Antwoorden tentamen LA1NA, woensdag 6 januari 2021, 13.00 - 16.00

Vermeld op alle bladen die je inlevert je naam en studentnummer.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
Alle opgaven zijn evenveel punten waard, maar niet alle deelopgaven zijn evenveel punten waard.
Motiveer je antwoorden.

Bij elke vraag is nodig: een antwoord op de vraag en een motivatie van dit antwoord. Een volledig en correct bewijs volstaat altijd als motivatie, maar een berekening met de methode van het college volstaat ook. Alleen een antwoord, zonder motivatie, is in de meeste gevallen nul punten waard.

Rekenfouten worden streng bestraft als:

- **een fout antwoord niet opgemerkt is door de student, maar wel opgemerkt had kunnen worden, of**
- **de rekenfout het gevolg is van een lange berekening, waar een korte berekening had kunnen volstaan.**

Opgave 1.

(a) Bepaal de oppervlakte (Engels: *area*) van de driehoek met hoekpunten $(1, 1, 0)$, $(-1, 3, 3)$ en $(0, 3, 2)$ in $\mathbb{R}^3$. [4 punten]
Antwoord: 1,5
Berekening: Bepaal eerst twee zijdevectoren van de driehoek, zoals
$(-1, 3, 3) - (1, 1, 0) = (-2, 2, 3)$ en
$(0, 3, 2) - (1, 1, 0) = (-1, 2, 2)$.
Bepaal dan het kruisproduct van deze twee vectoren. Dat is $(-2, 1, -2)$ of $(2, -1, 2)$ afhankelijk van de volgorde waarin je de vectoren zet. De lengte $\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$ van dit kruisproduct is de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door deze twee vectoren, en de driehoek is daar de helft van.
Veelgemaakte fouten:

- Het uitrekenen van het volume van een parallellogram (door middel van een determinant) in plaats van de oppervlakte van een driehoek.
- Het in plaats van het kruisproduct het inproduct (8 in het voorbeeld, maar er kan ook iets anders uitkomen) of een coördinaatsgewijs product ($(2, 4, 6)$ in het voorbeeld, maar er kan ook iets anders uitkomen) uitrekenen.
- Vergeet ook niet door 2 te delen, want anders heb je de oppervlakte van het parallellogram.
- Rekenfouten.

(b) Bepaal het volume van het parallellepipedum opgespannen door de vectoren $(1, 2, 2)$, $(2, 2, 1)$ en $(1, 1, 2)$ in $\mathbb{R}^3$. [4 punten]
Antwoord: 3

Zet de drie vectoren samen in een 3×3 matrix. De determinant daarvan is (afhankelijk van de volgorde van de vectoren) 3 of -3. Het gevraagde volume is de absolute waarde van die determinant.

(c) Bepaal de hoek tussen de vectoren $(-1, 1, 3, 1)$ en $(0, -2, -1, -1)$ in $\mathbb{R}^4$. [4 punten]
Antwoord: $\frac{3}{4}\pi$ (het antwoord $135°$ is ook goed)
Berekening: Volgens de definitie van de hoek is het het getal $\alpha \in [0, \pi]$ waarvoor $\cos(\alpha)$ aan de formule in het boek, dus $\cos(\alpha) = \frac{-6}{\sqrt{12}\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Het enige getal dat daaraan voldoet is $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.
Veelgemaakte fouten:

- Rekenfouten.
- Een hoek groter dan π of kleiner dan 0 geven: er is geen richting aangegeven of “binnen-” of “buitenkant” van deze hoek.

Opgave 2. Voor elke $a \in \mathbb{R}$ bekijken we het volgende stelsel vergelijkingen in x en y:

$$\begin{cases} 2x & + & (3-a)y & = & -2 \\ ax & + & y & = & -1. \end{cases}$$

(a) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ heeft dit stelsel geen oplossingen?
(b) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ heeft dit stelsel precies één oplossing?
(c) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ heeft dit stelsel oneindig veel oplossingen?
(d) Is de oplossingsverzameling bij (c) een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^2$?
[Deel (d) is onafhankelijk van deel (c) op te lossen.]
Oplossing a–d: [8 punten]
Voor het gemak schrijven we het als uitgebreide matrix, dus

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3-a & -2 \\ a & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Met Gauss-eliminatie krijgen we dit in 1 stap in rijtrapvorm, namelijk door de eerste rij $-a/2$ keer bij de tweede op te tellen. Het resultaat is

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3-a & -2 \\ 0 & \frac{1}{2}a - \frac{3}{2}a + 1 & a-1 \end{array}\right).$$

Het getal 2 is een spil, en het getal $\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}a + 1$ is een spil tenzij het nul is. Dat getal is 0 voor $a = 1$ en $a = 2$.
(a) Dit gebeurt precies als er een rij $(0, 0|c)$ met $c \neq 0$ in de rijtrapvorm staat, dus precies als $\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}a + 1 = 0$ en $a - 1 \neq 0$, dus precies als $a = 2$.
(b) Dit gebeurt als er niet zo'n rij bestaat en elke kolom een spil heeft, dus voor alle a behalve 1 en 2.
(c) Dit gebeurt als er niet zo'n rij bestaat en niet elke kolom een spil heeft, dus als $a = 1$.
Veelgemaakte fouten:

- Wel voorbeelden geven zoals $a = 2$ bij (a) of $a = 3$ bij (b), maar niet laten zien dat voor alle a ongelijk aan 1 en 2 er precies één oplossing is.
- Rekenfouten.

(d) Twee voorbeelden van korte goede antwoorden: [4 punten]
"Nee, want $(0, 0)$ is geen element van de oplossingsverzameling, want $x = 0, y = 0$ is geen oplossing."
"Nee, want $(-1, 0)$ en $(0, -1)$ zijn elementen van de oplossingsverzameling (want $x = -1, y = 0$ en $x = 0, y = -1$ zijn oplossingen), en hun som $(-1, -1)$ is dat niet."

Opgave 3. Laat $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van M. [6 punten]
Antwoord: De eigenwaarden van M zijn $-\frac{1}{2}$ en 2 met eigenruimten $E_{-\frac{1}{2}}(M) = \text{span}((-1, 2))$ en $E_2(M) = \text{span}((2, 1))$.
[Geef ook je berekening. Dat kan met de methode uit het boek/college. Je antwoord kan er ook anders uitzien, zolang het maar dezelfde verzameling is, die op een even expliciete manier gegeven is. Bijvoorbeeld $E_{-\frac{1}{2}}(M) = \text{span}((\frac{1}{2}, -1))$.]
Veelgemaakte fouten:

- Vergeten de eigenruimten uit te rekenen.

(b) Geef een matrix C en een diagonaalmatrix D met $M = CDC^{-1}$. [2 punten]
Antwoord: $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
[Je kan het antwoord gewoon opschrijven met getallen uit de vorige opgave, en dit is dus de enige plaats waar alleen het antwoord zonder motivatie genoeg is. Let wel op: als je de getallen in D in de andere volgorde zet, dan moeten de kolommen van C ook in de andere volgorde.
Er zijn ook andere matrices C mogelijk, door geschaalde versies van bovenstaande eigenvectoren te gebruiken.]

De rij $G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, \ldots$ is gegeven door $G_0 = 0$, $G_1 = 5$ en voor $k \geq 2$:

$$G_k = \frac{3}{2}G_{k-1} + G_{k-2}.$$

(c) Geef een directe formule voor G_k. [4 punten]
Antwoord: $G_k = 2^{k+1} + (-\frac{1}{2})^{k-1}$
[Geef ook je berekening. Dat kan met de methode uit het boek/college.]

Opgave 4. Zij $W \subset \mathbb{R}^4$ de lineaire deelruimte opgespannen door de drie vectoren

$$\begin{aligned} a_1 &= (0,0,1,1), \\ a_2 &= (2,-1,1,3) \quad \text{en} \\ a_3 &= (-5,3,3,-5). \end{aligned}$$

(a) Bepaal een orthonormale basis van W. [8 punten]
Antwoord bijvoorbeeld: $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{7}}(2,-1,-1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1)$.
[De aangeraden methode is Gram-Schmidt. Als je die methode correct gebruikt, dan krijg je altijd bovenstaand antwoord. Met andere methoden kan je op andere antwoorden uitkomen. Het antwoord moet wel altijd bestaan uit drie vectoren in W die loodrecht op elkaar staan en ieder norm 1 hebben. Het is eenvoudig om te controleren op rekenfouten (en op sommige vormen van fout formulegebruik) door te controleren of de vectoren loodrecht op elkaar staan en ieder norm 1 hebben.

Hier is nog een andere schrijfwijze van het correcte antwoord:

$$\left(0,\, 0,\, \frac{1}{2}\sqrt{2},\, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \quad \left(\frac{2}{7}\sqrt{7},\, -\frac{1}{7}\sqrt{7},\, -\frac{1}{7}\sqrt{7},\, \frac{1}{7}\sqrt{7}\right), \quad \left(\frac{1}{3}\sqrt{3},\, 0,\, \frac{1}{3}\sqrt{3},\, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right).$$

Deze is wel erg ingewikkeld, en is niet zo handig bij deel (b).]

(b) Bepaal de loodrechte projectie van $(4,6,2,0)$ op W.
Antwoord: $(2,0,3,-1)$. [4 punten]
[Dit is het enige correcte antwoord. Je kan het vinden door Stelling 6.3 op pagina 339 te gebruiken. Je kan rekenfouten meestal ontdekken door te controleren dat $(4,6,2,0)-(2,0,3,-1)$ loodrecht staat op W.]]

Opgave 5. De matrix

$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

is de standaardmatrixrepresentatie van een rotatie om de lijn $L = \text{span}((1, -1, 1))$ (dit hoef je niet te bewijzen).

(a) Geef de standaardmatrixrepresentatie van de rotatie om dezelfde as L, met dezelfde hoek, maar dan in tegengestelde richting. [4 punten]
Antwoord: Het is de tegengestelde (dus inverse) van de rotatie, en daar hoort de inverse van de matrix bij, dus het antwoord is $R^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
Motiveer dit antwoord wel, en zeg hoe je aan deze inverse komt.
Voor het uitrekenen van deze matrix zijn verschillende mogelijkheden:
1.De methode uit het boek/college met Gauss-Jordan-eliminatie, wat in dit geval best veel rekenwerk is. Je maakt dan eenvoudig rekenfouten, en een fout antwoord kost in dit geval 2 punten, omdat het eenvoudig te ondekken is met behulp van de definitie van "inverse".
2. Opmerken dat de kolommen norm 1 hebben en loodrecht op elkaar staan, en dat dus $R^T R = I$ en dus $R^{-1} = R^T$. De getransponeerde R^T is natuurlijk eenvoudig op te schrijven. Motiveer dan wel dat $R^{-1} = R^T$ geldt.
3. Met de cofactorenmatrix zoals in het Gevolg van Stelling 4.6 op pagina 269.

(b) Geef een eigenvector van R. [2 punten]
Antwoord: De vector $(1, -1, 1)$ die de rotatie-as opspant is een eigenvector met eigenwaarde 1.

(c) Is R diagonaliseerbaar? [3 punten]
Antwoord: Niet diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$.
[De matrix is wel diagonaliseerbaar over **C**. We hebben in het vak geen complexe getallen behandeld. Mocht iemand volledig en correct laten zien dat de matrix diagonaliseerbaar is over **C** en daar ergens een complex getal bij gebruiken, dan wordt dit goedgerekend.]
Er zijn veel verschillende goede en foute motivaties gezien bij deze opgave. De methode uit het boek (eerst karakteristiek polynoom uitrekenen, en dan de eigenruimtes) werkt, maar met deze ingewikkelde matrix worden er veel rekenfouten gemaakt.
Hier is een korte uitwerking:
Bij een rotatie zijn de enige mogelijke reële eigenwaarden ± 1. Aangezien $R \neq I$, weten we $E_1(R) = L$, en die heeft dimensie 1. Je kan op verschillene manieren checken dat R geen rotatie om 180 graden is en dus $E_{-1} = \{0\}$. De som van de dimensies van de eigenruimtes is dus $1 \neq 3$ en dus is R niet diagonaliseerbaar.
Opmerkingen:

- Veel studenten gebruiken Stelling 5.4 om te bewijzen dat R niet diagonaliseerbaar is. Dat werkt in dit geval niet, omdat er ook twee complexe eigenwaarden zijn, en die mag je niet negeren bij het gebruik van Stelling 5.4. Als je niet zeker weet of je Stelling 5.4 mag gebruiken, gebruik dan

de methode uit het college: bereken de eigenruimtes bij alle eigenwaarden en check of de dimensies optellen tot n.
Er is bij deze opgave wel een manier om Stelling 5.4 correct te gebruiken: bepaal je eerst alle complexe eigenwaarden (in dit geval 1, $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$), en zeg dat (en waarom) ze alle drie zowel algebraïsche als meetkundige multipliciteit 1 hebben. De conclusie is dan dat R complex diagonaliseerbaar is.

- Veel studenten gebruiken Stelling 5.3 om te bewijzen dat R wel diagonaliseerbaar is. Dit wordt alleen goedgerekend als de eigenwaarden correct zijn. Zijn de eigenwaarden fout, dan krijg je bij deze methode 0 punten. Bij rekenfouten bij het berekenen van het karakteristieke polynoom is het namelijk meestal zo dat je n verschillende (foute) eigenwaarden krijgt.
- Als λ een eigenwaarde is, dan is de bijbehorende eigenruimte altijd groter dan $\{0\}$. Dit volgt direct uit de definitie van een eigenwaarde. Eigenwaarden hebben dus nooit meetkundige multipliciteit 0. Kom je daar wel op uit, dan heb je dus een rekenfout ontdekt. Dit is een handige manier om je eigenwaarden te controleren.
- Uit deel (b) kan je zien dat 1 een eigenwaarde is. Kom je daar niet op uit, dan weet je dus dat je een rekenfout hebt gemaakt.
- Je kan deel (d) niet gebruiken voor deel (c). De notatie $D^{1/3}$ of $\sqrt[3]{D}$ hebben we bij dit vak niet geïntroduceerd. En mocht je die notatie wel definiëren dan zal meestal niet uit $A^3 = CDC^{-1}$ volgen dat ook geldt $A = CD^{1/3}C^{-1}$.

(d) Is R^3 diagonaliseerbaar? [3 punten]
Antwoord: Ja.
Motivatie: de vectoren $a = (1,1,0)$ en $b = (0,1,1)$ zijn eigenvectoren met eigenwaarde -1, zoals je kan zien door uit te rekenen (voor het idee van hoe je op deze matrices komt: zie (c), ze staan loodrecht op L): $Ra = b$, $Rb = (-1,0,1)$, $R(-1,0,1) = -a$, dus $R^3a = -a$ en $R^3b = -b$. De vectoren $(1,-1,1)$, a en b vormen dus een basis van $\mathbb{R}^3$ die bestaat uit eigenvectoren van R^3, en dus is R^3 diagonaliseerbaar.

[De deelopgaven zijn onafhankelijk van elkaar op te lossen. Er zijn methoden met en methoden zonder veel rekenwerk. Voor diegenen die de matrix R^3 helemaal uitrekenen: de juiste matrix heeft kolommen die loodrecht op elkaar staan en norm 1 hebben, dus als dat niet zo is, dan kan je opnieuw beginnen met (d).]

— Bij dit tentamen mag de volgende tabel gebruikt worden. —

t	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos(t)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

— SUCCES! —