Lineaire algebra 1 NA, huiswerkset 5

Inleverdatum: maandag 4 december 2023, 11:00

Laat zien hoe je aan je antwoorden komt. Een rekenmachine is niet nodig.

1. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Is A diagonaliseerbaar?

   (b) Is B diagonaliseerbaar?

   (c) Geef een 3×2-matrix C van rang 2 en een diagonale 2×2-matrix D met $BC = CD$.

2. Definieer $R_0 = 1$, $R_1 = -1$ en definieer R_k voor $k \geq 2$ door de recurrente betrekking

$$R_k = -R_{k-1} + 6R_{k-2}.$$

   (a) Geef een 2×2-matrix A zodat voor alle $k \geq 0$ geldt

$$\begin{pmatrix} R_{k+1} \\ R_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

   (c) Geef een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D waarvoor geldt $A = CDC^{-1}$.

   (d) Geef een gesloten formule voor R_k.

3. Bepaal functies x_1, x_2, x_3 (van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$) die voldoen aan

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 \qquad\quad - 6x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_2 - 4x_3, \\ x_3' = 3x_1 \qquad\quad - 4x_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 0, \\ x_3(0) = -1. \end{cases}$$