Hertentamen LA1NA, maandag 12 maart 2018, 14:00 - 17:00

Vermeld op alle bladen die je inlevert je naam en studentnummer.
Motiveer je antwoorden.
Het gebruik van een programmeerbare rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1. Voor elk getal $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} x & -1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & x & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de rang van A_0.

(b) Bepaal de rang van A_1.

(c) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is A_x inverteerbaar?

Opgave 2. Bepaal de determinant van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4. Laat $M = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van M.

De rij $G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, \ldots$ is gegeven door $G_0 = 1$, $G_1 = -1$ en voor $k \geq 2$:

$$G_k = -G_{k-1} + 6G_{k-2}.$$

(b) Geef een directe formule voor G_k.

Opgave 5. Voor de matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

is de afbeelding $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die een vector v naar Av stuurt een rotatie (dit hoef je niet te bewijzen).

(a) Welke lijn is de rotatie-as?

(b) Hoe groot is de hoek van de rotatie?

— Vergeet de opgaven op de achterkant niet! —

Opgave 3. Een 3×3 *magisch vierkant* is een blok van 9 reële getallen

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

zó dat de som van de drie rijen, drie kolommen en *twee* diagonalen allemaal gelijk zijn. Er geldt dus onder andere $a_1 + a_4 + a_7 = a_3 + a_5 + a_7$. We vatten een magisch vierkant op als een vector $\vec{a} \in \mathbb{R}^9$.

(a) Laat zien dat de verzameling W van 3×3 magische vierkanten een lineaire deelruimte ("*subspace*") van $\mathbb{R}^9$ is.

(b) Laat zien dat de volgende drie magische vierkanten lineair onafhankelijk zijn:

$$b_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}\,, \qquad b_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}\,, \qquad b_3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}\,.$$

(c) Bepaal de dimensie van W.

(d) Geef een 3×3 magisch vierkant waarin de getallen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ allemaal precies één keer voorkomen. [Hint: zoek een geschikte lineaire combinatie van b_1, b_2, b_3. Hoeveel keer neem je b_1?]

Opgave 6. Zij W de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door de drie vectoren

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 0, -1), \\ a_2 &= (-1, 1, 0, 3) \quad \text{en} \\ a_3 &= (-1, 3, 1, 1). \end{aligned}$$

(a) Bepaal een orthonormale basis van W.

(b) Bepaal de loodrechte projectie van $(5, -1, 6, -1)$ op W.

Bij dit tentamen mag de volgende tabel gebruikt worden.

t	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos(t)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

— SUCCES! —