ANALYSIS III

PROF. DR. A. S. CATTANEO

Herbstsemester 2009

Programm

(1) Lineare Differentialgleichungen: Grundbegriffe. Eindeutigkeitsatz. Dimension. Fundamentalsysteme. Partikuläre Lösungen: Ansätze und Variation der Konstanten. Verallgemeinerte Lösungen. [K1, 10]

(2) Elementar integrierbare Differentialgleichungen: Lineare und Bernoullische Gleichungen. Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. Energiesatz für eindimensionale mechanische Systeme. [K1, 13]

(3) Die Exponentialabbildung: Motivation: lineare Systeme Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Konvergenz der Exponentialabbildung. Eigenschaften. [K2, 1.6, 3.1.III]

(4) Gewöhnliche Differentialgleichungen: Grundbegriffe. Lemma von Gronwall. Satz von Picard–Lindelöf. Maximale Lösungen. Globaler Eixstenzsatz. Lineare Differentialgleichungen: Lösungsraum, Fundamentalsysteme und Fundamentalmatrizen, Satz von Liouville, Klassifizierung zweidimensionaler reller Systeme mit konstanten Koeffizienten, Variation der Konstanten. Erste Integrale. Attraktoren und Stabile Punkte. Satz von Poincaré–Ljapunow (ohne Beweis). Vektorfelder und Flüsse. Diffeomorphiesatz der Zustandsabbildung. Divergenz. Stetigkeits- und Differenzierbarkeitssätze für allgemeine Systeme Differentialgleichungen. [K2, 4]

(5) Elemente der Variationsrechnung: Motivation. Nulltest. Eulersche Differentialgleichungen. Energieerhaltungssatz. Prinzip der kleinsten Wirkung in der Mechanik. Kürzeste Strecke. [K2, 2.7]

(6) Messbare Funktionen:. σ-Algebren. Die Borel-Algebra $\mathbb{B}$. Messbare Funktionen und Abbildungen. Rechenregeln. Approximationssatz für messbare nichtnegative numerische Funktionen. [B, 2]

(7) Masse: Grundbegriffe und Beispiele. Das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{B}$ (Charakterisierung ohne Beweis). Massräume. Konvergenz f.ü. Ladungen. [B, 3]

(8) Das Integral messbarer nichtnegativer numerischer Funktionen: Grunbegriffe und Rechenregeln. Der Satz von B. Levi über die monotone Konvergenz. Das durch eine Funktion induzierte Mass. Die absolute Stetigkeit. Das Lemma von Fatou. [B, 4]

(9) Das Integral: Integrierbare Funktionen. Das Integral und das unbestimmte Integral. Kriterien für die Integrierbarkeit. Rechenregeln.

Der Satz von LEBESGUE über die majorisierte Konvergenz. Parameterabhängige Integrale. Anwendung: absolut integrierbare Reihe und Regelintegrale. [B, 5]

(10) L_p-Räume: Seminormen und Quotienten. HÖLDERsche, CAUCHY–SCHWARZsche und MINKOWSKIsche Ungleichungen. Vollständigkeit der L_p-Räume. Wesentlich beschränkte Funktionen und das wesentliche Supremum. Der L_∞-Raum und seine Eigenschaften. [B, 6]

(11) Konvergenzbegriffe: gleichmässige Konvergenz, punktweise Konvergenz, Konvergenz f.ü., Konvergenz in L_p, Konvergenz nach Mass, fast gleichmässige Konvergenz und ihre Beziehungen. Satz von JEGOROFF. [B, 7] (ausser Satz von VITALI)

(12) Zerlegung von Massen: Die Zerlegungssätze von HAHN und von JORDAN. Der Satz von RADON–NIKODÝM. Der Zerlegungssatz von LEBESGUE. Der Darstellungssatz von RIESZ für L_p-Räume. [B, 8]

(13) Erzeugung von Massen: Massen auf Algebren von Teilmengen. Das äussere Mass. Messbare Teilmengen. Die Erweiterungssätze von CARATHÉODORY und von HAHN. Beispiele: das LEBESGUE- und das LEBESGUE–STIELTJES-Mass. [B, 9] (ausser Darstellungssatz von RIESZ für den Raum der stetigen Funktionen)

(14) Produktmasse: Messbare Rechtecke. Der Satz über Produktmasse. Schnitte von Teilmengen und von Funktionen. Monotone Klassen. Das CAVALIERIsche Prinzip. Die Sätze von TONELLI und von FUBINI: [B, 10]. Anwendungen: Volumina von Rotationskörpern; das n-dimensionale GAUSSsche Integral.

(15) Das Lebesgue-Mass: Definition und Eigenschaften: [B, 11, 12, 13]. Translationsinvariante Masse: [E, III.2.1]. Beispiele von messbaren Mengen: BOREL-Mengen, insbesonders G_δ- und F_σ-Mengen: [B, 14]

(16) Annäherungen von Lebesgue-messbaren Mengen: Annäherungen durch offene, G_δ-, abgeschlossene, F_σ- und kompakte Mengen. Dichtheit der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Der Satz von LUSIN. [B, 15] + Notizen.

(17) Der Transformationssatz: Bilder von Nullemengen. Bilder von LEBESGUE-messbaren Mengen [K2, 9.2]. Der spezielle Transformationssatz: [A3, IX.5: 5.25]. Die Bewegungsinvarianz des LEBESGUE-Masses: [E, III.2.2]. Der Transformationssatz: [E, V.4]. Polarkoordinaten, Integrale von rotationssymmetrischen Funktionen, Volumina von Kugeln: [K2, 8.5] + Notizen.

LITERATUR

[K1] K. KÖNIGSBERG, *Analysis I*, 6. Auflage, Springer

[K2] K. KÖNIGSBERG, *Analysis II*, 5. Auflage, Springer

[B] R. G. BARTLE, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library.

[A3] A. AMANN, *Analysis III*, Birkhäuser

[E] J. ELSTRODT, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer.

Weiter empfohlene Literatur:

[1] A. Amann, *Analysis II*, Birkhäuser
[2] A. Amann, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, de Gruyter
[3] O. Forster, *Analysis 2*, Vieweg
[4] O. Forster, *Analysis 3*, Vieweg