Tentamen Lineaire Algebra 1 NA

Vrijdag 5 januari 2024, 13.00–16.00

Laat zien hoe je aan je antwoorden komt. Het gebruik van rekenmachine, telefoon, boek of aantekeningen is niet toegestaan. Het cijfer is 1 + (aantal punten)/10.

(16 pt) **1.** (a) Bepaal de oppervlakte van de driehoek in $\mathbf{R}^3$ met hoekpunten $(2,-1,-1)$, $(5,1,0)$ en $(4,2,1)$.

(b) Bepaal het volume van het parallellepipedum in $\mathbf{R}^3$ opgespannen door de vectoren $(1,0,2)$, $(0,2,2)$ en $(1,1,1)$.

(16 pt) **2.** Voor elke $a \in \mathbf{R}$ bekijken we de lineaire deelruimte V van $\mathbf{R}^4$ opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal voor elke $a \in \mathbf{R}$ een basis voor V.

(18 pt) **3.** De lineaire deelruimte V van $\mathbf{R}^4$ wordt opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de standaardmatrixrepresentatie van de orthogonale projectie op V.

(b) Bepaal de standaardmatrixrepresentatie van de orthogonale projectie op het orthogonaal complement $V^{\perp}$ van V.

(20 pt) **4.** Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geef een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix C met $A = CDC^{-1}$.

(b) De rij $G_0, G_1, G_2, \ldots$ wordt gegeven door de recurrente betrekking

$$G_0 = 2, \quad G_1 = 3,$$
$$G_n = G_{n-1} + 2G_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 2.$$

Geef een gesloten formule voor G_n.

Opgave 5 staat op de achterkant.

(20 pt) **5.** Gegeven is de lineaire deelruimte V van $\mathbf{R}^4$ opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een orthonormale basis voor V.

(b) Bepaal de orthogonale projectie van de vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ op V.

Succes!