Tentamen LA1NA, woensdag 6 januari 2021, 13.00 - 16.00

Vermeld op alle bladen die je inlevert je naam en studentnummer.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
Alle opgaven zijn evenveel punten waard, maar niet alle deelopgaven zijn evenveel punten waard.
Motiveer je antwoorden.

Opgave 1.

(a) Bepaal de oppervlakte (Engels: *area*) van de driehoek met hoekpunten $(1,1,0)$, $(-1,3,3)$ en $(0,3,2)$ in $\mathbb{R}^3$.

(b) Bepaal het volume van het parallellepipedum opgespannen door de vectoren $(1,2,2)$, $(2,2,1)$ en $(1,1,2)$ in $\mathbb{R}^3$.

(c) Bepaal de hoek tussen de vectoren $(-1,1,3,1)$ en $(0,-2,-1,-1)$ in $\mathbb{R}^4$.

Opgave 2. Voor elke $a \in \mathbb{R}$ bekijken we het volgende stelsel vergelijkingen in x en y:

$$\begin{cases} 2x & + & (3-a)y & = & -2 \\ ax & + & y & = & -1. \end{cases}$$

(a) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ heeft dit stelsel geen oplossingen?
(b) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ heeft dit stelsel precies één oplossing?
(c) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ heeft dit stelsel oneindig veel oplossingen?
(d) Is de oplossingsverzameling bij (c) een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^2$?
[Deel (d) is onafhankelijk van deel (c) op te lossen.]

Opgave 3. Laat $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van M.

(b) Geef een matrix C en een diagonaalmatrix D met $M = CDC^{-1}$.

De rij $G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, \ldots$ is gegeven door $G_0 = 0$, $G_1 = 5$ en voor $k \geq 2$:

$$G_k = \frac{3}{2}G_{k-1} + G_{k-2}.$$

(c) Geef een directe formule voor G_k.

— Vergeet de opgaven op de achterkant niet! —

Opgave 4. Zij $W \subset \mathbb{R}^4$ de lineaire deelruimte opgespannen door de drie vectoren

$$\begin{aligned} a_1 &= (0,0,1,1), \\ a_2 &= (2,-1,1,3) \quad \text{en} \\ a_3 &= (-5,3,3,-5). \end{aligned}$$

(a) Bepaal een orthonormale basis van W.

(b) Bepaal de loodrechte projectie van $(4,6,2,0)$ op W.

Opgave 5. De matrix

$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

is de standaardmatrixrepresentatie van een rotatie om de lijn $L = \mathrm{span}((1,-1,1))$ (dit hoef je niet te bewijzen).

(a) Geef de standaardmatrixrepresentatie van de rotatie om dezelfde as L, met dezelfde hoek, maar dan in tegengestelde richting.

(b) Geef een eigenvector van R.

(c) Is R diagonaliseerbaar?

(d) Is R^3 diagonaliseerbaar?

[De deelopgaven zijn onafhankelijk van elkaar op te lossen. Er zijn methoden met en methoden zonder veel rekenwerk. Voor diegenen die de matrix R^3 helemaal uitrekenen: de juiste matrix heeft kolommen die loodrecht op elkaar staan en norm 1 hebben, dus als dat niet zo is, dan kan je opnieuw beginnen met (d).]

— Bij dit tentamen mag de volgende tabel gebruikt worden. —

t	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos(t)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

— SUCCES! —