_a \partial_j J^a + \pi^{ij} \partial_j J^a \beta_a = 0. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda  $\mathfrak{G}$ , indicando le sue costanti di struttura con  $f_c^{ab}$ , otteniamo invece:

$$\begin{aligned}\pi_{\mathfrak{G}^*}^{\sharp}(\beta) + \pi_J^{\sharp 2}(\alpha) &= -\mu^b f_b^{ca} \beta_c + \pi^{ij} \partial_j J^a \alpha_i = \\ &= -\mu^b f_b^{ca} \beta_c + \pi^{ij} \partial_j J^a \beta_c \partial_i J^c = \\ &= -\mu^b f_b^{ca} \beta_c + \{J^a, J^c\} \beta_c = \\ &= -\mu^b f_b^{ca} \beta_c + J^b f_b^{ca} \beta_c = 0.\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che la distribuzione  $\tilde{\pi}^{\sharp}(N^*\text{Graph } J)$  è nulla, quindi Graph  $J$  è una sottovarietà di Poisson (vedi [40]).  $\square$

La seconda varietà che prendiamo in considerazione è  $\mathcal{M} \times \{0\}$ .

**Teorema 5.2.6.**  $\mathcal{M} \times \{0\}$  è una sottovarietà di coisotropa in  $(\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*, \tilde{\pi})$ .

*Dimostrazione.* L'annullatore del fibrato tangente di  $\mathcal{M} \times \{0\}$  è:

$$\text{Ann } T_{\mathcal{M} \times \{0\}}(\mathcal{M} \times \{0\}) \simeq \mathcal{M} \times T^*\mathfrak{G}^* \simeq \mathcal{M} \times \mathfrak{G}.$$

Segue immediatamente che  $\mathcal{M} \times \{0\}$  è coisotropa in quanto:

$$\tilde{\pi} \big|_{\text{Ann } T_{\mathcal{M} \times \{0\}}(\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*)} = 0$$

in quanto nullo sulle singole componenti.  $\square$

La proiezione su  $\mathcal{M}$  della distribuzione caratteristica di  $\mathcal{M} \times \{0\}$  è l'azione infinitesima su  $\mathcal{M}$  del gruppo  $\mathcal{G}$ . Infatti, dato  $0 \oplus \beta \in \text{Ann } T_{\mathcal{M} \times \{0\}}(\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*)$ :

$$\tilde{\pi}^{\sharp}(0 \oplus \beta) = \pi_J^{\sharp 1}(\beta) := \pi_{\mathcal{M}} d_{\mathcal{M}} J_{\beta} := X_{J_{\beta}} = X_{\beta}. \quad (5.21)$$

Cerchiamo di fare un po' di luce su quanto fatto finora, e soprattutto perchè è stato fatto. Il nostro obiettivo è quello di quantizzare la sottovarietà coisotropa  $J^{-1}(0)$ . L'azione del J-Poisson Sigma Model, trascurato il vincolo, fornisce intuitivamente la quantizzazione di  $\mathcal{M} \times \{0\}$  (una volta che siano state poste le condizioni al contorno per  $\text{P}\sigma\text{M}(\mathfrak{G}^*)$  associate alla sottovarietà coisotropa  $\{0\} \in \mathfrak{G}^*$ ). Se aggiungiamo il vincolo, dobbiamo restringerci ulteriormente e considerare la sottovarietà:

$$\text{Graph } J \cap \mathcal{M} \times \{0\}$$

Ma evidentemente, vale l'isomorfismo tra varietà lisce:

$$\text{Graph } J \cap \mathcal{M} \times \{0\} \simeq J^{-1}(0).$$

Quello che mostriamo ora è che  $\text{Graph } J \cap \mathcal{M} \times \{0\}$  è coisotropa in Graph  $J$ ! Queste osservazioni sono una forte motivazione alla seguente identità euristica:

$$\text{P}\sigma\text{M}(J^{-1}(0)) \simeq J - \text{P}\sigma\text{M}(\mathcal{M})$$

**Teorema 5.2.7.** *Siano le sottovarietà  $P$  e  $C$  rispettivamente di Poisson e coisotropa in  $(N, \pi)$ . Allora  $P \cap C$  è coisotropa in  $P$ .*

*Dimostrazione.* La coisotropia è una proprietà locale, lavoriamo in coordinate. Per ogni punto  $x \in N$  scelgo una carta  $\phi : U_x \subset N \rightarrow \mathbb{R}$  tale che esistano dei set di indici  $\alpha$  e  $\beta$  che selezionano le componenti di  $\phi$  il cui luogo di zeri individua  $P$  o  $C$ . Sarebbe a dire

$$\begin{aligned} P \mid U_x &= \{y \in U_x / \phi^\alpha(y) = 0\} \\ C \mid U_x &= \{y \in U_x / \phi^\beta(y) = 0\} \end{aligned}$$

Introduciamo i seguenti set di indici:

$$\begin{array}{cccc} P \setminus (P \cup C) & C \setminus (P \cup C) & P \cap C & N \setminus (P \cup C) \\ i, j, \dots & I, J, \dots & a, b, \dots & \mu, \nu, \dots \end{array}$$

intendendo che  $\phi^I = 0$  individua il sottoinsieme  $P \setminus C$ , eccetera.  $P$  è una sottovarietà di Poisson e questo implica in termini delle componenti del bivettore di Poisson che devono essere soddisfatte le seguenti identità:

$$\pi^{\mu\nu} = \pi^{\mu i} = \pi^{IJ} = \pi^{\mu I} = \pi^{Ii} = \pi^{Ia} = \pi^{\mu a} = 0$$

La condizione di coisotropia di  $C$  invece implica:

$$\pi^{ij} = \pi^{i\mu} = \pi^{\mu\nu} = 0$$

Ora considero  $P \cap C \in P$ . È coisotropa se  $\pi^{ij}$  è uguale a zero, ma questo è garantito dal fatto  $C$  è coisotropa.  $\square$

**Corollario 5.2.8.** *Graph  $J \cap \mathcal{M} \times \{0\}$  è una sottovarietà coisotropa in Graph  $J$ .*

L'ultimo passo è quello di confrontare le riduzioni di Poisson delle sottovarietà coisotrope  $J^{-1}(0)$  e  $\text{Graph } J \cap \mathcal{M} \times \{0\}$ . Si vede facilmente che  $J^{-1}(0)$  è lo spazio delle orbite dell'azione del gruppo  $\mathcal{G}$  (si veda ancora [40]). Consideriamo invece la distribuzione caratteristica di  $\text{Graph } J \cap \mathcal{M} \times \{0\}$ , vista come sottovarietà di Graph  $J$ . Il fibrato cotangente  $T^*\text{Graph } J$  non è definito in maniera canonica come sottofibrato di  $T^*(\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*)$ . Utilizziamo la seguente definizione:

$$T^*\text{Graph } J := \frac{T^*\mathcal{M} \times \mathfrak{G}^*}{N^*\text{Graph } J},$$

quindi i suoi elementi saranno delle classi di equivalenza  $[(\alpha, \beta)]$ , ottenute attraverso la seguente relazione di equivalenza (5.19):

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) \sim (\alpha', \beta') &\iff \exists \hat{\beta} / \\ (\alpha - (dJ)^*\hat{\beta}, \beta + \hat{\beta}) &= (\alpha', \beta') \end{aligned}$$

Lo spazio tangente a  $\text{Graph J} \cap \mathcal{M} \times \{0\}$  è dato dalle coppie  $(v, d_x J(v))$  tali che  $d_x J(v) = 0$ . Quindi per una qualsiasi classe di equivalenza  $[(\alpha, \beta)] \in T^* \text{Graph J}$ , per ogni  $v$  tale che  $d_x J(v) = 0$  e per qualsiasi  $\hat{\beta}$  si ha:

$$\langle [(\alpha, \beta)], (v, d_0 J(v)) \rangle = (\alpha - (d_0 J)^* \hat{\beta})(v) \neq 0$$

a meno che esista un  $\hat{\beta}$  per cui  $\alpha = (d_0 J)^* \hat{\beta}$ . Quindi abbiamo appena dimostrato che:

$$\text{Ann}_{\text{Graph J}} \text{Graph J} \cap \mathcal{M} \times \{0\} = \{(\alpha, \beta) / \exists \hat{\beta} \in \mathfrak{G};, \alpha = (d_0 J)^* \hat{\beta}\}.$$

La distribuzione caratteristica di  $\text{Graph J} \cap \mathcal{M} \times \{0\} \in \text{Graph J}$  è quindi data dai vettori:

$$\tilde{\pi}^\# |_{\text{Graph J}} (\alpha, \beta) = \tilde{\pi}^\# |_{\text{Graph J}} (0, \beta + \hat{\beta}) = \tilde{\pi}^\# |_{\text{Graph J}} (0, \tilde{\beta})$$

che non è altro che l'azione del gruppo del gruppo  $\mathcal{G}$  su  $\mathcal{M}$  (si veda la (5.21)). Questo significa esattamente che:

$$\underline{J^{-1}}_{\mathcal{M}} \simeq \underline{\text{Graph J} \cap \mathcal{M} \times \{0\}}_{\text{Graph J}}$$

### 5.3 Il J-P $\sigma$ M in altre teorie di campo

Per concludere il capitolo, scriviamo esplicitamente il J-P $\sigma$ M in due casi: le teorie di *Yang Mills* e il P $\sigma$ M *affine*. Nel primo caso iniziamo con l'elettromagnetismo, che essendo una teoria abeliana è più semplice dal punto di vista computazionale. Con poco sforzo si può lavorare in maniera indipendente dalle coordinate e questo approccio permette di vedere più chiaramente la natura geometrica dei campi in gioco. La generalizzazione al caso non abeliano è praticamente immediata. Per quanto riguarda il P $\sigma$ M, è necessario restringersi al caso affine per poter applicare la costruzione del J-P $\sigma$ M. Nel caso generale si incontrano due problemi: il primo è che le simmetrie di gauge non sono ben definite globalmente ([36]) e il secondo è che i parametri infinitesimi delle trasformazioni locali non formano un'algebra di Lie. Questo inconveniente non si presentano nel caso in cui la varietà di Poisson del P $\sigma$ M considerato, sia ricoperta interamente da una carta e la struttura di Poisson sia affine: in queste ipotesi costruiamo il J-P $\sigma$ M per il P $\sigma$ M.

#### 5.3.1 Yang Mills abeliana: l'elettromagnetismo

Applichiamo ora il J-P $\sigma$ M alla teoria di Yang Mills, iniziando dal caso abeliano.

Il contenuto in termini di campi della teoria è dato da una connessione principale  $A \in \Omega^1(\mathbb{R} \times M, \mathfrak{g})$ , dove  $\mathbb{R} \times M$  è lo spaziotempo. La sua curvatura

è il tensore di Faraday, che contiene tutte le informazioni relative al campo elettromagnetico:

$$F = dA = B + E \wedge dt, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_x & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

In particolare il campo elettrico e magnetico possono essere visti rispettivamente come una 1-forma e una 2-forma:

$$E = E_x dz + E_y dz + E_z dz, \quad (5.23)$$

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy, \quad (5.24)$$

e l'azione è data da:

$$S = -\frac{1}{2} \int \text{tr } F \wedge *F.$$

Ricordiamo che l'azione dell'operatore di Hodge su  $E$  e  $B$  è data da  $*(E, B) = (- * B, *E)$  (a sinistra l'operatore di Hodge è quello sullo spaziotempo, mentre a destra sullo spazio tridimensionale). Come sempre, esplicitiamo la parte temporale e quella spaziale del potenziale  $A = A_0 dt + \alpha$  e del differenziale  $d = dt\partial/\partial t + d_M$ . Sostituendo nella (5.22) e confrontando con le (5.23) si ottiene:

$$F = d_M A_0 dt + dt \wedge \dot{\alpha} + d_M \alpha,$$

$$B = d_M \alpha,$$

$$E = d_M A_0 - \dot{\alpha}$$

e l'azione diventa:

$$S = -\frac{1}{2} \int \text{tr} (d_M A_0 dt - \dot{\alpha} dt) \wedge *(\text{tr} (d_M A_0 dt - \dot{\alpha} dt) + \text{tr} d_M \alpha \wedge *d_M \alpha).$$

Il momento coniugato di  $\alpha$  è  $\mathcal{E} \in \Omega^{0,2}(\mathbb{R} \times M, \mathfrak{g})$  dato da:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \dot{\alpha}} S &= - * (d_M A_0 - \dot{\alpha}) \wedge dt = \\ &= - * E \wedge dt =: \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Il momento coniugato di  $A_0$  è nullo, quindi  $A_0$  è un moltiplicatore di Lagrange per la condizione:

$$\frac{\delta}{\delta A_0} S = -d_M * (d_M A_0 - \dot{\alpha}) \wedge dt = d_M \mathcal{E}.$$

In coordinate è semplicemente la divergenza del vettore  $E$  e quindi il vincolo che stiamo per imporre non è altro che il cosiddetto vincolo di Gauss. Osserviamo che  $d_M \mathcal{E} \in \Omega^{0,3}(\mathbb{R} \times M, \mathfrak{g})$ , definiamo quindi la mappa  $J$ :

$$\begin{aligned} J : T^* \Omega^1(M, \mathfrak{g}) &\rightarrow \mathfrak{G}^* \simeq \Omega^3(M, \mathfrak{g}) \\ (\alpha, \mathcal{E}) &\mapsto d_M \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Dove come al solito  $\mathfrak{G}^*$  indica la coalgebra del gruppo delle trasformazioni di gauge  $\mathcal{G} \simeq \Omega^0(M, G)$ , con  $\mathfrak{g}$  algebra di Lie del gruppo  $G$ .

### Costruzione del modello

Scrivere l'azione del J-PσM è ora immediato.

Le variabili canoniche per l'elettromagnetismo sono:

$$(\alpha, \mathcal{E}) \in T^*\Omega^1(M, \mathfrak{g}) \simeq \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \oplus \Omega^2(M, \mathfrak{g})$$

Sottolineiamo che da ora,  $\alpha$  e  $\mathcal{E}$  determinano un punto nello spazio delle fasi e non dipendono dal tempo. Una mappa tra i fibrati  $TH$  e  $T^*\mathcal{M}$  (con  $\mathcal{M} := (T^*\Omega^1(M, \mathfrak{g}))$ ) è data da una mappa  $X = X_\alpha + X_\mathcal{E}$  tra le basi:

$$\begin{aligned} X_\alpha &\in \Omega^{0,1}(H \times M, \mathfrak{g}) \\ X_\mathcal{E} &\in \Omega^{0,2}(H \times M, \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

e da una 1-forma  $\eta = \eta_\alpha + \eta_\mathcal{E}$  su  $H$ :

$$\begin{aligned} \eta_\alpha &\in \Omega^{1,1}(H \times M, \mathfrak{g}) \\ \eta_\mathcal{E} &\in \Omega^{1,2}(H \times M, \mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Quindi il Poisson Sigma Model per lo spazio delle fasi  $T^*\Omega^1(M, \mathfrak{g})$  si scrive:

$$\int_{H \times M} \langle \eta, d_H X \rangle + \frac{1}{2} \langle \eta, \eta \rangle = \int_{H \times M} \langle \eta_\alpha, d_H X_\alpha \rangle + \langle \eta_\mathcal{E}, d_H X_\mathcal{E} \rangle + \langle \eta_\alpha, \eta_\mathcal{E} \rangle$$

Il Poisson Sigma Model per la coalgebra di gauge è descritto dai campi:

$$\begin{aligned} \mu &\in \Omega^{0,3}(H \times M, \mathfrak{g}), \\ \tau &\in \Omega^{1,0}(H \times M, \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

e l'azione è data semplicemente da

$$\int_{H \times M} \mu d_H \tau$$

in quanto stiamo lavorando nel caso abeliano. Il termine dell'azione legato alla J-struttura è:

$$\langle J^*(\tau), \eta \rangle = \langle d_{\mathcal{M}} J_\tau(X), \eta \rangle$$

con  $J_\xi(\alpha, \mathcal{E}) = d_M \mathcal{E}(\xi)$  per ogni  $\xi \in \mathfrak{G}$ . Aggiungendo anche il vincolo otteniamo l'azione del J-PσM sommando tutti i termini:

$$\begin{aligned} \int_{H \times M} \langle \eta_\alpha, d_H X_\alpha \rangle + \langle \eta_\mathcal{E}, d_H X_\mathcal{E} \rangle + \langle \eta_\alpha, \eta_\mathcal{E} \rangle + \\ \mu d_H \tau + \langle \lambda, d_M X_\mathcal{E} + \mu \rangle + \langle d_{\mathcal{M}}(d_M X_\mathcal{E}(\tau)), \eta \rangle. \end{aligned} \quad (5.26)$$



**Il caso non abeliano**

Il caso non abeliano è molto simile a quello appena discusso. Con le stesse notazioni di prima e tenendo conto che ora la curvatura è data da  $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ , si ottiene che il momento coniugato di  $\alpha$  è:

$$\mathcal{E} = - * (d_M A_0 - \dot{\alpha} + [\alpha, A_0]) \wedge dt$$

e la condizione associata al moltiplicatore di Lagrange  $A_0$  è :

$$d_M \mathcal{E} + [\alpha, \mathcal{E}] = 0$$

Quindi la mappa  $J$  è data da:

$$\begin{aligned} J : T^* \Omega^1(M, \mathfrak{g}) &\rightarrow \mathfrak{G}^* \simeq \Omega^3(M, \mathfrak{g}) \\ (\alpha, \mathcal{E}) &\mapsto d_M \mathcal{E} + [\alpha, \mathcal{E}]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

e l'azione del  $J$ - $P\sigma M$  è:

$$\begin{aligned} \int_{H \times M} &\langle \eta_\alpha, d_H X_\alpha \rangle + \langle \eta_\mathcal{E}, d_H X_\mathcal{E} \rangle + \langle \eta_\alpha, \eta_\mathcal{E} \rangle + \\ &\mu d_H \tau + \langle \mu, [\tau, \tau] \rangle + \langle \lambda, d_M X_\mathcal{E} + [X_\alpha, X_\mathcal{E}] + \mu \rangle + \\ &+ \langle d_M (d_M X_\mathcal{E} + [X_\alpha, X_\mathcal{E}])(\tau), \eta \rangle. \end{aligned} \quad (5.28)$$

**5.3.2 Il  $P\sigma M$  come teoria di gauge**

Un altro caso interessante da prendere in considerazione è la teoria di gauge descritta dal Poisson Sigma Model.

Riprendiamone l'azione:

$$\int_H \langle \eta, dX \rangle + \frac{1}{2} \langle \pi^\sharp(X) \eta, \eta \rangle$$

Il primo passo è dare una formulazione hamiltoniana della teoria e effettuare la decomposizione spazio + tempo. Il campo  $\eta$  è una somma diretta delle 1-forme  $\eta_t$  e  $\eta_s$  tali che:

$$\eta = \eta_t \oplus \eta_s \in \Omega^{0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, X^* T^* M) \oplus \Omega^{1,0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, X^* T^* M)$$

e con queste notazioni il termine cinetico dell'azione diviene:

$$\langle \eta, dX \rangle = \langle \eta_t, d_t X \rangle + \langle \eta_s, d_s X \rangle$$

dove si è tenuto conto che  $d_t$  e  $d_s$  sono i differenziali rispettivamente su  $\mathbb{R}$  e su  $\mathbb{R}^+$ ; l'interazione è invece data da  $\langle \pi^\sharp(X) \eta_t, \eta_s \rangle$ . L'azione può quindi essere riscritta come:

$$S(X, \eta_t, \eta_s) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \langle \eta_t, d_t X \rangle + \langle \eta_s, d_s X \rangle + \langle \pi^\sharp(X) \eta_t, \eta_s \rangle$$

Da  $S$  si legge che  $X$  e  $\eta_t$  sono coniugati tra loro, mentre  $\eta_s$  è un moltiplicatore di Lagrange in quanto il suo momento è nullo. La condizione a cui è associato  $\eta_s$  è:

$$\frac{\delta}{\delta\eta_s} S = d_S X + \pi^\sharp(X)\eta_t \in \Omega^{0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, TM). \quad (5.29)$$

Lo spazio target del PσM è dunque la varietà simplettica  $T^*\Omega^0(\mathbb{R}^+, M) \simeq T^*PM$ , dove  $PM$  indica i cammini in  $M$ .

Per procedere nella formulazione del J-PσM, dobbiamo individuare l'algebra di Lie del gruppo delle trasformazioni di gauge. Una risposta intuitiva (e sbagliata) si ottiene prendendo il duale dello spazio in cui vive la condizione (5.29) oppure ricordando che le trasformazioni di gauge sono parametrizzate da  $\beta \in \Omega^0(\mathbb{R}^+, X^*T^*M)$ . Ciononostante, le trasformazioni di gauge infinitesime del PσM sono ben definite solo localmente [36], [37]. Per questo ci restringiamo al caso in cui  $M = \mathbb{R}^n$ .

Sullo spazio  $\Omega^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n*})$ , è definita una parentesi 2.2.3, data da:

$$\left[ \beta, \tilde{\beta} \right]_i = \partial_i \pi^{jk} \beta_j \tilde{\beta}_k. \quad (5.30)$$

Questa parentesi non è però di Lie, infatti non soddisfa l'identità di Jacobi:

$$\begin{aligned} \left[ \left[ \beta, \tilde{\beta} \right], \hat{\beta} \right]_m &= \partial_m \pi^{il} \partial_i \pi^{jk} \beta_j \tilde{\beta}_k \hat{\beta}_l = \\ &= [\partial_m (\pi^{il} \partial_i \pi^{jk}) - \pi^{il} \partial_m \partial_i \pi^{jk}] \beta_j \tilde{\beta}_k \hat{\beta}_l = \\ &= -\pi^{il} \partial_m \partial_i \pi^{jk} \beta_j \tilde{\beta}_k \hat{\beta}_l, \end{aligned}$$

dove si è usata l'identità di Jacobi per il bivettore di Poisson  $\pi$ . Osserviamo che nel caso  $\pi$  sia al più lineare, l'identità di Jacobi è verificata e  $\Omega^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n*})$  è un'algebra di Lie con la parentesi (5.30).

Da ora in poi consideriamo strutture di Poisson sulla varietà  $\mathbb{R}^n$  al più lineari. I parametri  $\beta$  devono annullarsi sul bordo del dominio, quindi l'algebra delle trasformazioni di gauge è data da:

$$\mathfrak{G} = \{ \beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n*} / \beta(0) = 0 \} =: \Omega_0^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n*}),$$

e la duale:

$$\mathfrak{G}^* = \{ \beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n / \beta(0) = 0 \} =: \Omega_0^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n).$$

Ora possiamo definire in maniera consistente la mappa  $J$ :

$$\begin{aligned} J : T^*P\mathbb{R}^n &\rightarrow \mathfrak{G}^* \simeq \Omega_0^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n) \\ (X, \eta_t) &\mapsto dX + \pi^\sharp(X)\eta_t. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Verifichiamo che  $J$  è un morfismo di Poisson, cioè che vale:

$$\{J(\beta), J(\hat{\beta})\} = J\left([\beta, \hat{\beta}]\right), \quad (5.32)$$

dove con  $J(\beta)$  si intende la funzione su  $\mathcal{M}$  data da:

$$J(\beta)(X, \eta_t) = \int \langle \beta, dX + \pi^\sharp \eta_t \rangle$$

Per definizione:

$$\{J(\beta), J(\hat{\beta})\} = \left\langle \frac{\delta J(\beta)}{\delta \eta_t}, \frac{\delta J(\hat{\beta})}{\delta X} \right\rangle - \left\langle \frac{\delta J(\beta)}{\delta X}, \frac{\delta J(\hat{\beta})}{\delta \eta_t} \right\rangle$$

Dove il pairing è quello canonico su  $T^*P\mathbb{R}^n$ . Si ottiene facilmente che le derivate funzionali sono date dalle seguenti formule:

$$\frac{\delta J(\beta)}{\delta X} = -d\beta + \langle d\pi^\sharp \beta, \eta_t \rangle, \quad \frac{\delta J(\beta)}{\delta \eta_t} = \pi^\sharp \beta$$

dove il paring questa volta è quello tra  $R^n$  e  $R^{n*}$ . Sostituendo nell'espressione per il braket si ottiene:

$$\begin{aligned} \{J(\beta), J(\hat{\beta})\} &= \int_{\mathbb{R}^+} \langle d\beta, \pi^\sharp \hat{\beta} \rangle - \langle \pi^\sharp \beta, d\hat{\beta} \rangle = \\ &= \int -\langle \beta, d(\pi^\sharp \hat{\beta}) \rangle - \langle \pi^\sharp \beta, d\hat{\beta} \rangle = \\ &= \int -\langle \beta, d\pi^\sharp \hat{\beta} \rangle + \langle \pi^\sharp \beta, d\hat{\beta} \rangle - \langle \pi^\sharp \beta, d\hat{\beta} \rangle = \int [\beta, \hat{\beta}]. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\{J(\beta), J(\hat{\beta})\}(X, \eta_t) = \int \langle [\beta, \hat{\beta}], dX + \pi^\sharp \eta_t \rangle$$

dimostra la (5.32) e possiamo concludere che  $J^{-1}(0)$  è coisotropa.

Possiamo ora scrivere l'azione del J-PσM per il PσM affine. Iniziamo introducendo i campi necessari a descrivere il PσM con codominio  $\mathcal{M} = T^*P\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \mathcal{X}_X + \mathcal{X}_{\eta_t} : H \rightarrow \mathcal{M} \\ \mathcal{N} &= \mathcal{N}_X + \mathcal{N}_{\eta_t} \in \Omega^1(H, \mathcal{X}^*T^*\mathcal{M}) \\ S_{\mathcal{M}} &= \int \langle \mathcal{N}, d\mathcal{X} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{N}, \mathcal{N} \rangle, \end{aligned}$$

scriviamo esplicitamente le componenti dei campi  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{N}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_X &\in \Omega^0(H, \Omega^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)) \simeq \Omega^{0,0}(H \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n), \\ \mathcal{N}_X &\in \Omega^1(H, \Omega^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n*})) \simeq \Omega^{1,1}(H \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n*}), \\ \mathcal{X}_{\eta_t} &\in \Omega^0(H, \Omega^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n*})) \simeq \Omega^{0,1}(H \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n*}), \\ \mathcal{N}_{\eta_t} &\in \Omega^1(H, \Omega^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)) \simeq \Omega^{1,0}(H \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

Il secondo contributo all'azione del J-P $\sigma$ M è il P $\sigma$ M per la coalgebra  $\mathfrak{G}^*$  ed ha la solita forma. Stesso discorso per il vincolo. Vediamo invece cos'è in questo caso il termine dovuto alla struttura di J-prodotto:

$$\langle J^*(\tau), \mathcal{X}_{\eta_t} \rangle = \langle d_{\mathcal{M}}J(\mathcal{X})(\tau), \mathcal{X}_{\eta_t} \rangle.$$

In conclusione l'azione del J-P $\sigma$ M per il P $\sigma$ M è data da:

$$\begin{aligned} S = \int & \langle \mathcal{N}_X, d\mathcal{X}_X \rangle + \langle \mathcal{N}_{\eta_t}, d\mathcal{X}_{\eta_t} \rangle + \langle \mathcal{N}_X, \mathcal{N}_{\eta_t} \rangle + \\ & + \langle \tau, d\mu \rangle + \frac{1}{2} \langle \mu, [\tau, \tau] \rangle + \\ & + \left\langle \lambda, d\mathcal{X}_X + \pi^\#(\mathcal{X}_X)\mathcal{X}_{\eta_t} \right\rangle + \langle d_{\mathcal{M}}J(\mathcal{X})(\tau), \mathcal{X}_{\eta_t} \rangle. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Rimangono da essere discusse le condizioni al contorno. Per i campi  $\mu$  e  $\tau$  sono le solite:

1.  $\mu|_{\partial H}$  a valori nella sottovarietà coistropa  $\{0\} \subset \mathfrak{G}^*$  ;
2.  $\tau|_{\partial H}$  a valori nel conormale di  $\{0\}$ , ma cioè tutto  $\mathfrak{G}$ .

Per quanto riguarda  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{N}$  dobbiamo fissare le condizioni al contorno per il P $\sigma$ M model di partenza. Richiediamo le solite:

- $X|_{\partial H}$  libero;
- $\eta|_{\partial H}$  nullo sui vettori tangenti a  $\partial H$  ;

nel J-P $\sigma$ M abbiamo i campi  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_X + \mathcal{X}_{\eta_t}$  e  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_X + \mathcal{N}_{\eta_t}$ ; le condizioni su questi campi sono quindi:

1.  $\mathcal{X}_X|_{\partial H}$  libero;
2.  $\mathcal{X}_{\eta_t}|_{\partial H}$  nullo sull'immagine di  $\mathcal{N}_{\eta_t}$  ;
3.  $\mathcal{N}_X|_{\partial H}$  nullo sull'immagine di  $calX_X$  ;
4.  $\mathcal{N}_{\eta_t}|_{\partial H}$  libero.

# Conclusioni

A conclusion is simply the place where someone got tired of thinking.  
`/usr/share/games/fortunes/science`

L'applicazione del Poisson Sigma Model alla quantizzazione di una teoria di campo si scontra fin dal principio con il problema di definire lo spazio delle fasi (codominio dei campi del  $P\sigma M$ ), questione non banale data la presenza di simmetrie di gauge. Le alternative possibili sono due: rimuovere la libertà di gauge prima di formulare il  $P\sigma M$  o sviluppare una tecnica che permetta di restringere lo spazio delle fasi senza effettuare il gauge fixing. La prima opzione non è soddisfacente dato che in generale non si può effettuare il gauge fixing globalmente ed anche a livello concettuale è preferibile non spogliare la teoria della libertà di gauge. Nel caso in cui le simmetrie siano descritte da un'algebra di Lie, il  $J-P\sigma M$  è la tecnica che permette la formulazione coerente del Poisson Sigma Model. Gli elementi essenziali alla sua formulazione sono la mappa degli impulsi  $J$ , che contiene tutta l'informazione circa le simmetrie di gauge, e l'importanza delle sottovarietà coisotrope nel  $P\sigma M$ , che permettono di imporre condizioni al contorno generiche.

Il  $J-P\sigma M$  è solo un punto di partenza. Ci sono essenzialmente due direzioni da sviluppare: la quantizzazione del  $J-P\sigma M$  e la generalizzazione a teorie di gauge la cui distribuzione di simmetrie non è descritta da un'algebra di Lie.

L'ostacolo alla quantizzazione del  $J-P\sigma M$  per la CS è trovare un buon gauge fixing, visto che le condizioni al contorno dei campi rendono questa operazione problematica. Una volta risolta questa questione, la procedura di quantizzazione è semplice, almeno concettualmente. Il confronto tra i valori di aspettazione ottenuti dal  $J-P\sigma M$  e quelli ottenuti dalla quantizzazione funzionale della CS fornirà una prova della buona impostazione del  $J-P\sigma M$  o suggerirà eventuali modifiche.

Abbiamo visto che il  $J-P\sigma M$  non è applicabile al  $P\sigma M$ , se non nel caso affine. In generale, se le simmetrie della teoria di gauge presa in considerazione non sono descritte da un'algebra di Lie, non abbiamo a disposizione la mappa degli impulsi  $J$ . Come suggerito in [36] e [37], una descrizione geometrica coerente per teorie con algebra delle simmetrie aperta, è data studiando mappe tra algebroidi, piuttosto che mappe tra fibrati. In questo

contesto le simmetrie vengono realizzate come sezioni di un algebroide di Lie che fornisce intuitivamente il codominio per la generalizzazione della mappa degli impulsi  $J$ .

# Bibliografia

- [1] M. Alexandrov, M. Kontsevich, A. Schwarz and O. Zaboronsky, *The geometry of the master equation and topological quantum field theory*, Int. J. Mod. Phys. A 12 (1997), 1405–1430
- [2] J. Baez, J. P. Muniain, *Gauge Fields, Knots and gravity*, World Scientific (1994).
- [3] K. H. Bhaskara and K. Viswanath, *Poisson algebras and Poisson manifolds*, Longman Scientific & Technical, Pitman Research Notes in Mathematics Series **174**.
- [4] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization I, II*, Ann. Phys. 111 (1978), 61–110, 111–151
- [5] A. C. Cannas da Silva and A. Weinstein, *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, disponibile al sito [math.berkeley.edu/~acannas/](http://math.berkeley.edu/~acannas/).
- [6] A. S. Cattaneo and G. Felder, in preparation.
- [7] A. S. Cattaneo and G. Felder, *A path integral approach to the Kontsevich quantization formula*, [math.QA/9902090](https://arxiv.org/abs/math.QA/9902090), Commun. Math. Phys. **212**, no. 3 (2000), 591–612.
- [8] A. S. Cattaneo and G. Felder, *Poisson sigma models and symplectic groupoids*, in “Quantization of Singular Symplectic Quotients”, (ed. N. P. Landsman, M. Pflaum, M. Schlichenmeier), Progress in Mathematics **198** (Birkhäuser, 2001), 61–93.
- [9] A. S. Cattaneo and G. Felder, *On the AKSZ formulation of the Poisson sigma model*, Lett. Math. Phys. **56** (2001), 163–179.
- [10] A. S. Cattaneo and G. Felder, *Coisotropic submanifolds in Poisson geometry and branes in the Poisson sigma model*, [math.QA/0309180](https://arxiv.org/abs/math.QA/0309180).
- [11] A. S. Cattaneo, B. Keller, C. Torossian and A. Bruguières, *Déformation quantification théorie de Lie*, to be published.

- [12] A. S. Cattaneo, G. Felder and L. Tomassini, *From local to global deformation quantization of Poisson manifolds*, Duke Math. J. **115** (2002), no. 2, 329–352.
- [13] A. S. Cattaneo and D. Indelicato, *Formality and Star Products*, University of Zurich Institute of Mathematics Preprints, math.QA/0403135.
- [14] A. S. Cattaneo and C. Rossi, *Higher Dimensional BF theories in the Batalin-Vilkovinsky formalism: the BV Action and generalized Wilson loops*, arXiv:math.QA/0010172.
- [15] G. Dito and D. Sternheimer, *Deformation Quantization: genesis, developments and metamorphoses*, Deformation quantization (Strasbourg, 2001), IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 1, de Gruyter, Berlin, 2002, pp. 9-54.
- [16] V. Guillemin and S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, 1984.
- [17] R. P. Feynman, *QED, la teoria dei quanti di luce*, Adelphi.
- [18] D. Fiorenza, *An introduction to the Batalin-Vilkovisky formalism*, arXiv:math.QA/040257.
- [19] W. Fulton, *Algebraic Topology: a first course*, New York Springer-Verlag (1995).
- [20] J. Gomis, J. Paris and S. Samuel, *Antibracket, Antifields and Gauge-Theory Quantization*, hep-th/9412228.
- [21] M. J. Gotay, J. Isenberg, R. Montgomery, J. E. Marsden, *Momentum Maps and Classical Fields I: Covariant Field Theory*, arXiv:phys/9801019.
- [22] M. J. Gotay, J. Isenberg, R. Montgomery, J. E. Marsden, *Momentum Maps and Classical Fields II: Canonical Analysis Field Theories*, disponibile al sito [www.math.hawaii.edu/~gotay/](http://www.math.hawaii.edu/~gotay/).
- [23] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press 1992.
- [24] N. Ikeda, *Two-dimensional gravity and nonlinear gauge theory*, Ann. Phys. **235** (1994), 435–464.
- [25] V. Kathotia, *Universal Formulae for Deformation Quantization and the Campbell-Baker-Hausdorff Formula*, PhD Thesis, University of California, Berkley, 1998.



- [26] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundation of Differential Geometry vol. 1*, Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., Wiley (1963).
- [27] S. Kobayashi, K. Nomizu *Foundation of Differential Geometry vol. 2*, Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., Wiley (1963).
- [28] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, [q-alg/9709040](#), Lett. Math. Phys. **66** (3) (2003).
- [29] C. Kosniowski, *Introduzione alla Topologia Algebrica*, Zanichelli (1988).
- [30] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Mathematical Monographs **35**.
- [31] S. Mac Lane, G. Birkoff, *Algebra*, The MacMillan Company Collier-MacMillan Limited (1970).
- [32] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematicians*, New York Springer-Verlag (1971).
- [33] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press 1995.
- [34] R. Schmid, *Infinite dimensional hamiltonian systems*, Bibliopolis, Monographs and textbooks in physical science **3**.
- [35] P. Schaller and T. Strobl, *Poisson structure induced (topological) field theories*, Modern Phys. Lett. **A9** (1994), no. 33, 3129–3136.
- [36] M. Bojowald, A. Kotov, T. Strobl, *Lie algebroid morphisms, Poisson Sigma Models and off-shell closed gauge symmetries*, [arXiv:math.DG/0406445](#).
- [37] T. Strobl, *Algebroid Yang-Mills Theories*, [arXiv:math.QA/0406215](#).
- [38] A. S. Schwarz, *Geometry of Batalin–Vilkovisky quantization*, Commun. Math. Phys. 155 (1993), 249–260.
- [39] D. Sternheimer, *Deformation theory: a powerful tool in physics modelling*, review dedicated to Jerzy Plebansky.
- [40] I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1994).
- [41] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press.
- [42] F. W. Warner, *odelsFoundation of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Glenview Scott Foresman and Co. (1971).

- [43] A. W. Wipf, *Hamilton's Formalism for Systems with Constraints*, arXiv:hep-th/9312078.
- [44] Zinn Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Press.