Lineaire algebra 1 NA, huiswerkset 3

Inleverdatum: vrijdag 10 november 2023, 11.00

Laat zien hoe je aan je antwoorden komt. Een rekenmachine is niet nodig.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Bepaal bases voor de kern (nulruimte), voor het beeld (de kolomruimte) en voor de rijruimte van A.

2. (a) Welke van de volgende afbeeldingen is/zijn lineair? Bewijs je antwoord.
   i. De afbeelding $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die (x, y) naar $(x, y+1)$ stuurt voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   ii. De afbeelding $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die (x, y) naar $(x+y, y-2x)$ stuurt voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   iii. De afbeelding $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die (x, y, z) naar $(x, |y|, -|z|)$ stuurt voor alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   (b) Geef voor de *lineaire* afbeelding(en) uit (a) de standaardmatrixrepresentatie.

3. Beschouw de matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   De lineaire afbeelding $T_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ is de rotatie met een zekere hoek α om een zekere lijn $L \subset \mathbb{R}^3$. (Dit hoef je niet te bewijzen, en je hoeft zelfs L niet te bepalen.)

   (a) Geef de standaardmatrixrepresentatie van de rotatie om dezelfde lijn L in dezelfde richting maar nu met hoek 2α.

   (b) Geef de standaardmatrixrepresentatie van de rotatie om dezelfde lijn L in *tegengestelde* richting met hoek α.