december 2023
Lineaire Algebra 1 NA
Kevin Csellak, g23004717

Voorbeelduitwerking extra opgaven

Universiteit Leiden

Opgave 1

Gegeven: De rij F van gehele getallen wordt gegeven door $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ en door

$$F_k = -F_{k-1} + 2F_{k-2} + 2F_{k-3}, \tag{1}$$

voor elk natuurlijk getal $k \geq 3$.

Gevraagd: Stel een algemene formule voor F_k op.

We schrijven

$$\mathbf{x}_k := \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \\ F_{k-2} \end{pmatrix},$$

voor alle $k \geq 2$.

We herschrijven verg. (1) nu in termen van $\mathbf{x}_k$:

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{k-1},$$

voor alle $k \geq 3$. De matrix hier noemen we A.

Hieruit volgt

$$\mathbf{x}_k = A^{k-2}\mathbf{x}_2, \tag{2}$$

voor alle $k \geq 2$.

Nu bepalen we een formule voor $A^{k-2}\mathbf{x}_2$.

We berekenen eerst het karakteristieke polynoom van A, dat we hier p_A noemen. Dit polynoom (met λ als formele variabele) is de determinant van $A - \lambda I$, namelijk

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right) \\ = (-1-\lambda) \cdot (-\lambda \cdot -\lambda - 0 \cdot 1) - 2 \cdot (1 \cdot -\lambda - 0 \cdot 0) + 2 \cdot (1 \cdot 1 - -\lambda \cdot 0) \\ = (-1-\lambda) \cdot \lambda^2 - 2 \cdot -\lambda + 2 \cdot 1 = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 2 = \left(\lambda^2 - 2\right)(-\lambda - 1) = -\left(\lambda - \sqrt{2}\right)\left(\lambda + \sqrt{2}\right)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Het is hieruit duidelijk dat $\lambda_1 := \sqrt{2}$, $\lambda_2 := -\sqrt{2}$ en $\lambda_3 := -1$ de drie eigenwaarden van A zijn, elk met algebraische multipliciteit 1.

We merken op dat A een 3×3 matrix is en precies 3 eigenwaarden heeft. Dit betekent dat A diagonaliseerbaar is, want elk van deze eigenwaarden heeft in ieder geval een bijbehorende eigenvector, dus per stelling 5.3 op pagina 308 en gevolg 1 op pagina 307 is A diagonaliseerbaar.

We bepalen nu eigenvectoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$ behorende bij de drie eigenwaarden van A.

Eerst bepalen we $\mathbf{v}_1$ door een niet-nul element in de kern van $A - \lambda_1 I$ te vinden. Hiervoor brengen we $A - \lambda_1 I$ naar rijtrapvorm. (Let wel: gezien we toch allemaal al weten hoe je een matrix naar rijtrapvorm brengt, geef ik voor LaTeX-gemak de rij-operaties hier niet weer.)

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

We stellen een parametervoorstelling voor de kern van deze laatste matrix (en dus ook van $A - \lambda_1 I$) op, door de vergelijking $(A - \lambda_1 I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ op te lossen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 - \sqrt{2}u_2 \\ u_2 - \sqrt{2}u_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_3 \\ \sqrt{2}u_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We zien hieraan, door $u_3 = 1$ te kiezen, dat

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

een eigenvector van A behorend bij de eigenwaarde λ_1 is.

Ditzelfde proces levert voor λ_2 een eigenvector

$$\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

en voor λ_3 een eigenvector

$$\mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

op.

Het is hier in het bijzonder ook goed mogelijk zonder naar rijtrapvorm te brengen drie eigenvectoren te bepalen. In plaats daarvan hadden we namelijk ook aan de tweede en derde rij van A voor elke te bepalen eigenvector $\mathbf{u}$ met eigenwaarde λ op kunnen merken dat $u_1 = \lambda u_2$ en $u_2 = \lambda u_3$ geldt. Dat betekent dat we u op kunnen schrijven als

$$u = \begin{pmatrix} \lambda^2 u_3 \\ \lambda u_3 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Nu hoeven we alleen nog maar te verifiëren dat aan $u_1 = -u_1 + 2u_2 + 2u_3$ wordt voldaan en vervolgens een concrete waarde voor u_3 te kiezen om aan eigenvectoren voor alledrie de eigenwaarden van A te komen; elke eigenwaarde die we voor λ in kunnen vullen, levert dan een andere u op. Deze methode zou je misschien "numeriek" kunnen noemen. Dit trucje werkt natuurlijk niet voor *alle* matrices, maar wel voor alle matrices die je uit dit soort Fibonacci-achtige systemen krijgt.

Hoe we ook aan drie lineair onafhankelijke eigenvectoren komen, de volgende stappen blijven hetzelfde.

We willen A diagonaliseren om gevolg 2 op pagina 307 toe te kunnen passen. Zoals eerder gezien, wordt aan alle voorwaarden voldaan. We stellen hiervoor de matrices C en D op, namelijk

$$C = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

en

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nu geldt per gevolg 2 op pagina 307 dat

$$A^{k-2}\mathbf{x}_2 = CD^{k-2}C^{-1}\mathbf{x}_2. \tag{3}$$

Het is niet moeilijk om te zien dat

$$D^{k-2} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\sqrt{2}\right)^{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k-2} \end{pmatrix}.$$

Maar we moeten nu ook C^{-1} berekenen. Hiervoor gebruiken we de vertrouwde uitgebreide matrix-methode.

$$\begin{aligned}
[C \mid I] = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{2+2\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2\sqrt{2}-2}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{2+2\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Dus er geldt

$$C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2-2\sqrt{2} \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dit vullen we allemaal in in verg. (3) en verg. (2) en we verkrijgen

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= A^{k-2}\mathbf{x}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\sqrt{2}\right)^{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k-2} \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2-2\sqrt{2} \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\sqrt{2}\right)^{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{k} & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\sqrt{2}\right)^{k} & 0 \\ 0 & 0 & -4(-1)^{k} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

voor alle $k \geq 2$.

We hoeven slechts een component van $\mathbf{x}_k$ te weten, want de drie componenten zijn simpelweg F_k, F_{k-1} en F_{k-2}. We gaan hier voor de derde, omdat we dan ook F_0 kunnen berekenen (zonder k kleiner dan 2 te hoeven kiezen).

$$F_{k-2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{k} & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\sqrt{2}\right)^{k} & 0 \\ 0 & 0 & -4(-1)^{k} \end{pmatrix} = \sqrt{2}^{k-2} + \left(-\sqrt{2}\right)^{k-2} - (-1)^{k-2},$$

voor alle $k \geq 2$.

Door die $k-2$ overal te vervangen door k, vinden we

$$F_k = \sqrt{2}^k + (-1)^k \sqrt{2}^k - (-1)^k,$$

voor $k \geq 0$, als algemene formule voor F_k.

Opgave 2

Gegeven: Elke tweemaal continu differentieerbare functie f (van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$) die voldoet aan $f'' = -\omega^2 f$ is te schrijven als

$$f(t) = c\sin(\omega t) + d\cos(\omega t), \tag{4}$$

voor zekere constanten $c, d \in \mathbb{R}$.

Gevraagd: los het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1'' &= -8x_1 + x_2 \\ x_2'' &= 4x_1 + -5x_2, \end{aligned} \tag{5}$$

op voor de beginwaarden

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 1 \\ x_1'(0) &= x_2'(0) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

We geven twee voorbeelden van hoe je deze opgave aan zou kunnen pakken. In de eerste methode zorgen een paar slimme opmerkingen ervoor dat we veel stappen van de tweede methode over kunnen slaan. Maar daarvoor moet je die opmerkingen wel weten te maken, wat niet triviaal is. De tweede methode is analoog aan de werkwijze die het boek hanteert en is degene die ik (op een paar onbelangrijke aanpassingen na) aanraad hier te gebruiken.

Er bestaan ook andere methoden om dit probleem veel algemener aan te pakken, maar die gaan de stof van dit vak ver teboven; weet gewoon dat er heel veel mogelijk is in de wereld van differentiaalvergelijkingen.[1]

Methode 1 (op intuïtie)

We merken op dat

$$x_1'' + x_2'' = -4(x_1 + x_2),$$

en dat

$$-4x_1'' + x_2'' = -9(-4x_1 + x_2).$$

Dit komt overeen met dat $(1, 1)$ en $(-4, 1)$ “aan de linkerkant” eigenvectoren van de matrix

$$\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix},$$

zijn; als je ze aan de linkerkant met de matrix vermenigvuldigt, krijg je scalaire veelvouden terug.

We definiëren $u_1 := x_1 + x_2$ en $u_2 := -4x_1 + x_2$. Dan geldt $x_1 = \frac{u_1 - u_2}{5}$ en $x_2 = \frac{4u_1 + u_2}{5}$, en we kunnen verg. (5) herschrijven als

$$\begin{aligned} u_1'' &= -4u_1 \\ u_2'' &= -9u_2. \end{aligned}$$

[1] In het bijzonder is het bij hogere-orde afgeleiden altijd mogelijk de afgeleiden van lagere orde als extra variabelen toe te voegen. Door in deze vraag bijvoorbeeld $x_3 := x_1'$ te definiëren, krijg je $x_3' = -8x_1 + x_2$ en $x_1' = x_3$. Zo is het mogelijk een (groot) stelsel van eerste-orde differentiaalvergelijkingen van te maken van een (klein) stelsel van hogere-orde differentiaalvergelijkingen. Dit grote stelsel kan je echter niet met de methode uit het boek oplossen, omdat de eigenwaarden van de betreffende matrix complex blijken te zijn. Er zijn manieren om hier toch een nuttige oplossing uit te herleiden, maar dat wordt pas halverwege een tweedejaars wiskundevak behandeld, dus ik zou het voor nu nog gewoon op de bekende methoden uit het boek houden.

Dit betekent dat u_1 en u_2 te schrijven zijn als

$$\begin{aligned} u_1(t) &= c_1 \sin(2t) + d_1 \cos(2t) \\ u_2(t) &= c_2 \sin(3t) + d_2 \cos(3t), \end{aligned}$$

voor zekere constanten $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

We weten dat

$$\begin{aligned} u_1(0) &= x_1(0) + x_2(0) = 2 \\ u_2(0) &= -4x_1(0) + x_2(0) = -3 \\ u_1'(0) &= x_1'(0) + x_2'(0) = 0 \\ u_2'(0) &= -4x_1'(0) + x_2'(0) = 0. \end{aligned}$$

Hiermee kunnen we passende waarden voor de constanten vinden. Door $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$, $\sin'(0) = 1$, $\cos'(0) = 0$ in te vullen, vinden we

$$\begin{aligned} 2 &= u_1(0) = d_1 \\ -3 &= u_2(0) = d_2 \\ 0 &= u_1'(0) = 2c_1 \\ 0 &= u_2'(0) = 3c_2. \end{aligned}$$

Dus we vinden

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\cos(2t) \\ u_2 &= -3\cos(3t). \end{aligned}$$

Ten slotte vinden we

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{u_1 - u_2}{5} = \frac{2}{5}\cos(2t) + \frac{3}{5}\cos(3t) \\ x_2 &= \frac{4u_1 + u_2}{5} = \frac{8}{5}\cos(2t) - \frac{3}{5}\cos(3t). \end{aligned}$$

Methode 2 (met methode uit boek)

We schrijven het stelsel eerst als matrix

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Deze matrix noemen we A.

We bepalen op gebruikelijke wijze het karakteristieke polynoom van A, dat we p_A noemen.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} -8-\lambda & 1 \\ 4 & -5-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ = (-8-\lambda)(-5-\lambda) - 1 \cdot 4 = \lambda^2 + 13\lambda + 36 = (\lambda+4)(\lambda+9). \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat $\lambda_1 := -4$ en $\lambda_2 := -9$ de eigenwaarden van A zijn en dat A diagonaliseerbaar is; alle eigenwaarden hebben algebraïsche multipliciteit 1 en eigenwaarden hebben altijd een geometrische multipliciteit van minstens 1 (want er bestaat altijd minstens een eigenvector), dus gezien de algebraïsche multipliciteit altijd minstens zo groot is als de geometrische, zijn de twee multipliciteiten voor alle eigenwaarden hier gelijk aan elkaar, wat per stelling 5.4 op pagina 313 betekent dat A diagonaliseerbaar is.

We zoeken nu een eigenvector bij elk van de twee eigenwaarden. De procedure hier is hetzelfde als altijd, dus we slaan hem in deze voorbeelduitwerking over, gezien het toch al duidelijk is hoe dit in zijn werking gaat. Wie de methode even wil opfrissen, kan naar dit deel van de voorbeelduitwerking van opgave 1 kijken. We komen erop uit dat

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix},$$

en

$$\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eigenvectoren bij respectievelijk λ_1 en λ_2 zijn. Wie dit wil nagaan, mag gerust $A\mathbf{v}_1$ en $A\mathbf{v}_2$ berekenen en zien dat dit inderdaad scalaire veelvouden van $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ zijn.

Nu stellen we de matrices C en D uit stelling 5.2 op pagina 306 op, namelijk

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

en

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Diezelfde stelling zegt nu dat

$$A = CDC^{-1}. \tag{8}$$

We geven ook alvast de inverse C^{-1} van C. We laten de berekening hiervan ook achterwege; zie dit deel van de uitwerking van opgave 1 voor een demonstratie. We vinden

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

We gaan nu verg. (7) middels verg. (8) omvormen tot een stelsel vergelijkingen die we met verg. (4) kunnen oplossen.

Dit doen we door een nieuwe variabele $\mathbf{y} := C^{-1}\mathbf{x}$ te definiëren. Met deze nieuwe variabele kunnen we verg. (7) herschrijven als

$$C\mathbf{y}'' = AC\mathbf{y}, \tag{9}$$

want er geldt $\mathbf{x} = CC^{-1}\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ en $\mathbf{x}'' = (C\mathbf{y})'' = C\mathbf{y}''$ (want C is niet afhankelijk van de tijd).

Door in beide leden van verg. (9) links met C^{-1} te vermenigvuldigen, krijgen we

$$\mathbf{y}'' = C^{-1}AC\mathbf{y}.$$

Uit $A = CDC^{-1}$ volgt $D = C^{-1}AC$, dus deze vergelijking kunnen we ook als

$$\mathbf{y}'' = D\mathbf{y}, \tag{10}$$

schrijven.

Gezien D een diagonale matrix is met de eigenwaarden $\lambda_1 = -4 = -2^2$ en $\lambda_2 = -9 = -3^2$ van A op de hoofddiagonaal, komt verg. (10) neer op

$$\begin{aligned} y_1'' &= -2^2 y_1 \\ y_2'' &= -3^2 y_2. \end{aligned} \tag{11}$$

We gebruiken nu de formule $f(t) = c\sin(\omega t) + d\cos(\omega t)$ voor oplossingen van $f'' = -\omega^2 t$ om deze vergelijkingen op te lossen en vinden

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 \sin(2t) + d_1 \cos(2t) \\ y_2(t) &= c_2 \sin(3t) + d_2 \cos(3t), \end{aligned} \tag{12}$$

als oplossing, voor zekere constanten $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

We moeten nu bepalen wat de waarden van deze constanten zijn. Dit doen we aan de hand van verg. (6).

We weten dat $\mathbf{y} = C^{-1}\mathbf{x}$, dus

$$\mathbf{y}(0) = C^{-1}\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Nu berekenen we $\mathbf{y}(0)$ met de formules in verg. (12).

$$\begin{aligned} y_1(0) &= c_1 \sin(0) + d_1 \cos(0) = d_1 \\ y_2(0) &= c_2 \sin(0) + d_2 \cos(0) = d_2. \end{aligned}$$

We zien hieraan dat $d_1 = \frac{8}{5}$ en $d_2 = -\frac{3}{5}$.

We weten dat $\mathbf{y}' = C^{-1}\mathbf{x}'$, dus

$$\mathbf{y}'(0) = C^{-1}\mathbf{x}'(0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nu berekenen we $\mathbf{y}'(0)$ met de formules in verg. (12).

$$\begin{aligned} y_1'(0) &= 2c_1 \cos(0) - 2d_1 \sin(0) = 2c_1 \\ y_2'(0) &= 3c_2 \cos(0) - 3d_2 \sin(0) = 3c_2. \end{aligned}$$

We zien hieraan dat $c_1 = 0$ en $c_2 = 0$.

De uiteindelijke oplossing voor $\mathbf{y}$ is dus

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{8}{5}\cos(2t) \\ y_2(t) &= -\frac{3}{5}\cos(3t). \end{aligned}$$

Nu moeten we alleen nog $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ gebruiken om $\mathbf{y}$ terug om te zetten naar $\mathbf{x}$:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{5}\cos(2t) \\ -\frac{3}{5}\cos(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\cos(2t) + \frac{3}{5}\cos(3t) \\ \frac{8}{5}\cos(2t) - \frac{3}{5}\cos(3t) \end{pmatrix}.$$

En dit is de oplossing.