Tentamen LA1NA, vrijdag 10 januari 2020, 14:15 - 17:15

Vermeld op alle bladen die je inlevert je naam en studentnummer.
Motiveer je antwoorden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1.

(a) Bepaal de oppervlakte (Engels: *area*) van de driehoek met hoekpunten $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 3)$ en $(2, -1, 0)$ in $\mathbb{R}^3$.

(b) Bepaal het volume van het parallellepipedum opgespannen door de vectoren $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 3)$ en $(2, -1, 0)$ in $\mathbb{R}^3$.

Opgave 2. Bepaal de determinant van de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3. Zij

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van M.

(b) Geef een inverteerbare matrix C en een diagonaalmatrix D met $M = CDC^{-1}$.

(c) Bepaal functies $x = x(t)$ en $y = y(t)$ die voldoen aan

$$\begin{cases} x' &= 4x + 3y, \\ y' &= -6x - 5y, \end{cases}$$

$x(0) = 1$ en $y(0) = 1$.

— Vergeet de opgaven op de achterkant niet! —

Opgave 4. Beschouw de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Is A diagonaliseerbaar?

(b) Is B diagonaliseerbaar?

(c) Geef een matrix C van rang 2 en een diagonaalmatrix D met $AC = CD$.

Opgave 5. Zij W de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door de drie vectoren

$$\begin{aligned} a_1 &= (2,1,2,1), \\ a_2 &= (5,2,3,2) \quad \text{en} \\ a_3 &= (-5,-2,1,0). \end{aligned}$$

(a) Bepaal een orthonormale basis van W.

(b) Bepaal de loodrechte projectie van $(4,-5,4,-1)$ op W.

Opgave 6. De matrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

is de standaardmatrixrepresentatie van een rotatie om een lijn $L \subset \mathbb{R}^3$ door de oorsprong met een bepaalde hoek α (dit hoef je niet te bewijzen).

(a) Bepaal de standaardmatrixrepresentatie van de tegengestelde rotatie (dat wil zeggen, de rotatie om dezelfde lijn L met dezelfde hoek α maar nu in de andere richting).

(b) Bepaal de lijn L.

De matrix

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

is de standaardmatrixrepresentatie van de loodrechte projectie op een vlak $V \subset \mathbb{R}^3$ door de oorsprong (dit hoef je niet te bewijzen).

(c) Bepaal de standaardmatrixrepresentatie van de spiegeling in V.

[Hint: deze drie deelopgaven zijn onafhankelijk van elkaar op te lossen.]

— SUCCES! —