NOUVELLES COHOMOLOGIES DE WEIL EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE

par

Joseph Ayoub

Résumé. — Soit K un corps valué de hauteur 1 et d'inégales caractéristiques $(0, p)$, et soit k son corps résiduel. Dans cet article, nous construisons une nouvelle cohomologie de Weil pour les k-schémas de type fini à valeurs dans les $\mathbf{A}_K$-modules, avec $\mathbf{A}_K$ une K-algèbre de « périodes abstraites p-adiques » admettant une description explicite par générateurs et relations. Nous démontrons des théorèmes de comparaison reliant cette nouvelle cohomologie de Weil aux cohomologies de Weil classiques : la cohomologie rigide de Berthelot et les cohomologies ℓ-adiques, pour $\ell \neq p$. Nous énonçons également des conjectures sur l'anneau $\mathbf{A}_K$ dont l'une d'elles entraîne l'indépendance de ℓ en cohomologie.

Abstract. — Let K be a valued field of height 1 and unequal characteristics $(0, p)$, and let k be its residue field. In this article, we construct a new Weil cohomology for finite type k-schemes with values in $\mathbf{A}_K$-modules, where $\mathbf{A}_K$ is a K-algebra of "p-adic abstract periods" admitting an explicit description by generators and relations. We establish comparison theorems relating this new Weil cohomology to the classical ones : Berthelot's rigid cohomology and the ℓ-adic cohomologies, for $\ell \neq p$. We also state some conjectures on the ring $\mathbf{A}_K$. One of these conjectures implies the independence of ℓ in cohomology.

Table des matières

Mots clefs. — Cohomologie de Weil, motifs, motifs rigides, groupe de Galois motivique, indépendance de ℓ.

L'auteur a bénéficié du soutien du Fond National Suisse de la Recherche Scientifique (NSF), projet 200020_178729.

1. Introduction

On fixe un corps k de caractéristique $p > 0$. À un k-schéma de type fini X, on sait associer :

- suivant Berthelot [**13**] et moyennant le choix d'un corps valué complet $\widehat{K}$ de caractéristique nulle et de corps résiduel k, sa cohomologie rigide $\mathrm{H}^*_{\mathrm{rig}}(X/\widehat{K})$, qui est un $\widehat{K}$-vectoriel gradué,
- suivant Grothendieck [**2**] et moyennant le choix d'un nombre premier $\ell \neq p$ et d'une clôture séparable k^{sep} de k, sa cohomologie ℓ-adique $\mathrm{H}^*_{\ell}(X \otimes_k k^{\mathrm{sep}})$, qui est un $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel gradué.

Les dimensions des $\mathrm{H}^*_{\ell}(X \otimes_k k^{\mathrm{sep}})$ sont bornées indépendemment de $\ell \neq p$. On obtient donc un module gradué de type fini sur l'anneau $A_{\mathrm{tot}} = \widehat{K} \times \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Q}_\ell$ en posant :

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{tot}}(X) = \mathrm{H}^*_{\mathrm{rig}}(X/\widehat{K}) \times \prod_{\ell \neq p} \mathrm{H}^*_{\ell}(X \otimes_k k^{\mathrm{sep}}).$$

La théorie cohomologique $\mathrm{H}^*_{\mathrm{tot}}(-)$ ainsi obtenue est en fait définie sur le sous-anneau $\widehat{K} \times \mathbb{A}^p \subset A_{\mathrm{tot}}$, avec $\mathbb{A}^p = \mathbb{Q} \otimes \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$ l'anneau des « adèles en dehors de p », au sens suivant : le A_{tot}-module gradué $\mathrm{H}^*_{\mathrm{tot}}(X)$ s'obtient naturellement, par extension des scalaires, d'un module gradué sur le sous-anneau $\widehat{K} \times \mathbb{A}^p \subset A_{\mathrm{tot}}$; voir [**28**, §2] dans le cas où X est projectif et lisse. Cependant, on peut s'attendre à ce que la théorie cohomologique $\mathrm{H}^*_{\mathrm{tot}}(-)$ soit définie sur des sous-anneaux de A_{tot} beaucoup plus petits que $\widehat{K} \times \mathbb{A}^p$. En effet, si l'on croit à l'existence de la catégorie abélienne des motifs sur k, le formalisme tannakien entraîne que $\mathrm{H}^*_{\mathrm{tot}}(-)$ peut être définie, localement pour la topologie fpqc sur $\mathrm{Spec}(A_{\mathrm{tot}})$, sur une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. Ceci étant, il est naturel de s'intéresser à des théories cohomologiques qui sont à coefficients dans des anneaux relativement petits (comparés à $\widehat{K} \times \mathbb{A}^p$) et qui permettent de retrouver les théories cohomologiques classiques par extension des scalaires.

À ce stade, il est utile de préciser ce que l'on entend par « théorie cohomologique ». Dans ce travail on considère uniquement des théories cohomologiques représentables dans la catégorie triangulée $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\mathbb{Q})$ des motifs étales sur k. Ainsi, nous adoptons la définition suivante (voir aussi [**15**, Definition 2.1.4]).

Définition 1.1. — *Soit A une $\mathbb{Q}$-algèbre. Une* cohomologie de Weil à coefficients dans A *(on dira aussi* définie sur A*) est un préfaisceau de A-dg-algèbres Γ_W sur Sm/k vérifiant les conditions suivantes.*

(1) Le morphisme unité $A \longrightarrow \Gamma_W(X)$ est un quasi-isomorphisme pour $X = \mathrm{Spec}(k)$ et $X = \mathbb{A}^1$.

(2) Le complexe de A-modules $\Gamma_W(\mathbb{P}^1, \infty)$ est quasi-isomorphe à $A[-2]$.

(3) (Formule de Künneth) Pour tout $X, Y \in \mathrm{Sm}/k$, le morphisme évident

$$\Gamma_W(X) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A \Gamma_W(Y) \longrightarrow \Gamma_W(X \times_k Y)$$

est un quasi-isomorphisme.

(4) Le complexe de préfaisceaux Γ_W est fibrant pour la topologie étale (i.e., admet la descente étale).

Étant donnée une cohomologie de Weil Γ_W, on pose $\mathrm{H}^*_W(X) = \mathrm{H}^*(\Gamma_W(X))$ pour $X \in \mathrm{Sm}/k$.

Remarque 1.2. — Lorsque la $\mathbb{Q}$-algèbre A est un corps, la définition 1.1 est équivalente à [**15**, Definition 2.1.4]. (En effet, une cohomologie de Weil mixte au sens de [**15**, Definition 2.1.4] satisfait automatiquement la descente étale.) La propriété (3), affirmant que Γ_W vérifie la formule de Kunneth, est la propriété cruciale qui fait la différence entre les cohomologies de Weil et d'autres théories cohomologiques comme la cohomologie motivique ou celle de Deligne–Beilinson. De plus, d'après les résultats de [**15**, §2], la restriction de $\mathrm{H}^*_W(-)$ aux k-schémas projectifs lisses est une cohomologie de Weil au sens classique de [**26**, §1.2]. □

Avant d'énoncer un des résultats obtenus dans cet article, nous introduisons un anneau de « périodes abstraites p-adiques » du même type que les anneaux de « périodes abstraites complexes » considérés dans [**5**, Remarque 2.107, Proposition 2.108] (et qui sont isomorphes à ceux considérés dans [**27**]).

Construction 1.3. — On fixe un corps valué K de hauteur 1, d'inégales caractéristiques $(0, p)$ et de corps résiduel k. On note $\widehat{K}$ la complétion de K. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on considère les $\widehat{K}$-espaces analytiques rigides :

$$\partial\mathbb{B}^m = \mathrm{Spm}(\widehat{K}\{t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_m, t_m^{-1}\}) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{B}^n = \mathrm{Spm}(\widehat{K}\{z_1, \cdots, z_n\}).$$

On note $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n) \subset \mathcal{O}(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$ le sous-K-vectoriel formé des éléments algébriques sur le corps des fractions rationnelles $K(t_1, \cdots, t_m, z_1, \cdots, z_n)$. On pose :

$$\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^\infty \times \mathbb{B}^\infty) = \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n).$$

On définit alors le K-module $\mathbf{A}_K$ comme étant le quotient de $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^\infty \times \mathbb{B}^\infty)$ par le sous-K-vectoriel engendré par les éléments de la forme :

– $t_i \cdot \dfrac{\partial g}{\partial t_i}$, pour $g \in \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^\infty \times \mathbb{B}^\infty)$ et $i \geqslant 1$,

– $\dfrac{\partial h}{\partial z_j} - h|_{z_j=1} + h|_{z_j=0}$, pour $h \in \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^\infty \times \mathbb{B}^\infty)$ et $j \geqslant 1$.

(En égales caractéristiques nulles, les relations ci-dessus figurent aussi dans [**11**, Théorème 1.7].) La classe de $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^\infty \times \mathbb{B}^\infty)$ dans $\mathbf{A}_K$ sera notée $[f]$. Le K-vectoriel $\mathbf{A}_K$ est naturellement une K-algèbre commutative : son produit est donné par la formule $[f_1] \cdot [f_2] = [f_1 \cdot f_2]$ si $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^\infty \times \mathbb{B}^\infty)$ ne dépendent pas d'une même variable (voir [**5**, Proposition 2.108(b)]). Les éléments de $\mathbf{A}_K$ seront appelés des « périodes abstraites p-adiques ». On dispose d'un morphisme de K-algèbres

$$\int : \mathbf{A}_K \longrightarrow \widehat{K} \tag{1.1}$$

défini comme suit. Étant donnée $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$, on note $\mathrm{cc}(f)$ le coefficient du monôme $t_1^0 \cdots t_m^0$ lorsqu'on écrit f comme une série de Laurent à coefficients dans $\mathcal{O}(\mathbb{B}^n)$, i.e., en considérant f comme un élément de $\mathcal{O}(\mathbb{B}^n)\{t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_m, t_m^{-1}\}$. Alors, le morphisme (1.1) envoie $[f]$ sur l'intégrale multiple

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathrm{cc}(f) \cdot \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n \tag{1.2}$$

qu'on définit comme étant la somme

$$\sum_{(\tau_1,\cdots,\tau_n)\in\{0,1\}^n} (-1)^{n-\tau_1-\cdots-\tau_n} G(\tau_1, \cdots, \tau_n)$$

avec $G \in \mathcal{O}(\mathbb{B}^n)$ telle que

$$\frac{\partial^n G}{\partial z_1 \cdots \partial z_n} = \mathrm{cc}(f).$$

L'existence d'une telle fonction G est assurée par le fait que $\mathrm{cc}(f)$ est une fonction surconvergente sur $\mathbb{B}^n$, ce qui est une conséquence du fait que f est algébrique sur $K(t_1, \cdots, t_m, z_1, \cdots, z_n)$. □

Remarque 1.4. — L'expression « période p-adique » figure déjà en théorie de Hodge p-adique où les anneaux de Fontaine [**18**] sont aussi classiquement appelés des anneaux de périodes p-adiques. Bien que les anneaux $\mathbf{A}_K$ introduits ci-dessus n'ont pas grand-chose à voir avec les anneaux de Fontaine, il nous semble approprié de parler de « périodes abstraites p-adiques » dans la construction 1.3 à cause de la forte analogie avec le cas complexe, et on espère que le lecteur ne s'en offusquera pas. Il convient cependant de noter que, contrairement au cas complexe (voir [**5**, Remarque 2.107]), les anneaux $\mathbf{A}_K$ ne sont pas des anneaux de fonctions sur un torseur d'isomorphismes entre deux foncteurs fibres. □

Voici maintenant un échantillon des résultats obtenus dans cet article.

Théorème 1.5. — *Gardons les hypothèses et les notations de la construction 1.3. Il existe une cohomologie de Weil $\Gamma_{\mathrm{new}}(-/K)$ à coefficients dans la K-algèbre $\mathbf{A}_K$ vérifiant les propriétés suivantes.*

(A) Il existe un isomorphisme dans la catégorie dérivée des préfaisceaux sur Sm/k *:*

$$\Gamma_{\mathrm{new}}(-/K) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathbf{A}_K,\int} \widehat{K} \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\mathrm{rig}}(-/\widehat{K})$$

où $\Gamma_{\mathrm{rig}}(-/\widehat{K})$ désigne la cohomologie rigide de Berthelot (voir [**15**, Proposition 3.2.9]*).*

(B) Soit ℓ un nombre permier différent de p et soit $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. Le choix d'un plongement complexe $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et d'un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$ détermine un morphisme $\mathbf{A}_K \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ainsi qu'un isomorphisme dans la catégorie dérivée des préfaisceaux sur Sm/k *:*

$$\Gamma_{\mathrm{new}}(-/K) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathbf{A}_K} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \Gamma_\ell(-) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

où $\Gamma_\ell(-)$ désigne la cohomologie ℓ-adique.

Remarque 1.6. — Le théorème 1.5 fournit un anneau de coefficients commun à toutes les cohomologies de Weil classiques, à savoir $\mathbf{A}_K$, et cet anneau est bien plus petit que $\widehat{K} \times \mathbb{A}^p$. Cependant, en dehors du côté esthétique, l'intérêt du théorème 1.5 dépend beaucoup de ce que l'on sait dire sur la K-algèbre $\mathbf{A}_K$. Malheureusement, à l'heure actuelle, nous n'avons que des conjectures à proposer au lecteur. On conjecture par exemple que l'anneau $\mathbf{A}_K$ est intègre (contrairement à $\widehat{K} \times \mathbb{A}^p$), mais cette conjecture semble hors de porté. Une conjecture qui semble encore beaucoup plus lointaine prédit que le morphisme d'intégration (1.1) est injectif si K est un corps de nombres. Il s'agit là d'une version p-adique de la conjecture des périodes de Kontsevich–Zagier [**27**, §4.1] (voir aussi [**9**, Conjecture 1.1]). Dans la sous-section 4.3, nous proposons une autre conjecture qui concerne l'action naturelle du groupe de Galois motivique de K sur $\mathbf{A}_K$, et nous avons des raisons de penser que cette conjecture est plus accessible que les deux premières. (Strictement parlant, il s'agit d'une variante de la K-algèbre $\mathbf{A}_K$; voir la conjecture 4.10.) □

Dans le reste de l'introduction, nous allons esquisser la construction de la nouvelle cohomologie de Weil du théorème 1.5. En fait, nous construisons d'abord le pendant « homologique » de $\Gamma_{\mathrm{new}}(-/K)$ sous forme d'un foncteur de réalisation (covariant)

$$\mathrm{R}_{\mathrm{new}} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A}_K) \tag{1.3}$$

de la catégorie des motifs étales vers la catégorie dérivée des $\mathbf{A}_K$-modules. La propriété cruciale du foncteur $\mathrm{R}_{\mathrm{new}}$ est le fait qu'il est monoïdal (ce qui correspond à la formule de Künneth dans la définition 1.1). On retrouve la cohomologie de Weil $\Gamma_{\mathrm{new}}(-/K)$ en posant, pour $X \in \mathrm{Sm}/k$,

$$\Gamma_{\mathrm{new}}(X/K) = \mathrm{RHom}_{\mathbf{A}_K}(\mathrm{R}_{\mathrm{new}}(\mathrm{M}(X)), \mathbf{A}_K),$$

avec $\mathrm{M}(X) \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\mathbb{Q})$ le motif homologique de X. Autrement dit, $\Gamma_{\mathrm{new}}(X/K)$ est simplement le dual de $\mathrm{R}_{\mathrm{new}}(\mathrm{M}(X))$. Ceci est bien raisonnable car $\mathrm{R}_{\mathrm{new}}(\mathrm{M}(X))$ est un complexe parfait de $\mathbf{A}_K$-modules, ce qui découle du fait que $\mathrm{R}_{\mathrm{new}}$ est monoïdal.

La construction du foncteur (1.3) passe par la catégorie $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\mathbb{Q})$ des motifs étales rigides. Rappelons que la construction de cette catégorie est calquée sur celle de la catégorie $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\mathbb{Q})$: il s'agit de remplacer partout « Sm/k » par « $\mathrm{SmRig}/\widehat{K}$ ». On dispose d'un foncteur monoïdal

$$\mathrm{rel} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\mathbb{Q}) \tag{1.4}$$

vérifiant la propriété suivante : pour tout $\widehat{K}^\circ$-schéma formel lisse $\mathcal{X}$, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{rel}(\mathrm{M}(\mathcal{X}_\sigma)) \simeq \mathrm{M}(\mathcal{X}_\eta)$, où $\mathcal{X}_\sigma$ et $\mathcal{X}_\eta$ désignent respectivement la fibre spéciale et la fibre générique de $\mathcal{X}$.

On dispose aussi d'un foncteur monoïdal

$$\mathrm{Rig}^* : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\mathbb{Q}) \tag{1.5}$$

vérifiant la propriété suivante : pour tout K-schéma lisse X, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Rig}^*(\mathrm{M}(X)) \simeq \mathrm{M}(X^{\mathrm{anr}})$, où X^{anr} désigne la $\widehat{K}$-variété analytique rigide associée à $X \otimes_K \widehat{K}$. En fait, nous utiliserons surtout l'adjoint à droite

$$\mathrm{Rig}_* : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathbb{Q}) \tag{1.6}$$

de ce foncteur. Bien entendu, le foncteur Rig_* n'est pas monoïdal. Cependant, on a le résultat suivant qui est un ingrédient essentiel dans la construction du foncteur de réalisation (1.3).

Théorème 1.7. — *L'algèbre commutative* $\mathrm{Rig}_*\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathbb{Q})$ *se relève en une algèbre commutative* $\widetilde{\mathrm{Rig}_*}\mathbb{Q}$ *dans la catégorie* $\mathbf{Spt}^\sharp_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/K;\mathbb{Q})))$ *et le foncteur* Rig_* *s'enrichie en un foncteur*

$$\widetilde{\mathrm{Rig}_*} : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\widetilde{\mathrm{Rig}_*}\mathbb{Q}) \tag{1.7}$$

à valeurs dans la catégorie homotopique des $\widetilde{\mathrm{Rig}}_*\mathbb{Q}$*-modules. De plus, le foncteur* (1.7) *est une équivalence monoïdale.*

L'existence du foncteur $\widetilde{\mathrm{Rig}}_*$ est relativement formelle et n'est guère surprenante. La propriété essentielle est la monoïdalité (encore une fois !) de ce foncteur. Esquissons l'argument : le foncteur $\widetilde{\mathrm{Rig}}_*$ est pseudo-monoïdal, i.e., on dispose d'une transformation binaturelle

$$\widetilde{\mathrm{Rig}}_*(M) \otimes_{\widetilde{\mathrm{Rig}}_*\mathbb{Q}} \widetilde{\mathrm{Rig}}_*(N) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Rig}}_*(M \otimes N), \tag{1.8}$$

et il s'agit de montrer qu'elle est inversible. Il suffit de vérifier cela pour un M et N appartenant à un ensemble de générateurs de la catégorie triangulée $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\mathbb{Q})$. Or, on sait d'après [**8**, Théorème 2.5.35] que l'image du foncteur Rig^* engendre $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\mathbb{Q})$. On peut donc supposer que $M = \mathrm{Rig}^*(M_0)$ et $N = \mathrm{Rig}^*(N_0)$, avec M_0 et N_0 dans $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathbb{Q})$. Le résultat recherché découle alors de la formule de coprojection

$$\mathrm{Rig}_*\mathrm{Rig}^*(-) \simeq \mathrm{Rig}_*\mathbb{Q} \otimes (-) \tag{1.9}$$

appliquée à M_0, N_0 et $M_0 \otimes N_0$. (Voir le lemme 2.29 ci-dessous.)

Vu le théorème 1.7, il est tentant de considérer la composition suivante :

$$\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{rel}} \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\mathbb{Q}) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Rig}}_*} \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\widetilde{\mathrm{Rig}}_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{R_{dR}}} \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_K)) \tag{1.10}$$

où $\mathrm{R_{dR}}$ désigne la réalisation de de Rham des motifs sur K et $\mathscr{A}_K = \mathrm{R_{dR}}(\widetilde{\mathrm{Rig}}_*\mathbb{Q})$ est la dg-algèbre définie comme étant la réalisation de de Rham de $\widetilde{\mathrm{Rig}}_*\mathbb{Q}$. Remarquons que tous les foncteurs dans (1.10) sont monoïdaux, et il en est donc de même de leur composition. Pour achever la construction du foncteur de réalisation (1.3), on utilise le résultat suivant.

Théorème 1.8. — *Le complexe $\mathscr{A}_K$ est (-1)-connexe (i.e., $\mathrm{H}_i(\mathscr{A}_K) = 0$ pour $i < 0$) et la K-algèbre $\mathrm{H}_0(\mathscr{A}_K)$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{A}_K$.*

Rappelons que le foncteur $\mathrm{R_{dR}}$ est défini par $\mathrm{R}\Gamma(K; - \otimes \mathbf{\Omega})$, où $\mathbf{\Omega}$ est le T-spectre représentant la cohomologie de de Rham algébrique et qui est donné en chaque niveau par le complexe de de Rham usuel. En utilisant la formule de coprojection (1.9), on trouve donc

$$\mathscr{A}_K = \mathrm{R_{dR}}(\mathrm{Rig}_*\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{R}\Gamma(K; \mathrm{Rig}_*\mathbb{Q} \otimes \mathbf{\Omega}) \simeq \mathrm{R}\Gamma(K; \mathrm{Rig}_*\mathrm{Rig}^*(\mathbf{\Omega})) \simeq \mathrm{R}\Gamma(\widehat{K}; \mathrm{Rig}^*(\mathbf{\Omega})).$$

Le théorème 1.8 se démontre par un calcul direct du complexe $\mathrm{R}\Gamma(\widehat{K}, \mathrm{Rig}^*(\mathbf{\Omega}))$. La méthode est la même que celle utilisée dans [**9**, §3.6] et revisitée dans [**11**, §2.4]. Une fois le théorème 1.8 établi, on dispose d'un foncteur monoïdal

$$\mathbf{A}_K \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}_K} - : \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_K)) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A}_K), \tag{1.11}$$

et le foncteur de réalisation $\mathrm{R_{new}}$ s'obtient alors en composant (1.10) et (1.11).

Conventions et notations courantes.

Schémas et variétés rigides. — Sauf mention explicite du contraire, les schémas et les schémas formels sont supposés quasi-compacts et séparés. Les variétés rigides sont supposées séparées (mais non nécessairement quasi-compactes). Si S est un schéma (resp. une variété rigide), on note Sm/S (resp. SmRig/S) la catégorie des S-schémas lisses (resp. des S-variétés rigides lisses). Si $S = \mathrm{Spec}(A)$ (resp. $S = \mathrm{Spm}(A)$), cette catégorie est aussi désigée par Sm/A (resp. SmRig/A).

On note $\mathbb{A}^1$ la droite affine et $\mathbb{E}^1 = \mathbb{A}^1 \smallsetminus o$ la droite affine épointée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbb{A}^n = (\mathbb{A}^1)^{\times n}$ et $\mathbb{E}^n = (\mathbb{E}^1)^{\times n}$, et on note $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif de dimension n. On note $\mathbb{B}^1$ la boule unité de Tate et $\partial\mathbb{B}^1$ son bord. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbb{B}^n = (\mathbb{B}^1)^{\times n}$ et $\partial\mathbb{B}^n = (\partial\mathbb{B}^1)^{\times n}$.

Anneaux et modules. — Sauf mention du contraire, tous les anneaux, algèbres et dg-algèbres sont commutatifs et unitaires. Si A est une algèbre dans une catégorie monoïdale $\mathcal{E}$, on note $\mathbf{Mod}(A)$ la catégorie des A-modules dans $\mathcal{E}$.

Complexes. — Si $\mathcal{A}$ est une catégoie additive, on note $\mathbf{Cpl}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes dans $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est abélienne, on note $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ sa catégorie dérivée. Si Λ est un anneau, on note $\mathbf{Cpl}(\Lambda)$ et $\mathbf{D}(\Lambda)$ au lieu de $\mathbf{Cpl}(\mathbf{Mod}(\Lambda))$ et $\mathbf{D}(\mathbf{Mod}(\Lambda))$.

Préfaisceaux et faisceaux. — Si $\mathcal{C}$ est une catégorie et Λ un anneau, on note $\mathbf{PSh}(\mathcal{C};\Lambda)$ la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans les Λ-modules. Si τ est une topologie sur $\mathcal{C}$, on note $\mathbf{Shv}_\tau(\mathcal{C};\Lambda)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{PSh}(\mathcal{C};\Lambda)$ formée des τ-faisceaux. On note a_τ le foncteur de τ-faisceautisation.

La topologie étale sera désignée par « ét ».

Catégories monoïdales et spectres. — Dans cet article, l'expression « catégorie monoïdale » signifie « catégorie monoïdale, symétrique et unitaire ». De même, l'expression « foncteur (pseudo-)monoïdal » signifie « foncteur (pseudo-)monoïdal, symétrique et (pseudo-)unitaire ».

Si $\mathcal{M}$ est un catégorie monoïdale et si T est un objet de $\mathcal{M}$, on dispose de trois catégories de T-spectres, à savoir $\mathbf{Spt}_T(\mathcal{M})$, $\mathbf{Spt}_T^\Sigma(\mathcal{M})$ et $\mathbf{Spt}_T^\sharp(\mathcal{M})$. Les objets de la deuxième et troisième catégories sont qualifiés respectivement de « symétriques » et de « commutatifs ».

Catégories de modèles. — Étant donnée une catégorie de modèles $\mathfrak{M}$, on note $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ sa catégorie homotopique. Étant donnée une sous-catégorie pleine $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$, on note $\mathbf{Ho}(\mathfrak{N})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ ayant les mêmes objets que $\mathfrak{N}$.

Sauf mention explicite du contraire, on considère toujours les structures de modèles projectives (et non pas injectives) sur les catégories $\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathcal{C};\Lambda))$. On dispose de la structure de modèles globale pour laquelle les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les surjections. On dispose également de la structure de modèles τ-locale obtenue par localisation de Bousfield de la structure précédente et dont les équivalences faibles sont les équivalences τ-locales, i.e., celles qui induisent des isomorphismes en homologie après τ-faisceautisation.

Dans ce travail, on utilisera couramment le théorème d'existence de structures de modèles sur les catégories d'algèbres commutatives de White [**32**, Theorem 3.2]. Sauf mention explicite du contraire, si A est une algèbre commutative dans une catégorie de modèles monoïdale $\mathfrak{M}$ (vérifiant certaines hypothèses), les remplacements fibrants et cofibrants de A sont toujours pris dans la catégorie de modèles des algèbres commutatives dans $\mathfrak{M}$.

Motifs. — Si S est un schéma (resp. une variété rigide), on note $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(S;\Lambda)$ (resp. $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(S;\Lambda)$) la catégorie des S-motifs (resp. S-motifs rigides) étales à coefficients dans un anneau Λ. Si X est un S-schéma lisse (resp. une S-variété rigide lisse), on note $\mathrm{M}(X)$ son S-motif. L'objet unité de $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(S;\Lambda)$ (resp. $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(S;\Lambda)$) est noté $\mathbf{\Lambda}$ ou simplement $\mathbf{1}$. Le foncteur « sections globales »

$$\mathrm{R}\Gamma(S;-) : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(S;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}(\Lambda)$$

est défini par $\mathrm{R}\Gamma(S;-) = \mathrm{RHom}_{\mathbf{DA}^{\text{ét}}(S;\Lambda)}(\mathbf{\Lambda},-)$ et de même dans le cas respé.

2. Motifs algébriques et motifs rigides

On commence cette section avec des rappels sur les motifs (algébriques et rigides) qui serviront dans la suite. On donne ensuite la construction du foncteur $\widetilde{\mathrm{Rig}}_*$ (voir (1.7)) et on démontre le théorème 1.7. On termine avec une construction de foncteurs de réalisation à valeurs dans les modules sur certaines dg-algèbres. On fixe une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative Λ et on écrit souvent « $\otimes$ » au lieu de « $\otimes_\Lambda$ ».

2.1. Rappels sur les motifs algébriques et leurs cohomologies. — Soit S un schéma de base. On dispose d'une catégorie triangulée de motifs sur S à coefficients dans Λ, notée $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(S;\Lambda)$. Afin de fixer les notations, nous rappelons brièvement la construction de cette catégorie.

On commence d'abord par la variante effective, notée $\mathbf{DA}^{\text{eff},\text{ét}}(S;\Lambda)$. C'est une catégorie triangulée définie comme étant la catégorie homotopique de

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S;\Lambda)) \tag{2.1}$$

munie de sa structure de modèles $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale. Ladite structure s'obtient à partir de la structure ét-locale par localisation de Bousfield suivant la classe des morphismes de la forme $\mathbb{A}^1_X \otimes \Lambda[n] \longrightarrow X \otimes \Lambda[n]$, pour $X \in \mathrm{Sm}/S$ et $n \in \mathbb{Z}$. Les équivalences faibles de la structure $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales sont appelées les équivalences $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales. La catégorie (2.1) est monoïdale et sa structure monoïdale est compatible à ses deux structures de modèles susmentionnées. En particulier, la catégorie triangulée $\mathbf{DA}^{\text{eff}, \text{ét}}(S\,;\Lambda)$ est monoïdale.

Passons maintenant à la variante stable, notée $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(S\,;\Lambda)$. C'est une catégorie triangulée définie comme étant la catégorie homotopique de

$$\mathbf{Spt}^{\sharp}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S\,;\Lambda))) \tag{2.2}$$

munie de sa structure de modèles $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale stable. Il y a plusieurs choix équivalents pour T et dans cet article on prendra

$$T = (\mathbb{E}^1, 1) \otimes \Lambda[-1]. \tag{2.3}$$

La catégorie (2.2) est celle des T-spectres commutatifs en complexes de préfaisceaux sur Sm/S. (Pour la notion de spectres commutatifs, on renvoie le lecteur à [**10**, §4].) La structure $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale stable est la structure projective stable sur (2.2) déduite de la structure $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale ; voir [**10**, Definition 4.16]. Les équivalences faibles de la structure $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale stable sont appelées les équivalences $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locales stables. La catégorie (2.2) est monoïdale et sa structure monoïdale est compatible à la structure $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale stable d'après [**10**, Proposition 4.20]. En particulier, la catégorie triangulée $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(S\,;\Lambda)$ est monoïdale.

On dispose d'un foncteur de Quillen à gauche

$$\Sigma^{\infty}_{T,\sharp} : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S\,;\Lambda)) \longrightarrow \mathbf{Spt}^{\sharp}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S\,;\Lambda))) \tag{2.4}$$

qui à un complexe de préfaisceaux F associe le T-spectre de suspension infinie $\Sigma^{\infty}_{T,\sharp}(F) = \{\mathrm{S}^n(T) \otimes F\}_{n\in\mathbb{N}}$. Le foncteur (2.4) est monoïdal et il induit un foncteur triangulé

$$\Sigma^{\infty}_{T,\sharp} : \mathbf{DA}^{\text{eff}, \text{ét}}(S\,;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{DA}^{\text{ét}}(S\,;\Lambda) \tag{2.5}$$

qui est aussi monoïdal.

Remarque 2.1. — Plus tard et notamment dans la sous-section 3.1, on aura aussi besoin des variantes avec transferts des catégories $\mathbf{DA}^{\text{eff}, \text{ét}}(S\,;\Lambda)$ et $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(S\,;\Lambda)$ introduites ci-dessus. Ces catégories sont notées respectivement

$$\mathbf{DM}^{\text{eff}}(S\,;\Lambda) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{DM}(S\,;\Lambda).$$

La catégorie $\mathbf{DM}^{(\text{eff})}(S\,;\Lambda)$ est construite de la même manière que $\mathbf{DA}^{(\text{eff},)\,\text{ét}}(S\,;\Lambda)$ en utilisant les préfaisceaux avec transferts sur Sm/S au lieu des préfaisceaux ordinaires, i.e., en remplaçant partout dans la construction « $\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S\,;\Lambda)$ » par « $\mathbf{PST}(\mathrm{Sm}/S\,;\Lambda)$ ». Lorsque S est normal, on dispose d'une équivalence de catégories $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(S\,;\Lambda) \simeq \mathbf{DM}(S\,;\Lambda)$; voir [**4**, Théorème B.1]. □

Remarque 2.2. — Originellement, la catégorie $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(S\,;\Lambda)$ est construite en utilisant les T-spectres symétriques (au lieu des T-spectres commutatifs) ; voir [**3**, Définition 4.5.21]. Lorsque S est un $\mathbb{Q}$-schéma, il a été montré dans [**10**, Remark 4.26] que l'approche via les T-spectres commutatifs et celle via les T-spectres symétriques mènent à des catégories monoïdales équivalentes. En fait, ceci reste vrai sans hypothèses sur S. Toutefois, l'argument donné dans [**10**, Remark 4.26] ne suffit plus dans le cas général car il repose sur le fait que la permutation des facteurs de $T \otimes T$ est l'identité dans $\mathbf{DA}^{\text{eff}, \text{ét}}(S\,;\Lambda)$, et la preuve de ceci utilise l'équivalence de catégories $\mathbf{DA}^{\text{eff}, \text{ét}}(S\,;\Lambda) \simeq \mathbf{DM}^{\text{eff}}(S\,;\Lambda)$ qui est valable uniquement sous l'hypothèse que S est un $\mathbb{Q}$-schéma. Pour un schéma de base général S, on dispose néanmoins de la version stable de cette équivalence ; voir [**4**, Théorème B.1]. Ceci permet de montrer que la permutation des facteurs induit l'identité sur $\Sigma^{\infty}_T(T \otimes T)$ dans la catégorie homotopique de

$$\mathbf{Spt}_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/S\,;\Lambda)))$$

relativement à la structure $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale stable. (Plus précisément, on utilise [**4**, Proposition 3.24] pour se ramener au cas où S est le spectre d'un corps et [**4**, Théorème B.1] pour se ramener à la question analogue pour les motifs avec transferts sur un corps qui est traitée dans [**31**, Lemma 4.8].) Ceci étant, l'équivalence entre l'approche via les T-spectres commutatifs et celle via les T-spectres symétriques découle maintenant de la généralisation suivante de [**10**, Theorem 4.24] qui peut être omise en première lecture. □

Théorème 2.3. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *une catégorie de modèles monoïdale vérifiant* [**10**, Hypothesis 4.1] *et soit* $T \in \mathfrak{M}$ *un objet cofibrant. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites.*

(i) Le cycle $(123) \in \Sigma_3$ *agit par l'identité sur* $T^{\otimes 3}$ *dans* $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$ *et la transposition* $(12) \in \Sigma_2$ *agit par l'identité sur* $\Sigma_T^{\infty}(T^{\otimes 2})$ *dans* $\mathbf{Ho}_{\mathrm{st}}(\mathbf{Spt}_T(\mathfrak{M}))$.

(ii) Le foncteur $\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(T,-)$ *commute aux colimites filtrantes dans* $\mathfrak{M}$.

(iii) L'objet T *est isomorphe à une suspension dans* $\mathbf{Ho}(\mathfrak{M})$.

Alors, le foncteur

$$-/\Sigma : \mathbf{Spt}_T^{\Sigma}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spt}_T^{\sharp}(\mathfrak{M})$$

est une équivalence de Quillen à gauche relativement aux structures projectives stables.

Démonstration. — Comme dans la preuve de [**10**, Theorem 4.24], l'adjoint à droite

$$\mathrm{R}\iota : \mathbf{Ho}_{\mathrm{st}}(\mathbf{Spt}_T^{\sharp}(\mathfrak{M})) \longrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathrm{st}}(\mathbf{Spt}_T^{\Sigma}(\mathfrak{M}))$$

est pleinement fidèle et il reste à voir qu'il est essentiellement surjectif. D'après [**3**, Théorème 4.3.79], le foncteur d'oubli

$$\mathrm{Oub}^{\Sigma} : \mathbf{Spt}_T^{\Sigma}(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbf{Spt}_T(\mathfrak{M})$$

est une équivalence de Quillen à droite. Il est donc suffisant de montrer que le foncteur composé

$$\mathbf{Ho}_{\mathrm{st}}(\mathbf{Spt}_T^{\sharp}(\mathfrak{M})) \xrightarrow{\mathrm{R}\iota} \mathbf{Ho}_{\mathrm{st}}(\mathbf{Spt}_T^{\Sigma}(\mathfrak{M})) \xrightarrow{\mathrm{ROub}^{\Sigma}} \mathbf{Ho}_{\mathrm{st}}(\mathbf{Spt}_T(\mathfrak{M})) \tag{2.6}$$

est essentiellement surjectif. Pour ce faire, nous allons montrer que le morphisme de T-spectres

$$\mathrm{Sus}_T^p(M) \longrightarrow \mathrm{Sus}_{T,\sharp}^p(M) \tag{2.7}$$

est une équivalence stable pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathfrak{M}$ cofibrant. Expliquons d'abord pourquoi ceci suffit pour conclure. Le fait que les morphismes (2.7) soient des équivalences stables entraîne aussitôt que le foncteur composé $\mathrm{Oub}^{\Sigma} \circ \iota$ préserve les équivalences stables et il se dérive donc trivialement. En particulier, $\mathrm{ROub}^{\Sigma} \circ \mathrm{R}\iota(\mathrm{Sus}_{T,\sharp}^p(M))$ est isomorphe à $\mathrm{Sus}_{T,\sharp}^p(M)$ vu comme un T-spectre non symétrique. Puisque (2.7) est une équivalence stable, il s'ensuit que $\mathrm{Sus}_{T,\sharp}^p(M)$ est dans l'image du foncteur composé (2.6). Or, d'après [**10**, Lemma 4.21] et [**3**, Proposition 4.3.77, Théorème 4.3.79], les foncteurs $\mathrm{R}\iota$ et ROub^{Σ} sont triangulés et commutent aux sommes infinies. Puisque le foncteur composé (2.6) est pleinement fidèle et que les objets de la forme $\mathrm{Sus}_T^p(M)$, pour $p \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathfrak{M}$ cofibrant, engendrent la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{Ho}_{\mathrm{st}}(\mathbf{Spt}_T(\mathfrak{M}))$, l'essentielle surjectivité de (2.6) s'ensuit.

Pour terminer la preuve, il reste à voir que le morphisme (2.7) est une équivalence stable. Pour ce faire, on remarque que le but de ce morphisme s'écrit comme la colimite filtrante de T-spectres $\mathbf{M}^{(r)}$, pour $r \in \mathbb{N}$, qui sont donnés au niveau n par :

$$\mathbf{M}_n^{(r)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \leqslant n \leqslant p-1, \\ \mathrm{S}^{n-p}(T) \otimes M & \text{si } \ p \leqslant n \leqslant p+r, \\ T^{\otimes n-p-r} \otimes \mathrm{S}^r(T) \otimes M & \text{si } \ p+r+1 \leqslant n. \end{cases}$$

Il est donc suffisant de montrer que $\mathrm{Sus}_T^p(M) = \mathbf{M}^{(0)} \longrightarrow \mathbf{M}^{(r)}$ est une équivalence stable. D'une part, $\mathrm{Sus}_T^p(M)$ est stablement équivalent à $\mathrm{Sus}_T^{p+r}(T^{\otimes r} \otimes M)$ et, d'autre part, $\mathbf{M}^{(r)}$ est stablement équivalent à $\mathrm{Sus}_T^{p+r}(\mathrm{S}^r(T) \otimes M)$. (On utilise ici [**3**, Lemme 4.3.59].) La condition (i) de l'énoncé permet maintenant de conclure. (Utiliser [**3**, Théorème 4.3.79] pour se ramener à la question analogue pour les T-spectres symétriques et utiliser le fait que $\mathrm{Sus}_{T,\Sigma}^{p+r}((-) \otimes M) \simeq \mathrm{Sus}_{T,\Sigma}^{0}(-) \otimes \mathrm{Sus}_{T,\Sigma}^{p+r}(M)$ pour se ramener à montrer que $\mathrm{Sus}_{T,\Sigma}^0(T^{\otimes r}) \longrightarrow \mathrm{Sus}_{T,\Sigma}^0(\mathrm{S}^r(T))$ est une équivalence stable.) ■

Dans la suite de la sous-section, on se restreint au cas où S est le spectre d'un corps k. Nous expliquerons comment représenter une cohomologie de Weil dans les catégories de motifs. Ceci est dû originellement à Cisinski–Déglise [**15**, §2.1.5] mais nous rappellons leur construction pour la commodité du lecteur. Jusqu'à la fin de la sous-section, on fixe une cohomologie de Weil Γ_W à coefficients dans une Λ-algèbre A au sens de la définition 1.1. (Contrairement à l'introduction, on ne suppose pas ici que k est de caractéristique $p > 0$.) On commence avec une remarque évidente.

Remarque 2.4. — La cohomologie de Weil Γ_W, vue comme un complexe de préfaisceaux sur Sm/k, définit un objet de $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\,\text{ét}}(k;\Lambda)$. En fait, le complexe de préfaisceaux Γ_W est $(\mathbb{A}^1,\text{ét})$-fibrant comme il découle aussitôt de la définition 1.1. Il s'ensuit que $\Gamma_W \in \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\,\text{ét}}(k;\Lambda)$ représente la théorie cohomologique Γ_W au sens suivant : il existe un quasi-isomorphisme

$$\Gamma_W(X) \simeq \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\,\text{ét}}(k;\,\Lambda)}(\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(X),\Gamma_W) \tag{2.8}$$

naturel en $X \in \mathrm{Sm}/k$. (Bien entendu, $\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(X)$ est le motif effectif associé à X, i.e., le préfaisceau $X \otimes \Lambda[0]$ considéré comme un objet de $\mathbf{DA}^{\mathrm{eff},\,\text{ét}}(k;\Lambda)$.) ◻

Notation 2.5. — D'après la condition (ii) de la définition 1.1, le A-module $\mathrm{H}^2_W(\mathbb{P}^1)$ est libre de rang 1 ; on le note $A(-1)$. On définit, pour $n \in \mathbb{Z}$, le A-module $A(n)$ et le foncteur de twist à la Tate $M \rightsquigarrow M(n)$, pour $M \in \mathbf{Mod}(A)$, de la manière usuelle. ◻

Construction 2.6. — On associe à la cohomologie de Weil Γ_W un T-spectre $\mathbf{\Gamma}_W$ sur Sm/k de la manière suivante. En niveau $n \in \mathbb{N}$, le T-spectre $\mathbf{\Gamma}_W$ est donné par le complexe de préfaisceaux $\Gamma_W(n)$. Le A-module libre $\mathrm{H}^2_W(\mathbb{P}^1)(1) \simeq \mathrm{H}^1_W(\mathbb{E}^1)(1)$ admet un générateur canonique, et on fixe un morphisme de complexes de préfaisceaux $\gamma : T \longrightarrow \Gamma_W(1)$ qui représente ce générateur. Le morphisme d'assemblage en niveau n du T-spectre $\mathbf{\Gamma}_W$ est alors le morphisme composé

$$\gamma_n : T \otimes \Gamma_W(n) \xrightarrow{\gamma} \Gamma_W(1) \otimes \Gamma_W(n) \xrightarrow{\mu} \Gamma_W(n+1)$$

où μ désigne la multiplication de Γ_W. Étant donné que l'algèbre Γ_W est supposée commutative, il découle aussitôt de la construction que le T-spectre $\mathbf{\Gamma}_W$ est commutatif. De plus, $\mathbf{\Gamma}_W$ est une algèbre commutative de la catégorie monoïdale (2.2) (avec $S = \mathrm{Spec}(k)$) et définit donc une algèbre commutative dans la catégorie monoïdale $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda)$. ◻

Remarque 2.7. — Le T-spectre commutatif $\mathbf{\Gamma}_W$ est stablement $(\mathbb{A}^1,\text{ét})$-fibrant : on a déjà vu dans la remarque 2.4 qu'il était $(\mathbb{A}^1,\text{ét})$-fibrant niveau par niveau, et il découle des conditions (2) et (3) de la définition 1.1 que $\mathbf{\Gamma}_W$ est un Ω-spectre. Il s'ensuit que $\mathbf{\Gamma}_W \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda)$ représente la théorie cohomologique Γ_W au sens suivant : il existe un quasi-isomorphisme

$$\Gamma_W(X) \simeq \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda)}(\mathrm{M}(X),\mathbf{\Gamma}_W) \tag{2.9}$$

naturel en $X \in \mathrm{Sm}/k$. (Bien entendu, $\mathrm{M}(X)$ est le motif associé à X, i.e., le T-spectre $\Sigma^\infty_{T,\sharp}(X \otimes \Lambda[0])$ considéré comme un objet de $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda)$.) ◻

Suivant [**15**, §2.6], on peut associer à Γ_W une réalisation homologique. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons la construction de cette réalisation. Pour ce faire, on utilise le résultat suivant.

Proposition 2.8. — *Soit R un objet de $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda)$ muni d'une structure de $\mathbf{\Gamma}_W$-module. Alors, la composition de*

$$\mathbf{\Gamma}_W \otimes_A \mathrm{R}\Gamma(k;R) \longrightarrow \mathbf{\Gamma}_W \otimes_A R \longrightarrow R \tag{2.10}$$

est un isomorphisme. (La première flèche est induite par le morphisme évident $\Sigma^\infty_{T,\sharp}\mathrm{R}\Gamma(k;R)_{\mathrm{cst}} \longrightarrow R$ et la seconde flèche est donnée par l'action de $\mathbf{\Gamma}_W$ sur R.)

Démonstration. — Il s'agit d'une généralisation de [**11**, Proposition 2.11] (qui elle-même est un cas particulier de [**15**, Theorem 2.6.2]). La preuve de [**11**, Proposition 2.11] s'étend littéralement en remplaçant « $\mathbf{\Omega}_{/k}$ » par « $\mathbf{\Gamma}_W$ ». Esquissons quand même l'argument.

On procède en deux étapes. Dans la première, on traite le cas où $R = \mathbf{\Gamma}_W \otimes_A M$, avec $M \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;A)$. On se ramène aussitôt au cas où $M = \underline{\mathrm{Hom}}(X,\mathbf{1})$ est le dual fort du motif d'un k-schéma lisse X. Dans ce cas, on a des identifications canoniques

$$\mathbf{\Gamma}_W \otimes_A M \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(X,\mathbf{\Gamma}_W) \simeq \mathbf{\Gamma}_W \otimes_A \Gamma_W(X)$$

qui permettent de conclure. (La seconde identification ci-dessus, découle de la formule de Künneth.)

Dans la seconde étape, on construit une section au morphisme (2.10) en prenant la composition de

$$R \longrightarrow \mathbf{\Gamma}_W \otimes_A R \simeq \mathbf{\Gamma}_W \otimes_A \mathrm{R}\Gamma(k;\mathbf{\Gamma}_W \otimes_A R) \longrightarrow \mathbf{\Gamma}_W \otimes_A \mathrm{R}\Gamma(k;R)$$

où l'isomorphisme au milieu est déduit de la première étape. On montre ensuite que cette composition est un épimorphisme scindé. (Pour plus de détails, voir la partie B de la preuve de [**11**, Proposition 2.11].) ■

Corollaire 2.9. — *L'association $M \rightsquigarrow \mathrm{R}\Gamma(k;\mathbf{\Gamma}_W \otimes M)$ s'étend en un foncteur monoïdal*

$$\mathrm{R}_W : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}(A). \tag{2.11}$$

(C'est la réalisation homologique associée à Γ_W.)

Démonstration. — Le foncteur en question est pseudo-monoïdal car il en est ainsi des foncteurs $\mathrm{R}\Gamma(k;-)$ et $\mathbf{\Gamma}_W \otimes -$. Montrons que la transformation binaturelle

$$\mathrm{R}\Gamma(k;\mathbf{\Gamma}_W \otimes M) \otimes_A \mathrm{R}\Gamma(k;\mathbf{\Gamma}_W \otimes N) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma(k;\mathbf{\Gamma}_W \otimes (M \otimes N)), \tag{2.12}$$

est inversible pour tout $M, N \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda)$. Pour ce faire, il suffit de montrer que le morphisme

$$(\mathbf{\Gamma}_W \otimes_A \mathrm{R}\Gamma(k;\mathbf{\Gamma}_W \otimes M)) \otimes_{\mathbf{\Gamma}_W} (\mathbf{\Gamma}_W \otimes_A \mathrm{R}\Gamma(k;\mathbf{\Gamma}_W \otimes N)) \longrightarrow \mathbf{\Gamma}_W \otimes_A \mathrm{R}\Gamma(k;\mathbf{\Gamma}_W \otimes (M \otimes N)) \tag{2.13}$$

est inversible. En effet, on retrouve (2.12) en appliquant $\mathrm{R}\Gamma(k;-)$ à (2.13). Or, grâce à la proposition 2.8, le morphisme (2.13) s'identifie au morphisme

$$(\mathbf{\Gamma}_W \otimes M) \otimes_{\mathbf{\Gamma}_W} (\mathbf{\Gamma}_W \otimes N) \longrightarrow (\mathbf{\Gamma}_W \otimes (M \otimes N)),$$

et ce dernier est clairement inversible. ■

On termine la sous-section avec trois exemples classiques de cohomologies de Weil.

Exemple 2.10. — Lorsque k est de caractéristique nulle, on dispose d'une cohomologie de Weil Γ_{dR} à coefficients dans k appelée la cohomologie de de Rham. Elle est construite comme suit. On considère le complexe de préfaisceaux $\mathbf{\Omega}^\bullet$ sur Sm/k qui associe à un k-schéma lisse les sections globales de son complexe de de Rham algébrique, i.e., $\mathbf{\Omega}^\bullet(X) = \Gamma(X;\Omega^\bullet_{X/k})$ pour $X \in \mathrm{Sm}/k$. Le produit extérieur des formes différentielles fait de $\mathbf{\Omega}^\bullet$ un préfaisceau de dg-algèbres. Le préfaisceau Γ_{dR} est alors défini comme étant un remplacement ét-fibrant de $\mathbf{\Omega}^\bullet$. (On utilise ici l'existence d'une structure de modèles ét-locale sur les algèbres commutatives dans la catégorie des complexes de préfaisceaux sur Sm/k ; voir [**32**, Theorem 3.2].) Le T-spectre $\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{dR}}$ est étale localement équivalent niveau par niveau au T-spectre $\mathbf{\Omega}$ considéré dans [**5**, §2.3] et qui est donné en chaque niveau par le complexe de préfaisceaux $\mathbf{\Omega}^\bullet$. (Voir aussi [**15**, §3.1].) □

Exemple 2.11. — Étant donné un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$, on dispose d'une cohomologie de Weil Γ_{B} à coefficients dans Λ appelée la cohomologie de Betti. Pour expliquer la construction de Γ_{B}, on a besoin d'une digression.

Considérons l'espace topologique cocubique Σ-enrichi $\square_{\mathrm{top}}$ donné par $\square^n_{\mathrm{top}} = [0,1]^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. (Pour la notion d'objet cocubique Σ-enrichi, on renvoie le lecteur à [**5**, Définition A.12].) Pour un espace topologique E, on forme l'ensemble cubique Σ-enrichi $\mathcal{C}^0(\square_{\mathrm{top}}, E)$ des applications continues des $\square^n_{\mathrm{top}}$ dans E. On forme ensuite le Λ-module cocubique Σ-enrichi $\mathrm{fct}(\mathcal{C}^0(\square_{\mathrm{top}}, E), \Lambda)$ en prenant les espaces de fonctions à valeurs dans Λ. Enfin, on pose :

$$\mathrm{A}_{\mathrm{sing}}(E) = \mathrm{A}^\bullet(\mathrm{fct}(\mathcal{C}^0(\square_{\mathrm{top}}, E), \Lambda))$$

où $\mathrm{A}^\bullet(-)$ désigne le complexe alterné associé à un objet cocubique Σ-enrichi (voir [**5**, Définition A.20]). Par construction, le Λ-module cocubique Σ-enrichi $\mathrm{fct}(\mathcal{C}^0(\square_{\mathrm{top}}, E), \Lambda)$ est pseudo-monoïdal symétrique au sens de [**5**, Définition A.29]. Il découle de [**5**, Lemme A.30] que $\mathrm{A}_{\mathrm{sing}}(E)$ est une dg-algèbre commutative.

Ceci étant, le préfaisceau Γ_{B} associe à un k-schéma lisse X la dg-algèbre $\mathrm{A}_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C}))$. Le T-spectre $\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{B}}$ est quasi-isomorphe niveau par niveau au T-spectre $\mathrm{Bti}_*\mathbf{\Lambda}$, où Bti_* désigne l'adjoint à droite du foncteur de réalisation de Betti noté Bti^* ; voir [**5**, §2.1.2]. Il s'ensuit que Bti^* est naturellement isomorphe au foncteur de réalisation homologique $\mathrm{R}_{\mathrm{B}} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}(\Lambda)$ associé à Γ_{B} par le corollaire 2.9. Enfin, on rappelle qu'on dispose d'un modèle « explicite » du T-spectre $\mathrm{Bti}_*\mathbf{\Lambda}$ fourni par [**5**, Théorème 2.67]. □

Exemple 2.12. — Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k. En fixant une clôture séparable k^{sep}/k, on dispose d'une cohomologie de Weil Γ_ℓ à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$ appelée la cohomologie ℓ-adique. Une construction de Γ_ℓ est proposée dans [**15**, §3.3] et consiste à rendre fonctorielle la construction de Deligne du $\mathbb{Q}_\ell$-type d'homotopie d'un schéma [**16**, §5.2]. Cependant, l'argument dans [**15**, §3.3.3] nous semble incomplet. Voici une construction alternative de Γ_ℓ.

On commence par rappeler quelques notions tirées de [**19**] ; voir aussi [**25**, §5, §6] pour un résumé. On ne restreint pas la généralité en supposant que k est algébriquement clos. Un recouvrement étale rigidifié d'un k-schéma localement de type fini X (non nécessairement quasi-compact) est la donnée d'un morphisme étale $e : Y \longrightarrow X$ et d'une section ensembliste $\sigma_e : X(k) \longrightarrow Y(k)$ telle que l'application qui envoie $x \in X(k)$ sur la composante connexe de Y contenant $\sigma_e(x)$ est une bijection entre $X(k)$ et l'ensemble des composantes connexes de Y ; la section σ_e est appelée une rigidification de e. Un hyper-recouvrement rigidifié d'un k-schéma de type fini X est la donnée d'un hyper-recouvrement étale $Y_\bullet \longrightarrow X$ et, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, d'une rigidification du recouvrement étale $Y_p \longrightarrow \operatorname{cosk}^X_{p-1}(Y)_p$. La catégorie des hyper-recouvrements rigidifiés de X est notée $\mathrm{HRR}(X)$; elle est équivalente à un ensemble ordonné cofiltrant. Le type d'homotopie étale de X (comme défini par Friedlander [**19**]) est le pro-ensemble simplicial $(\pi_0(Y_\bullet))_{Y_\bullet \in \mathrm{HRR}(X)}$; on le note $\mathscr{H}_{\text{ét}}(X)$. L'association $X \rightsquigarrow \mathscr{H}_{\text{ét}}(X)$ est un foncteur de la catégorie des k-schémas localement de type fini dans celle des pro-ensembles simpliciaux.

Par ailleurs, à un pro-ensemble simplicial $E = (E^\alpha)_\alpha$, on peut associer une $\mathbb{Q}_\ell$-dg-algèbre $\mathrm{A}_\ell(E)$ de la manière suivante. Notons $E_{\mathrm{top}} = (E^\alpha_{\mathrm{top}})_\alpha$ la réalisation topologique de E qui est un donc un pro-CW complexe. On forme le pro-ensemble cubique Σ-enrichi $\mathcal{C}^0(\square_{\mathrm{top}}, E_{\mathrm{top}})$ et, pour $\nu \in \mathbb{N}$, on forme le $\mathbb{Z}/\ell^\nu$-module cocubique Σ-enrichi

$$\mathrm{fct}(\mathcal{C}^0(\square_{\mathrm{top}}, E_{\mathrm{top}}), \mathbb{Z}/\ell^\nu) = \operatorname*{colim}_{\alpha} \mathrm{fct}(\mathcal{C}^0(\square_{\mathrm{top}}, E^\alpha_{\mathrm{top}}), \mathbb{Z}/\ell^\nu).$$

(Pour les notations, voir l'exemple 2.11.) On pose ensuite

$$\widehat{\mathrm{fct}}(\mathcal{C}^0(\square_{\mathrm{top}}, E_{\mathrm{top}}), \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q} \otimes \lim_{\nu \in \mathbb{N}} \mathrm{fct}(\mathcal{C}^0(\square_{\mathrm{top}}, E_{\mathrm{top}}), \mathbb{Z}/\ell^\nu).$$

C'est un $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel cocubique Σ-enrichi. Par construction, il est aussi pseudo-monoïdal symétrique au sens de [**5**, Définition A.29]. Enfin, on pose :

$$\mathrm{A}_\ell(E) = \mathrm{A}^\bullet(\widehat{\mathrm{fct}}(\mathcal{C}^0(\square_{\mathrm{top}}, E_{\mathrm{top}}), \mathbb{Q}_\ell)).$$

D'après [**5**, Lemme A.30], $\mathrm{A}_\ell(E)$ est une $\mathbb{Q}_\ell$-dg-algèbre commutative. De plus, elle est fonctorielle en E.

Revenons à la construction de Γ_ℓ. Pour $X \in \mathrm{Sm}/k$, on pose $\Gamma_\ell(X) = \mathrm{A}_\ell(\mathscr{H}_{\text{ét}}(X))$. Il est facile de voir que le complexe $\Gamma_\ell(X)$ calcule la cohomologie ℓ-adique de X. On laisse au lecteur le soin de vérifier que la réalisation homologique $\mathrm{R}_\ell : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k; \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbb{Q}_\ell)$ associée à Γ_ℓ par le corollaire 2.9 est isomorphe, après restriction à $\mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathrm{ct}}(k; \mathbb{Q}_\ell)$, à la réalisation ℓ-adique construite par exemple dans [**4**, Définition 9.6]. □

2.2. Rappels sur les motifs rigides et leurs cohomologies. — Dans cette sous-section on fixe un corps k complet pour une valuation de hauteur 1. Soit S une k-variété analytique rigide. On dispose d'une catégorie triangulée de motifs rigides sur S à coefficients dans Λ, notée $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(S; \Lambda)$. Afin de fixer les notations, nous rappelons brièvement la construction de cette catégorie.

On commence d'abord par la variante effective, notée $\mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff},\text{ét}}(S; \Lambda)$. C'est une catégorie triangulée définie comme étant la catégorie homotopique de

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmRig}/S; \Lambda)) \tag{2.14}$$

munie de sa structure de modèles $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-locale. Ladite structure s'obtient à partir de la structure ét-locale par localisation de Bousfield suivant la classe des morphismes de la forme $\mathbb{B}^1_X \otimes \Lambda[n] \longrightarrow X \otimes \Lambda[n]$, pour $X \in \mathrm{SmRig}/S$ et $n \in \mathbb{Z}$. Les équivalences faibles de la structure $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-locales sont appelées les équivalences $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-locales. La catégorie (2.14) est monoïdale et sa structure monoïdale est compatible à ses deux structures de modèles susmentionnées. En particulier, la catégorie triangulée $\mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff},\text{ét}}(S; \Lambda)$ est monoïdale.

Passons maintenant à la variante stable, notée $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(S; \Lambda)$. C'est une catégorie triangulée définie comme étant la catégorie homotopique de

$$\mathbf{Spt}^\sharp_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmRig}/S; \Lambda))) \tag{2.15}$$

munie de sa structure de modèles $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-locale stable. Il y a plusieurs choix équivalents pour T, et dans cet article on prendra $T = T^{\text{rig}}$ ou $T = T^{\text{anr}}$ avec

$$T^{\text{rig}} = (\partial\mathbb{B}^1, 1) \otimes \Lambda[-1] \qquad \text{et} \qquad T^{\text{anr}} = (\mathbb{E}^{1,\text{anr}}, 1) \otimes \Lambda[-1]. \tag{2.16}$$

(Bien entendu, $\mathbb{E}^{1,\text{anr}}$ désigne la variété analytique rigide associée $\mathbb{E}^1$.) La catégorie (2.15) est celle des T-spectres commutatifs en complexes de préfaisceaux sur SmRig/S. La structure $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-locale stable est la structure projective stable sur (2.15) déduite de la structure $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-locale ; voir [**10**, Definition 4.16]. Les équivalences faibles de la structure $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-locale stable sont appelées les équivalences $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-locales stables. La catégorie (2.15) est monoïdale et sa structure monoïdale est compatible à la structure $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-locale stable d'après [**10**, Proposition 4.20]. En particulier, la catégorie triangulée $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(S\,;\Lambda)$ est monoïdale.

On dispose d'un foncteur de Quillen à gauche

$$\Sigma^{\infty}_{T,\sharp} : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmRig}/S\,;\Lambda)) \longrightarrow \mathbf{Spt}^{\sharp}_{T}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmRig}/S\,;\Lambda))) \tag{2.17}$$

qui à un complexe de préfaisceaux F associe le T-spectre de suspension infinie $\Sigma^{\infty}_{T,\sharp}(F) = \{\mathrm{S}^n(T) \otimes F\}_{n\in\mathbb{N}}$. Le foncteur (2.17) est monoïdal et il induit un foncteur triangulé

$$\Sigma^{\infty}_{T,\sharp} : \mathbf{RigDA}^{\text{eff},\text{ét}}(S\,;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(S\,;\Lambda) \tag{2.18}$$

qui est aussi monoïdal.

Remarque 2.13. — Plus tard et notamment dans la sous-section 3.1, on aura aussi besoin des variantes avec transferts des catégories $\mathbf{RigDA}^{\text{eff},\text{ét}}(S\,;\Lambda)$ et $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(S\,;\Lambda)$ introduites ci-dessus. Ces catégories sont notées respectivement

$$\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(S\,;\Lambda) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{RigDM}(S\,;\Lambda).$$

La catégorie $\mathbf{RigDM}^{(\text{eff})}(S\,;\Lambda)$ est construite de la même manière que $\mathbf{RigDA}^{(\text{eff},)\,\text{ét}}(S\,;\Lambda)$ en utilisant les préfaisceaux avec transferts sur SmRig/S au lieu des préfaisceaux ordinaires, i.e., en remplaçant partout dans la construction « $\mathbf{PSh}(\mathrm{SmRig}/S\,;\Lambda)$ » par « $\mathbf{PST}(\mathrm{SmRig}/S\,;\Lambda)$ ». Lorsque S est normal, on dispose d'une équivalence de catégories $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(S\,;\Lambda) \simeq \mathbf{RigDM}(S\,;\Lambda)$; voir [**12**, Theorem 3.8]. □

Remarque 2.14. — Comme dans le cas des motifs algébriques, la catégorie $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(S\,;\Lambda)$ est originellement construite en utilisant les T-spectres symétriques. Comme dans la remarque 2.2, le théorème 2.3 entraîne que l'approche via les T-spectres commutatifs et celle via les T-spectres symétriques mènent à des catégories de motifs rigides équivalentes. (En effet, la validité de la condition (i) du théorème 2.3 pour les objets (2.16) découle de la validité de la même condition pour l'objet (2.3).) □

Dans la suite de la sous-section, on se restreint au cas où $S = \mathrm{Spm}(k)$. On peut facilement adapter la définition d'une cohomologie de Weil au contexte rigide.

Définition 2.15. — *Soit A une $\mathbb{Q}$-algèbre. Une* cohomologie de Weil rigide à coefficients dans A *(on dira aussi* définie sur A*) est un préfaisceau de A-dg-algèbres Γ_W sur* SmRig/k *vérifiant les conditions suivantes.*

(1) Le morphisme unité $A \longrightarrow \Gamma_W(X)$ est un quasi-isomorphisme pour $X = \mathrm{Spm}(k)$ et $X = \mathbb{B}^1$.
(2) Le complexe de A-modules $\Gamma_W(\mathbb{P}^{1,\text{anr}}, \infty)$ est quasi-isomorphe à $A[-2]$.
(3) (Formule de Künneth) Pour tout $X, Y \in \mathrm{SmRig}/k$, le morphisme évident

$$\Gamma_W(X) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A \Gamma_W(Y) \longrightarrow \Gamma_W(X \times_k Y)$$

est un quasi-isomorphisme.
(4) Le complexe de préfaisceaux Γ_W est fibrant pour la topologie étale (i.e., admet la descente étale).

Étant donnée une cohomologie de Weil rigide Γ_W, on pose $\mathrm{H}^*_W(X) = \mathrm{H}^*(\Gamma_W(X))$ pour $X \in \mathrm{SmRig}/k$.

Remarque 2.16. — Il découle des conditions (1) et (4) de la définition 2.15 que le morphisme unité $A \longrightarrow \Gamma_W(\mathbb{A}^{1,\text{anr}})$ est aussi un quasi-isomorphisme. En particulier, une cohomologie de Weil rigide Γ_W définit, par restriction suivant le foncteur d'analytification $(-)^{\text{anr}} : \mathrm{Sm}/k \longrightarrow \mathrm{SmRig}/k$, une cohomologie de Weil au sens de la définition 1.1. □

On fixe une cohomologie de Weil rigide Γ_W à coefficients dans une Λ-algèbre A. Comme dans la sous-section 2.1, nous allons maintenant expliquer comment représenter la théorie cohomologique Γ_W dans les catégories de motifs rigides. On commence avec une remarque évidente.

Remarque 2.17. — La cohomologie de Weil rigide Γ_W, vue comme un complexe de préfaisceaux sur SmRig/k, définit un objet de $\mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff,\acute{e}t}}(k;\Lambda)$. En fait, le complexe de préfaisceaux Γ_W est $(\mathbb{B}^1, \mathrm{\acute{e}t})$-fibrant comme il découle aussitôt de la définition 2.15. Il s'ensuit que $\Gamma_W \in \mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff,\acute{e}t}}(k;\Lambda)$ représente la théorie cohomologique Γ_W au sens suivant : il existe un quasi-isomorphisme

$$\Gamma_W(X) \simeq \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff,\acute{e}t}}(k;\Lambda)}(\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(X), \Gamma_W) \tag{2.19}$$

naturel en $X \in \mathrm{SmRig}/k$. (Bien entendu, $\mathrm{M}^{\mathrm{eff}}(X)$ est le motif effectif associé à X, i.e., le préfaisceau $X \otimes \Lambda[0]$ considéré comme un objet de $\mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff,\acute{e}t}}(k;\Lambda)$.) □

Construction 2.18. — On associe à la cohomologie de Weil rigide Γ_W un T-spectre $\mathbf{\Gamma}_W$ sur SmRig/k de la manière suivante. En niveau $n \in \mathbb{N}$, le T-spectre $\mathbf{\Gamma}_W$ est donné par le complexe de préfaisceaux $\Gamma_W(n)$. Le A-module libre $\mathrm{H}^2_W(\mathbb{P}^{1,\mathrm{anr}})(1) \simeq \mathrm{H}^1_W(\mathbb{E}^{1,\mathrm{anr}})(1) \simeq \mathrm{H}^1_W(\partial\mathbb{B}^1)(1)$ admet un générateur canonique, et on fixe un morphisme de complexes de préfaisceaux $\gamma : T \longrightarrow \Gamma_W(1)$ qui représente ce générateur. Le morphisme d'assemblage en niveau n du T-spectre $\mathbf{\Gamma}_W$ est alors le morphisme composé

$$\gamma_n : T \otimes \Gamma_W(n) \xrightarrow{\gamma} \Gamma_W(1) \otimes \Gamma_W(n) \xrightarrow{\mu} \Gamma_W(n+1)$$

où μ désigne la multiplication de Γ_W. Étant donné que l'algèbre Γ_W est supposée commutative, il découle aussitôt de la construction que le T-spectre $\mathbf{\Gamma}_W$ est commutatif. De plus, $\mathbf{\Gamma}_W$ est une algèbre commutative de la catégorie monoïdale (2.15) (avec $S = \mathrm{Spm}(k)$) et définit donc une algèbre commutative dans la catégorie monoïdale $\mathbf{RigDA}^{\mathrm{\acute{e}t}}(k;\Lambda)$. □

Remarque 2.19. — Le T-spectre commutatif $\mathbf{\Gamma}_W$ est stablement $(\mathbb{B}^1, \mathrm{\acute{e}t})$-fibrant : on a déjà vu dans la remarque 2.17 qu'il était $(\mathbb{B}^1, \mathrm{\acute{e}t})$-fibrant niveau par niveau, et il découle des conditions (2) et (3) de la définition 2.15 que $\mathbf{\Gamma}_W$ est un Ω-spectre. Il s'ensuit que $\mathbf{\Gamma}_W \in \mathbf{RigDA}^{\mathrm{\acute{e}t}}(k;\Lambda)$ représente la théorie cohomologique Γ_W au sens suivant : il existe un quasi-isomorphisme

$$\Gamma_W(X) \simeq \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{RigDA}^{\mathrm{\acute{e}t}}(k;\Lambda)}(\mathrm{M}(X), \mathbf{\Gamma}_W) \tag{2.20}$$

naturel en $X \in \mathrm{SmRig}/k$. (Bien entendu, $\mathrm{M}(X)$ est le motif associé à X, i.e., le T-spectre $\Sigma^\infty_{T,\sharp}(X \otimes \Lambda[0])$ considéré comme un objet de $\mathbf{RigDA}^{\mathrm{\acute{e}t}}(k;\Lambda)$.) □

On peut également associer à Γ_W une réalisation homologique.

Proposition 2.20. — *Soit R un objet de $\mathbf{RigDA}^{\mathrm{\acute{e}t}}(k;\Lambda)$ muni d'une structure de $\mathbf{\Gamma}_W$-module. Alors, la composition de*

$$\mathbf{\Gamma}_W \otimes_A \mathrm{R}\Gamma(k;R) \longrightarrow \mathbf{\Gamma}_W \otimes_A R \longrightarrow R \tag{2.21}$$

est un isomorphisme. (La première flèche est induite par le morphisme évident $\Sigma^\infty_{T,\sharp}\mathrm{R}\Gamma(k;R)_{\mathrm{cst}} \longrightarrow R$ et la seconde flèche est donnée par l'action de $\mathbf{\Gamma}_W$ sur R.)

Démonstration. — Il s'agit de la variante analytique rigide de la proposition 2.8. La preuve de [**11**, Proposition 2.11] et l'esquisse de preuve de la proposition 2.8 s'étendent littéralement au contexte rigide. ■

Corollaire 2.21. — *L'association $M \rightsquigarrow \mathrm{R}\Gamma(k; \mathbf{\Gamma}_W \otimes M)$ s'étend en un foncteur monoïdal*

$$\mathrm{R}_W : \mathbf{RigDA}^{\mathrm{\acute{e}t}}(k;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}(A). \tag{2.22}$$

(C'est la réalisation homologique associée à Γ_W.)

Démonstration. — Il s'agit de la variante analytique rigide du corollaire 2.9 qui découle de la proposition 2.20 de la même manière que ledit corollaire découle de la proposition 2.8. ■

On termine la sous-section avec deux exemples classiques de cohomologies de Weil rigides.

Exemple 2.22. — Lorsque k est de caractéristique nulle, on dispose d'une cohomologie de Weil rigide $\Gamma^\dagger_{\mathrm{dR}}$ à coefficients dans k appelée la cohomologie de de Rham surconvergente $\Gamma^\dagger_{\mathrm{dR}}$ (voir Groß-Klönne [**22**]). Pour la construire, nous reposons sur un travail de Vezzani [**30**]. Notons $\mathrm{SmRig}^\dagger/k$ la catégorie des k-variétés analytiques rigides lisses avec structure de surconvergence (au sens de Groß-Klönne [**21**, §2]). On dispose d'un complexe de de Rham surconvergent $\Omega^{\bullet}$ sur $\mathrm{SmRig}^{\dagger}/k$. Soit Γ_{dR} un remplacement ét-fibrant de $\Omega^{\bullet}$ considéré comme une algèbre commutative dans la catégorie monoïdale

$$\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmRig}^{\dagger}/k;k)). \tag{2.23}$$

(On utilise ici [**32**, Theorem 3.2].) Alors, Γ_{dR} est une cohomologie de Weil rigide sur $\mathrm{SmRig}^{\dagger}/k$, i.e., satisfait aux conditions de la définition 2.15 en remplaçant « SmRig/k » par « $\mathrm{SmRig}^{\dagger}/k$ ». (La formule de Künneth pour Γ_{dR} est établie dans [**21**, Theorem 4.12].) En particulier, le complexe de préfaisceaux Γ_{dR} est $(\mathbb{B}^1,\text{ét})$-fibrant. (Bien entendu, $\mathbb{B}^1$ est muni de sa structure de surconvergence évidente induite par l'inclusion $\mathbb{B}^1 \subset \mathbb{A}^{1,\mathrm{anr}}$.)

On dispose d'un foncteur $l : \mathrm{SmRig}^{\dagger}/k \longrightarrow \mathrm{SmRig}/k$ donné par l'oubli de la structure de surconvergence. Ce foncteur induit une adjonction de Quillen

$$l^* : \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmRig}^{\dagger}/k;k)) \rightleftarrows \mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmRig}/k;k)) : l_*. \tag{2.24}$$

relativement aux structures $(\mathbb{B}^1,\text{ét})$-locales et, d'après [**30**, Theorem 4.23], cette adjonction est en fait une équivalence de Quillen, i.e., induit une équivalence

$$\mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff},\,\text{ét}}(k;k) \simeq \mathbf{RigDA}^{\mathrm{eff},\,\text{ét},\,\dagger}(k;k) \tag{2.25}$$

entre les catégories de motifs rigides construites à partir de SmRig/k et $\mathrm{SmRig}^{\dagger}/k$. Ceci étant, il est naturel de prendre pour $\Gamma^{\dagger}_{\mathrm{dR}}$ un remplacement $(\mathbb{B}^1,\text{ét})$-fibrant de $l^*(\Omega^{\bullet})_{\mathrm{cof}}$, où $(\Omega^{\bullet})_{\mathrm{cof}}$ désigne un remplacement cofibrant de $\Omega^{\bullet}$. (Bien entendu, les remplacements fibrants et cofibrants sont pris dans les catégories d'algèbres commutatives, ce qui est possible grâce à [**32**, Theorem 3.2, Proposition 3.5].) Par construction, l'équivalence de catégories (2.25) échange $\Gamma^{\dagger}_{\mathrm{dR}}$ et Γ_{dR}. Ceci entraîne que $\Gamma^{\dagger}_{\mathrm{dR}}$ est une cohomologie de Weil rigide et que, pour $X \in \mathrm{SmRig}/k$, le complexe $\Gamma^{\dagger}_{\mathrm{dR}}(X)$ calcule bien la cohomologie de de Rham surconvergente de X (comme définie dans [**22**]). □

Exemple 2.23. — Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique résiduelle de k. En fixant une clôture séparable k^{sep}/k, on dispose d'une cohomologie de Weil rigide Γ_{ℓ} à coefficients dans $\mathbb{Q}_{\ell}$ appelée la cohomologie ℓ-adique. On peut construire Γ_{ℓ} en adaptant la construction donnée dans l'exemple 2.12. Les détails sont laissés au lecteur. □

2.3. Foncteurs entre motifs algébriques et motifs rigides. — Nous rappelons ici la construction de certains foncteurs entre motifs algébriques et motifs rigides. Tout au long de la sous-section, on fixe un corps K muni d'une valuation de hauteur 1 et on note $\widehat{K}$ son complété. On désigne par K° et $\widehat{K}^{\circ}$ les anneaux de valuation de K et $\widehat{K}$, et on note k le corps résiduel de K° qu'on identifie à celui de $\widehat{K}^{\circ}$.

On dispose d'un foncteur d'analytification

$$\mathrm{Rig} : \mathrm{Sm}/K \longrightarrow \mathrm{SmRig}/\widehat{K} \tag{2.26}$$

qui envoie un K-schéma lisse X sur la $\widehat{K}$-variété analytique rigide associée à $X \otimes_K \widehat{K}$ et qu'on notera simplement X^{anr}. Ce foncteur induit une adjonction de Quillen

$$\mathrm{Rig}^* : \mathbf{Spt}^{\sharp}_{T}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/K;\Lambda))) \rightleftarrows \mathbf{Spt}^{\sharp}_{T^{\mathrm{anr}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmRig}/\widehat{K};\Lambda))) : \mathrm{Rig}_* \tag{2.27}$$

relativement aux structures $(\mathbb{A}^1,\text{ét})$-locale et $(\mathbb{B}^1,\text{ét})$-locale stables. En passant aux catégories homotopiques, on obtient donc une adjonction triangulée

$$\mathrm{Rig}^* : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\Lambda) \rightleftarrows \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) : \mathrm{Rig}_*. \tag{2.28}$$

Les foncteurs Rig^* dans (2.27) et (2.28) sont monoïdaux, et leurs adjoints à droite Rig_* sont donc pseudo-monoïdaux. Dans la construction ci-dessous, on généralise l'adjonction de Quillen (2.27) à des catégories de modules ; cette généralisation jouera un rôle clef dans la suite.

Construction 2.24. — On suppose donnés :

- une algèbre commutative $\mathbf{R}$ dans la catégorie monoïdale des T-spectres commutatifs sur Sm/K (i.e., dans la source de l'adjonction (2.27)),

– une algèbre commutative $\mathbf{R}'$ dans la catégorie monoïdale des T^{anr}-spectres commutatifs sur $\mathrm{SmRig}/\widehat{K}$ (i.e., dans le but de l'adjonction (2.27)),
– un morphisme d'algèbres $\theta : \mathrm{Rig}^*(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}'$.

On dispose alors d'un couple de foncteurs adjoints

$$^{\theta}\mathrm{Rig}^* : \mathbf{Mod}(\mathbf{R}) \rightleftarrows \mathbf{Mod}(\mathbf{R}') : {}^{\theta}\mathrm{Rig}_* \tag{2.29}$$

où le foncteur $^{\theta}\mathrm{Rig}^*$ envoie un $\mathbf{R}$-module $\mathbf{M}$ sur le $\mathbf{R}'$-module $\mathbf{R}' \otimes_{\mathrm{Rig}^*(\mathbf{R})} \mathrm{Rig}^*(\mathbf{M})$. En fait, grâce à [**32**, Theorem 3.2, Theorem 4.1], les catégories $\mathbf{Mod}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{Mod}(\mathbf{R}')$ héritent des structures de modèles $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale et $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-locale stables, et l'adjonction (2.29) est alors de Quillen. On pose :

$$\mathbf{DA}^{\text{ét}}(K; \mathbf{R}) = \mathbf{Ho}_{\mathbb{A}^1\text{-ét-st}}(\mathbf{Mod}(\mathbf{R})) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K}; \mathbf{R}') = \mathbf{Ho}_{\mathbb{B}^1\text{-ét-st}}(\mathbf{Mod}(\mathbf{R}')). \tag{2.30}$$

L'adjonction de Quillen (2.29) induit ainsi une adjonction triangulée

$$^{\theta}\mathrm{Rig}^* : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K; \mathbf{R}) \rightleftarrows \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K}; \mathbf{R}') : {}^{\theta}\mathrm{Rig}_*. \tag{2.31}$$

Les foncteurs $^{\theta}\mathrm{Rig}^*$ dans (2.29) et (2.31) sont monoïdaux, et leurs adjoints à droite $^{\theta}\mathrm{Rig}_*$ sont donc pseudo-monoïdaux. □

Situation 2.25. — Plus tard, nous utiliserons la construction 2.24 avec un choix particulier des données $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$ et θ, que nous décrivons maintenant. On prendra $\mathbf{R} = \mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}$ et $\mathbf{R}' = \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}$, où $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}$ désigne un remplacement stablement $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-fibrant de l'objet unité $\Sigma^{\infty}_{T^{\mathrm{anr}}, \sharp}(\Lambda_{\mathrm{cst}})$ vu comme algèbre commutative. On prendra pour θ le morphisme de counité

$$\delta : \mathrm{Rig}^*\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}} \longrightarrow \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}.$$

Étant donné que l'algèbre $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}$ est $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-localement stablement équivalente à l'objet unité, il découle de [**32**, Theorem 4.1(2)] que la catégorie $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K}, \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}})$ est équivalente à $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K}, \Lambda)$. L'adjonction (2.31) induit donc une adjonction triangulée

$$\widetilde{\mathrm{Rig}}^* : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K; \mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}) \rightleftarrows \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K}; \Lambda) : \widetilde{\mathrm{Rig}}_* \tag{2.32}$$

avec $\widetilde{\mathrm{Rig}}^*$ la composition de $^{\delta}\mathrm{Rig}^*$ et l'équivalence susmentionnée. Le foncteur $\widetilde{\mathrm{Rig}}^*$ est monoïdal et son adjoint à droite $\widetilde{\mathrm{Rig}}_*$ est donc pseudo-monoïdal. □

On passe maintenant à la construction d'un autre foncteur reliant motifs algébriques et motifs rigides, à savoir le foncteur « relèvement ». La construction de ce foncteur passe par la catégorie $\mathbf{FDA}^{\text{ét}}(\widehat{K}; \Lambda)$ des motifs de $\widehat{K}^{\circ}$-schémas formels qu'on rappelle d'abord. Soit $\mathrm{SmF}/\widehat{K}^{\circ}$ la catégorie des $\widehat{K}^{\circ}$-schémas formels, adiques et lisses qu'on munit de la topologie étale. On note $\mathbb{B}^{1,\circ}$ et $\partial\mathbb{B}^{1,\circ}$ les complétés formels adiques des K°-schémas $\mathbb{A}^1_{K^{\circ}}$ et $\mathbb{E}^1_{K^{\circ}}$. La catégorie $\mathbf{FDA}^{\text{ét}}(\widehat{K}; \Lambda)$ est définie comme étant la catégorie homotopique de

$$\mathbf{Spt}^{\sharp}_{T^{\mathrm{rig},\circ}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmF}/\widehat{K}^{\circ}; \Lambda))) \tag{2.33}$$

munie de sa structure $(\mathbb{B}^{1,\circ}, \text{ét})$-locale stable, avec

$$T^{\mathrm{rig},\circ} = (\partial\mathbb{B}^{1,\circ}, 1) \otimes \Lambda[-1]. \tag{2.34}$$

On dispose de deux foncteurs

$$\eta : \mathrm{SmF}/\widehat{K}^{\circ} \longrightarrow \mathrm{SmRig}/\widehat{K} \qquad \text{et} \qquad \sigma : \mathrm{SmF}/\widehat{K}^{\circ} \longrightarrow \mathrm{Sm}/k$$

qui à un $\widehat{K}^{\circ}$-schéma formel adique lisse $\mathcal{X}$ associent sa fibre générique $\mathcal{X}_{\eta}$ et sa fibre spéciale $\mathcal{X}_{\sigma}$ respectivement. Ces foncteurs induisent des adjonctions de Quillen

$$\eta^* : \mathbf{Spt}^{\sharp}_{T^{\mathrm{rig},\circ}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmF}/\widehat{K}^{\circ}; \Lambda))) \rightleftarrows \mathbf{Spt}^{\sharp}_{T^{\mathrm{rig}}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmRig}/\widehat{K}; \Lambda))) : \eta_* \tag{2.35}$$

$$\text{et} \quad \sigma^* : \mathbf{Spt}^{\sharp}_{T^{\mathrm{rig},\circ}}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmF}/\widehat{K}^{\circ}; \Lambda))) \rightleftarrows \mathbf{Spt}^{\sharp}_{T}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/k; \Lambda))) : \sigma_* \tag{2.36}$$

relativement aux structures $(\mathbb{B}^{1,\circ}, \text{ét})$-locale, $(\mathbb{B}^1, \text{ét})$-locale et $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$-locale stables. En passant aux catégories homotopiques, on obtient deux adjonctions triangulées

$$\eta^* : \mathbf{FDA}^{\text{ét}}(\widehat{K}^{\circ}; \Lambda) \rightleftarrows \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K}; \Lambda) : \eta_* \quad \text{et} \quad \sigma^* : \mathbf{FDA}^{\text{ét}}(\widehat{K}^{\circ}; \Lambda) \rightleftarrows \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k; \Lambda) : \sigma_*. \tag{2.37}$$

Les foncteurs η^* et σ^* ci-dessus sont monoïdaux. La construction du foncteur « relèvement » repose sur le résultat suivant.

Proposition 2.26. — *L'adjonction* (2.36) *est une équivalence de Quillen. En particulier, le foncteur*

$$\sigma_* : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{FDA}^{\text{ét}}(\widehat{K}^\circ;\Lambda)$$

est une équivalence monoïdale.

Démonstration. — Il s'agit d'un cas particulier de [**8**, Corollaire 1.4.24]. ∎

Notation 2.27. — La composition de

$$\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \xrightarrow[\sim]{\sigma_*} \mathbf{FDA}^{\text{ét}}(\widehat{K}^\circ;\Lambda) \xrightarrow{\eta^*} \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$$

est le foncteur « relèvement » qu'on note rel : $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$. Ce foncteur est monoïdal d'après la proposition 2.26. □

2.4. Une équivalence remarquable. — On garde les notations et les hypothèses de la sous-section 2.3. Notre but ici est de démontrer le résultat remarquable suivant qui est aussi un ingrédient principal de la construction de la nouvelle cohomologie de Weil $\Gamma_{\text{new}}(-/K)$ (voir le théorème 1.5 de l'introduction).

Théorème 2.28. — *Reprenons les notations de la situation 2.25. L'adjonction*

$$^{\delta}\text{Rig}^* : \mathbf{Mod}(\text{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\text{fib}}) \rightleftarrows \mathbf{Mod}(\mathbf{\Lambda}_{\text{fib}}) : {}^{\delta}\text{Rig}_* \tag{2.38}$$

est une équivalence de Quillen. En particulier, le foncteur

$$\widetilde{\text{Rig}}_* : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\text{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\text{fib}})$$

est une équivalence monoïdale.

Pour la preuve du théorème 2.28, on utilise le résultat suivant.

Lemme 2.29. — *(Formule de coprojection) Le morphisme évident*

$$(\text{Rig}_*M') \otimes N \longrightarrow \text{Rig}_*(M' \otimes \text{Rig}^*N) \tag{2.39}$$

est un isomorphisme pour tout $M' \in \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$ *et* $N \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\Lambda)$.

Démonstration. — On se ramène aussitôt au cas où N est constructible, et donc fortement dualisable d'après [**29**] (voir aussi [**8**, Lemme 1.3.29]). Le résultat recherché est alors une conséquence formelle du fait que Rig^* est monoïdal, voir [**5**, Lemme 2.8]. ∎

Proposition 2.30. — *Le foncteur* $\widetilde{\text{Rig}}^*$ *dans* (2.32) *est pleinement fidèle.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que le morphisme d'unité

$$E \longrightarrow {}^{\delta}\text{Rig}_*{}^{\delta}\text{Rig}^*E \tag{2.40}$$

est un isomorphisme pour tout $E \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\text{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\text{fib}})$. Il suffit de montrer cela pour E appartenant à une classe d'objets qui engendre la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\text{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\text{fib}})$. On peut donc supposer que $E = (\text{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\text{fib}}) \otimes N$ pour un certain $N \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\Lambda)$. Dans ce cas, le morphisme (2.40) s'identifie au morphisme de coprojection

$$(\text{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\text{fib}}) \otimes N \longrightarrow \text{Rig}_*(\mathbf{\Lambda}_{\text{fib}} \otimes \text{Rig}^*N)$$

qui est bien inversible d'après le lemme 2.29. ∎

Pour terminer la preuve du théorème 2.28, il reste à voir que l'image du foncteur $\widetilde{\text{Rig}}^*$ engendre toute la catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$. Or, la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies engendrée par l'image de $\widetilde{\text{Rig}}^*$ coïncide avec celle engendrée par l'image du foncteur Rig^* (dans (2.28)). Le théorème 2.28 découle donc du résultat suivant.

Proposition 2.31. — *La catégorie triangulée avec sommes infinies* $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$ *est engendrée par l'image du foncteur* $\text{Rig}^* : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$.

Démonstration. — Afin de faciliter les références, nous utiliserons dans cette preuve les motifs avec transferts (voir les remarques 2.1 et 2.13). Étant données les équivalences de catégories

$$\mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\Lambda) \simeq \mathbf{DM}(K;\Lambda) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \simeq \mathbf{RigDM}(\widehat{K};\Lambda),$$

il suffit de démontrer la proposition pour les motifs effectifs avec transferts. Lorsque $K = \widehat{K}$, il s'agit de [**8**, Théorème 2.5.35]. Le cas plus général dont on a besoin n'est guère plus difficile et on se contente de survoler la preuve de [**8**, Théorème 2.5.35] en signalant les quelques modifications qu'il faut apporter.

On note provisoirement $\mathcal{S}(K) \subset \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(\widehat{K};\Lambda)$ la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies engendrée par l'image de Rig^* ou, ce qui revient au même, par les motifs effectifs de la forme $\mathrm{M}^{\text{eff}}(X^{\text{anr}})$ avec X un K-schéma projectif et lisse. D'après [**8**, Théorème 2.5.34], il suffit de montrer que $\mathrm{M}^{\text{eff}}(U)$ appartient à $\mathcal{S}(K)$ pour U une $\widehat{K}$-variété rigide quasi-compacte admettant potentiellement bonne réduction. On raisonne par récurrence sur la dimension de U.

Soit L/K une extension finie séparable. Posons $\widehat{L} = \widehat{K} \otimes_K L$; c'est une $\widehat{K}$-algèbre étale, qui s'écrit donc comme un produit fini de corps valués complets $\widehat{L} = \prod_{i\in I} \widehat{L}_i$. Chaque $\widehat{L}_i$ contient une copie L_i de L et s'identifie en fait à la complétion de L_i pour une valuation qui étend celle de K. On se ramène facilement à montrer que le motif effectif $\mathrm{M}^{\text{eff}}(U \otimes_{\widehat{K}} \widehat{L}) \in \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(\widehat{L};\Lambda)$ est dans la sous-catégorie triangulée avec sommes infinies $\mathcal{S}(L) \subset \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(\widehat{L};\Lambda)$ engendrée par l'image de $\text{Rig}^* : \mathbf{DM}^{\text{eff}}(L;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(\widehat{L};\Lambda)$. (Remarquer que le foncteur $(\widehat{L}/L)_\sharp$ envoie $\mathcal{S}(L)$ dans $\mathcal{S}(K)$.) Il revient au même de montrer que le motif effectif $\mathrm{M}^{\text{eff}}(U \otimes_{\widehat{K}} \widehat{L}_i) \in \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(\widehat{L}_i;\Lambda)$ est dans la sous-catégorie $\mathcal{S}(L_i)$, i.e., il est loisible de remplacer K par les L_i et $\widehat{K}$ par $\widehat{L}$. De même, si K'/K est une extension finie purement inséparable, on peut aussi remplacer K par K' et $\widehat{K}$ par $\widehat{K'}$; voir [**8**, Page 335] pour un argument. Au final, ceci montre qu'il est loisible de remplacer K par L, pour une extension finie quelconque L/K, quitte à considérer tous les prolongements possibles de la valuation de K à L. Comme application de ce principe, on peut supposer que U admet bonne réduction, i.e., qu'il existe un isomorphisme $U \simeq \mathcal{U}_\eta$ avec $\mathcal{U}$ un $\widehat{K}^\circ$-schéma formel lisse.

Comme dans l'étape 1 de la preuve de [**8**, Théorème 2.5.35], on se ramène au cas où la valuation de K est discrète. L'étape 2 de la preuve de [**8**, Théorème 2.5.35] s'étend littéralement et permet de remplacer $\mathcal{U}_\eta$ par $(\mathcal{U} \smallsetminus Z)_\eta$ pour un tout fermé $Z \subset \mathcal{U}_\sigma$ de codimension partout non nulle. (Ceci utilise l'hypothèse de récurrence sur la dimension de U.) Dans l'étape 3 de la preuve de [**8**, Théorème 2.5.35], on fera attention à choisir les polynômes $f_i \in \widehat{K}^\circ[t_1,\cdots,t_n,u_1,\cdots,u_r]$ à coefficients dans K°, ce qui est clairement possible. Le reste de l'étape 3 s'étend alors pour fournir un K°-schéma projectif X à réduction semi-stable de type $(1,\cdots,1)$ et tel que $\mathcal{U}$ est un ouvert lisse du complété adique $\mathcal{X}$ de X. Grâce à l'étape 2, on peut même supposer que $\mathcal{U}$ est le lieu lisse de $\mathcal{X}$. L'étape 4 de la preuve de [**8**, Théorème 2.5.35] s'étend alors littéralement et permet de conclure. ■

2.5. Constructions principales. — On garde les hypothèses et les notations de la sous-section 2.3. On utilise ici le théorème 2.28 pour construire certains foncteurs monoïdaux de $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$ à valeurs dans des catégories de modules sur des dg-algèbres commutatives. Pour cela, on doit d'abord généraliser la construction de la réalisation homologique associée à une cohomologie de Weil.

Construction 2.32. — Soit Γ_W (resp. $\Gamma_{W'}$) une cohomologie de Weil (resp. de Weil rigide) à coefficients dans une Λ-algèbre A (resp. A') définie sur Sm/K (resp. $\mathrm{SmRig}/\widehat{K}$). Soit $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{R}'$) une algèbre commutative dans

$$\mathbf{Spt}^\sharp_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/K;\Lambda))) \qquad (\text{resp.} \quad \mathbf{Spt}^\sharp_T(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{SmRig}/K;\Lambda)))).$$

On fixe un remplacement cofibrant $(\mathbf{\Gamma}_W)_{\text{cof}}$ (resp. $(\mathbf{\Gamma}_{W'})_{\text{cof}}$) de l'algèbre commutative $\mathbf{\Gamma}_W$ (resp. $\mathbf{\Gamma}_{W'}$), et on fixe ensuite un remplacement $(\mathbb{A}^1,\text{ét})$-fibrant (resp. un remplacement $(\mathbb{B}^1,\text{ét})$-fibrant) $\mathbf{\Gamma}_{W,\mathbf{R}}$ (resp. $\mathbf{\Gamma}_{W',\mathbf{R}'}$) de l'algèbre commutative $(\mathbf{\Gamma}_W)_{\text{cof}} \otimes \mathbf{R}_{\text{cof}}$ (resp. $(\mathbf{\Gamma}'_W)_{\text{cof}} \otimes \mathbf{R}'_{\text{cof}}$). On pose :

$$B = \Gamma(K;\mathbf{\Gamma}_{W,\mathbf{R}}) \qquad (\text{resp.} \quad B' = \Gamma(\widehat{K};\mathbf{\Gamma}_{W',\mathbf{R}'})).$$

Par construction, B (resp. B') est une Λ-dg-algèbre commutative et, en tant qu'objet de $\mathbf{D}(A)$ (resp. $\mathbf{D}(A')$), elle est donnée par la réalisation homologique $\mathrm{R}_W(\mathbf{R})$ (resp. $\mathrm{R}_{W'}(\mathbf{R}')$) de $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{R}'$). On dispose d'une adjonction de Quillen

$$\mathbf{\Gamma}_{W^{(\prime)},\mathbf{R}^{(\prime)}} \otimes_{\mathbf{R}^{(\prime)}} - : \mathbf{Mod}(\mathbf{R}^{(\prime)}) \rightleftarrows \mathbf{Mod}(\mathbf{\Gamma}_{W^{(\prime)},\mathbf{R}^{(\prime)}}) : \mathrm{Oub} \tag{2.41}$$

et le foncteur $\mathbf{\Gamma}_{W^{(\prime)},\mathbf{R}^{(\prime)}} \otimes_{\mathbf{R}^{(\prime)}} -$ est monoïdal. On dispose d'une autre adjonction de Quillen

$$\mathbf{\Gamma}_{W^{(\prime)},\mathbf{R}^{(\prime)}} \otimes_{B^{(\prime)}} - : \mathbf{Mod}(B^{(\prime)}) \rightleftarrows \mathbf{Mod}(\mathbf{\Gamma}_{W^{(\prime)},\mathbf{R}^{(\prime)}}) : \mathrm{R}\Gamma(K;-) \quad (\text{resp. } \mathrm{R}\Gamma(\widehat{K};-)) \tag{2.42}$$

et le foncteur $\mathbf{\Gamma}_{W^{(\prime)},\mathbf{R}^{(\prime)}} \otimes_{B^{(\prime)}} -$ est monoïdal. En fait, il découle aussitôt de la proposition 2.8 (resp. la proposition 2.20) que l'adjonction (2.42) est une équivalence de Quillen. Ceci étant, on définit un foncteur monoïdal

$$\mathrm{R}_{W,\mathbf{R}} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(B)) \tag{2.43}$$

en prenant la composition de

$$\mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathbf{R}) \xrightarrow{\mathbf{\Gamma}_{W,\mathbf{R}}\otimes_{\mathbf{R}}-} \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathbf{\Gamma}_{W,\mathbf{R}}) \xrightarrow{\mathrm{R}\Gamma(K;-)} \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(B)).$$

(De même, dans le cas respé, on définit un foncteur monoïdal

$$\mathrm{R}_{W',\mathbf{R}'} : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\mathbf{R}') \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(B')) \tag{2.44}$$

en prenant la composition analogue.) □

On note le résultat technique suivant.

Lemme 2.33. — *On reprend les hypothèses et les notations des constructions 2.24 et 2.32. De plus, on suppose donné un morphisme de cohomologies de Weil*

$$\Gamma_W \longrightarrow \Gamma_{W'} \circ (-)^{\text{anr}} \tag{2.45}$$

(voir la remarque 2.16). Alors, il existe un morphisme de A-dg-algèbres $B \longrightarrow B'$ tel que le carré

$$\begin{tikzcd} \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathbf{R}) \arrow[r, "\mathrm{R}_{W,\mathbf{R}}"] \arrow[d, "{}^{\theta}\mathrm{Rig}^*"] & \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(B)) \arrow[d, "B'\otimes_B -"] \\ \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\mathbf{R}') \arrow[r, "\mathrm{R}_{W,\mathbf{R}'}"] & \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(B')) \end{tikzcd}$$

commute à un isomorphisme naturel près.

Démonstration. — Le morphisme (2.45) induit un morphisme d'algèbres $\mathbf{\Gamma}_W \longrightarrow \mathrm{Rig}_*\mathbf{\Gamma}_{W'}$ et, par adjonction, un morphisme d'algèbres $\mathrm{Rig}^*\mathbf{\Gamma}_W \longrightarrow \mathbf{\Gamma}_{W'}$. Quitte à choisir convenablement les remplacements cofibrants des algèbres commutatives $\mathbf{\Gamma}_W$ et $\mathbf{\Gamma}_{W'}$, on peut supposer l'existence d'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rig}^*(\mathbf{\Gamma}_W)_{\text{cof}} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & (\mathbf{\Gamma}_{W'})_{\text{cof}} \arrow[d] \\ \mathrm{Rig}^*\mathbf{\Gamma}_W \arrow[r] & \mathbf{\Gamma}_{W'}. \end{tikzcd}$$

Quitte à choisir convenablement les remplacements fibrants, on peut supposer l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rig}^*((\mathbf{\Gamma}_W)_{\text{cof}} \otimes \mathbf{R}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Rig}^*(\mathbf{\Gamma}_W)_{\text{cof}} \otimes \mathrm{Rig}^*(\mathbf{R}) \arrow[r, "\alpha\otimes\theta"] & (\mathbf{\Gamma}_{W'})_{\text{cof}} \otimes \mathbf{R}' \arrow[d] \\ \mathrm{Rig}^*\mathbf{\Gamma}_{W,\mathbf{R}} \arrow[rr, "\theta'"] & & \mathbf{\Gamma}_{W',\mathbf{R}'}. \end{tikzcd}$$

Le morphisme θ' induit un morphisme de A-dg-algèbres $B \longrightarrow B'$, et les deux carrés suivants

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod}(\mathbf{R}) \arrow[r] \arrow[d, "{}^{\theta}\mathrm{Rig}^*"] & \mathbf{Mod}(\mathbf{\Gamma}_{W,\mathbf{R}}) \arrow[d, "{}^{\theta'}\mathrm{Rig}^*"] \\ \mathbf{Mod}(\mathbf{R}') \arrow[r] & \mathbf{Mod}(\mathbf{\Gamma}_{W',\mathbf{R}'}) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{Mod}(B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Mod}(\mathbf{\Gamma}_{W,\mathbf{R}}) \arrow[d, "{}^{\theta'}\mathrm{Rig}^*"] \\ \mathbf{Mod}(B') \arrow[r] & \mathbf{Mod}(\mathbf{\Gamma}_{W',\mathbf{R}'}) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Ceci permet de conclure. ■

On spécialise maintenant la construction 2.32 à la situation 2.25 et on combine avec le théorème 2.28.

Construction 2.34. — Soit Γ_W une cohomologie de Weil définie sur Sm/K et à coefficients dans une Λ-algèbre A. D'après la construction 2.32 appliquée à $\mathbf{R} = \mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}$ (voir la situation 2.25), on dispose d'un foncteur monoïdal

$$\mathrm{R}_{W,\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_{K,\Gamma_W}))$$

avec $\mathscr{A}_{K,\Gamma_W} = \Gamma(K;\mathbf{\Gamma}_{W,\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}}) = \mathrm{R}\Gamma(K;(\mathbf{\Gamma}_W)_{\mathrm{cof}} \otimes \mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}})$ la réalisation homologique de $\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}$. Grâce au théorème 2.28, la composition de

$$\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \xrightarrow[\sim]{\widetilde{\mathrm{Rig}}_*} \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}) \xrightarrow{\mathrm{R}_{W,\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}}} \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_{K,\Gamma_W})),$$

fournit un foncteur monoïdal

$$\mathscr{R}_{K,\Gamma_W} : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_{K,\Gamma_W})). \tag{2.46}$$

En précomposant avec le foncteur « relèvement », on obtient également un foncteur monoïdal

$$\mathscr{R}_{K,\Gamma_W} \circ \mathrm{rel} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_{K,\Gamma_W})). \tag{2.47}$$

Remarquons aussi que $\mathscr{A}_{K,\Gamma_W}$, en tant qu'objet de $\mathbf{D}(A)$, est donnée par $\mathrm{R}_W(\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}})$, i.e., par la réalisation homologique du motif $\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}$. □

Proposition 2.35. — *Soit Γ_W (resp. $\Gamma_{W'}$) une cohomologie de Weil (resp. de Weil rigide) à coefficients dans une Λ-algèbre A (resp. A') définie sur* Sm/K *(resp.* $\mathrm{SmRig}/\widehat{K}$*). On suppose donné un morphisme de cohomologies de Weil*

$$\Gamma_W \longrightarrow \Gamma_{W'} \circ (-)^{\mathrm{anr}} \tag{2.48}$$

(voir la remarque 2.16). Alors, il existe un morphisme de A-dg-algèbres $\mathscr{A}_{K,\Gamma_W} \longrightarrow A'$ tel que le triangle

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \arrow[r, "\mathscr{R}_{K,\Gamma_W}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{R}_{W'}"'] & \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_{K,\Gamma_W})) \arrow[d, "A'\otimes_{\mathscr{A}_{K,\Gamma_W}} -"] \\
 & \mathbf{D}(A')
\end{tikzcd}$$

commute à un isomorphisme naturel près.

Démonstration. — Le lemme 2.33 fournit un carré commutatif à un isomorphisme naturel près

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}) \arrow[r, "\mathrm{R}_{W,\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}}"] \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{Rig}}^*"] & \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_{K,\Gamma_W})) \arrow[d, "A'\otimes_{\mathscr{A}_{K,\Gamma_W}} -"] \\
\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{R}_{W'}"] & \mathbf{D}(A').
\end{tikzcd}$$

Le résultat recherché découle maintenant de la construction du foncteur $\mathscr{R}_{K,\Gamma_W}$. ■

On termine la sous-section en discutant quelques exemples.

Exemple 2.36. — Supposons que K est de caractéristique nulle et fixons un morphisme d'anneaux $\Lambda \longrightarrow K$. Dans la construction 2.34, on peut utiliser la cohomologie de Weil Γ_{dR} sur Sm/K de l'exemple 2.10. La K-dg-algèbre $\mathscr{A}_{K,\Gamma_{\mathrm{dR}}}$ ne dépend que du corps valué K et sera simplement notée $\mathscr{A}_K$. De même, le foncteur $\mathscr{R}_{K,\Gamma_{\mathrm{dR}}}$ sera simplement noté $\mathscr{R}_K$. Ainsi, on a un foncteur monoïdal

$$\mathscr{R}_K : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_K)). \tag{2.49}$$

De plus, quitte à choisir convenablement les remplacements fibrants, on dispose d'un morphisme de cohomologies de Weil

$$\Gamma_{\mathrm{dR}} \longrightarrow \Gamma^{\dagger}_{\mathrm{dR}} \circ (-)^{\mathrm{anr}}$$

avec $\Gamma^{\dagger}_{\mathrm{dR}}$ la cohomologie de Weil rigide de l'exemple 2.22. La proposition 2.35 fournit alors un morphisme de K-dg-algèbres

$$\int : \mathscr{A}_K \longrightarrow \widehat{K} \tag{2.50}$$

ainsi qu'un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \arrow[r, "\mathscr{R}_K"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{R}_{\mathrm{dR}}"'] & \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_K)) \arrow[d, "\widehat{K}\otimes_{\mathscr{A}_K}-"] \\ & \mathbf{D}(\widehat{K}) \end{tikzcd} \tag{2.51}$$

à un isomorphisme naturel près. (L'utilisation du symbole d'intégration dans (2.50) anticipe sur le fait que $\mathscr{A}_K$ est un complexe de « périodes abstraites adiques », ce qui sera démontré plus tard.) □

Exemple 2.37. — On fixe un plongement complexe $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Dans la construction 2.34, on peut utiliser la cohomologie de Weil Γ_{B} sur Sm/K de l'exemple 2.11. La dg-algèbre $\mathscr{A}_{K,\Gamma_{\mathrm{B}}}$ sera simplement notée $\mathscr{A}_{K,\mathrm{B}}$. De même, le foncteur $\mathscr{R}_{K,\Gamma_{\mathrm{B}}}$ sera simplement noté $\mathscr{R}_{K,\mathrm{B}}$. Ainsi, on a un foncteur monoïdal

$$\mathscr{R}_{K,\mathrm{B}} : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_{K,\mathrm{B}})). \tag{2.52}$$

Fixons un morphisme d'anneaux $\Lambda \longrightarrow K$. Grâce au théorème de comparaison de Grothendieck [**23**] et en choisissant convenablement les remplacements fibrants, on a un quasi-isomorphisme de cohomologies de Weil $\mathbb{C}\otimes_{\Lambda}\Gamma_{\mathrm{B}}(-) \simeq \mathbb{C}\otimes_K \Gamma_{\mathrm{dR}}(-)$. On en déduit aussitôt un quasi-isomorphisme de $\mathbb{C}$-dg-algèbres $\mathbb{C}\otimes_{\Lambda}\mathscr{A}_{K,\mathrm{B}} \simeq \mathbb{C}\otimes_K \mathscr{A}_K$ ainsi que des isomorphismes naturels

$$\mathbb{C}\otimes_{\Lambda}\mathscr{R}_{K,\mathrm{B}}(-) \simeq \mathbb{C}\otimes_K \mathscr{R}_K(-) \tag{2.53}$$

entre foncteurs définis sur $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$. □

Exemple 2.38. — Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de K (mais qui peut être égal à celle de k) et soit $\overline{K}/K$ une clôture algébrique de K. Fixons un morphisme d'anneaux $\Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}_{\ell}$. Dans la construction 2.34, on peut utiliser la cohomologie de Weil Γ_{ℓ} sur Sm/K de l'exemple 2.12. La dg-algèbre $\mathscr{A}_{K,\Gamma_{\ell}}$ sera simplement notée $\mathscr{A}_{K,\ell}$. De même, le foncteur $\mathscr{R}_{K,\Gamma_{\ell}}$ sera simplement noté $\mathscr{R}_{K,\ell}$. Ainsi, on a un foncteur monoïdal

$$\mathscr{R}_{K,\ell} : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_{K,\ell})). \tag{2.54}$$

On fixe un plongement $\sigma : \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Grâce au théorème de comparaison d'Artin [**1**, Exposé XI] et en choisissant convenablement les remplacements fibrants, on a un quasi-isomorphisme de cohomologies de Weil $\mathbb{Q}_{\ell}\otimes_{\Lambda}\Gamma_{\mathrm{B}}(-) \simeq \Gamma_{\ell}(-)$. On en déduit aussitôt un quasi-isomorphisme de $\mathbb{Q}_{\ell}$-dg-algèbres $\mathbb{Q}_{\ell}\otimes_{\Lambda}\mathscr{A}_{K,\mathrm{B}} \simeq \mathscr{A}_{K,\ell}$ ainsi que des isomorphismes naturels

$$\mathbb{Q}_{\ell}\otimes_{\Lambda}\mathscr{R}_{K,\mathrm{B}}(-) \simeq \mathscr{R}_{K,\ell}(-) \tag{2.55}$$

entre foncteurs définis sur $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$.

Supposons de plus que ℓ est différent de la caractéristique de k et fixons une extension de la valuation de K à $\overline{K}$ (ce qui revient au même de se donner une clôture algébrique de $\widehat{K}$ contenant $\overline{K}$). La cohomologie de Weil Γ_{ℓ} susmentionnée s'identifie alors à la restriction de la cohomologie de Weil rigide Γ_{ℓ} de l'exemple 2.23. (Ceci découle de [**24**, Theorem 3.8.1].) La proposition 2.35 fournit alors un morphisme de $\mathbb{Q}_{\ell}$-dg-algèbres

$$\mathscr{A}_{K,\ell} \longrightarrow \mathbb{Q}_{\ell} \tag{2.56}$$

ainsi qu'un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \arrow[r, "\mathscr{R}_{K,\ell}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{R}_{\ell}"'] & \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_{K,\ell})) \arrow[d, "\mathbb{Q}_{\ell}\otimes_{\mathscr{A}_{K,\ell}}-"] \\ & \mathbf{D}(\mathbb{Q}_{\ell}) \end{tikzcd} \tag{2.57}$$

à un isomorphisme naturel près. □

Remarque 2.39. — Supposons que K est de caractéristique nulle. Alors, les théorèmes de comparaison entre cohomologies de Weil classiques fournissent, après extension des scalaires, des quasi-isomorphismes entre les dg-algèbres $\mathscr{A}_K$, $\mathscr{A}_{K,\mathrm{B}}$ et $\mathscr{A}_{K,\ell}$ ainsi que des isomorphismes naturels entre les foncteurs $\mathscr{R}_K$, $\mathscr{R}_{K,\mathrm{B}}$ et $\mathscr{R}_{K,\ell}$. Plus précisément, en choisissant un morphisme d'anneaux $\Lambda \longrightarrow K$, un plongement complexe $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$, on a une chaîne de quasi-isomorphismes

$$\mathbb{C} \otimes_K \mathscr{A}_K \simeq \mathbb{C} \otimes_\Lambda \mathscr{A}_{K,\mathrm{B}} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_\Lambda \mathscr{A}_{K,\mathrm{B}} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathscr{A}_{K,\ell} \tag{2.58}$$

ainsi qu'une chaîne d'isomorphismes naturels

$$\mathbb{C} \otimes_K \mathscr{R}_K(-) \simeq \mathbb{C} \otimes_\Lambda \mathscr{R}_{K,\mathrm{B}}(-) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_\Lambda \mathscr{R}_{K,\mathrm{B}}(-) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathscr{R}_{K,\ell}(-) \tag{2.59}$$

entre foncteurs définis sur $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$. □

Remarque 2.40. — Supposons que K est d'inégales caractéristiques $(0,p)$ et fixons un morphisme d'anneaux $\Lambda \longrightarrow K$. Alors, le foncteur composé

$$\mathrm{R}_{\mathrm{Bert}} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \xrightarrow{\mathrm{rel}} \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \xrightarrow{\mathrm{R}_{\mathrm{dR}}} \mathbf{D}(\widehat{K})$$

est la réalisation rigide à la Berthelot. (En effet, d'après [**30**, Proposition 5.12], ce foncteur envoie le motif d'un k-schéma lisse X sur le dual de la cohomologie rigide de X.) En précomposant avec rel dans le triangle (2.51), on obtient un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \arrow[r, "\mathscr{R}_K \circ \mathrm{rel}"] \arrow[dr, "\mathrm{R}_{\mathrm{Bert}}"'] & \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_K)) \arrow[d, "\widehat{K}\otimes_{\mathscr{A}_K} -"] \\ & \mathbf{D}(\widehat{K}). \end{tikzcd} \tag{2.60}$$

à un isomorphisme naturel près.

Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k et fixons un morphisme d'anneaux $\Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$. Alors, la composition de

$$\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \xrightarrow{\mathrm{rel}} \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \xrightarrow{\mathrm{R}_\ell} \mathbf{D}(\mathbb{Q}_\ell)$$

coïncide avec la réalisation ℓ-adique sur $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda)$. En précomposant avec rel dans le triangle (2.57), on obtient un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \arrow[r, "\mathscr{R}_{K,\ell} \circ \mathrm{rel}"] \arrow[dr, "\mathrm{R}_\ell"'] & \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_{K,\ell})) \arrow[d, "\mathbb{Q}_\ell\otimes_{\mathscr{A}_{K,\ell}} -"] \\ & \mathbf{D}(\mathbb{Q}_\ell). \end{tikzcd} \tag{2.61}$$

à un isomorphisme naturel près. □

3. Calcul du complexe des périodes abstraites $\mathscr{A}_K$ et applications

Tout au long de la section, on fixe un corps K muni d'une valuation de hauteur 1 et on note $\widehat{K}$ son complété. On désigne par K° et $\widehat{K}^\circ$ les anneaux de valuation de K et $\widehat{K}$, et on note k le corps résiduel de K° qu'on identifie à celui de $\widehat{K}^\circ$. Sauf mention explicite du contraire, on suppose que la caractéristique de K est nulle ; on ne fait pas d'hypothèses sur la caractéristique de k.

Notre but ici est d'expliciter le complexe $\mathscr{A}_K$, à quasi-isomorphisme près, et de montrer qu'il est (-1)-connexe. Ceci nous permettra d'achever la construction de la nouvelle réalisation (1.3). On rappelle que, en tant que complexe de K-vectoriels, $\mathscr{A}_K$ est la réalisation de de Rham du motif $\mathrm{Rig}_*\mathbf{1} \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;K)$; voir les constructions 2.32 et 2.34, ainsi que l'exemple 2.36. Ainsi, en utilisant la formule de coprojection du lemme 2.29, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_K &= \mathrm{R}\Gamma(K;\boldsymbol{\Omega}\otimes\mathrm{Rig}_*\mathbf{1}) \\ &\simeq \mathrm{R}\Gamma(K;\mathrm{Rig}_*\mathrm{Rig}^*(\boldsymbol{\Omega})) \\ &\simeq \mathrm{R}\Gamma(\widehat{K};\mathrm{Rig}^*(\boldsymbol{\Omega})). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pour expliciter le complexe $\mathscr{A}_K$, on utilise un modèle explicite du foncteur $\mathrm{R}\Gamma(\widehat{K};\mathrm{Rig}^*(-))$ qu'on décrit dans la première sous-section ci-dessous.

3.1. Un modèle explicite du foncteur $\mathrm{R}\Gamma(\widehat{K},\mathrm{Rig}^*(-))$**. —** Il sera nécessaire ici d'utiliser la version avec transferts des catégories triangulées de motifs (voir les remarques 2.1 et 2.13). On fixe une $\mathbb{Q}$-algèbre Λ. Nous allons expliquer comment calculer, à quasi-isomorphisme près, le complexe $\mathrm{R}\Gamma(\widehat{K};\mathrm{Rig}^*M)$ pour M un objet de $\mathbf{DM}(K;\Lambda)$. Il s'agit en fait d'assembler plusieurs résultats de [**8**, Chapitre 2].

Notation 3.1. — Pour $m\in\mathbb{N}$, on note $\partial\mathbb{B}^{\wedge m}$ (resp. $\mathbb{E}^{\wedge m}$) la paire $(\partial\mathbb{B}^1,1)^{\wedge m}$ (resp. $(\mathbb{E}^1,1)^{\wedge m}$) au sens de [**5**, Définition 2.29]. Ainsi, $\partial\mathbb{B}^{\wedge m}$ (resp. $\mathbb{E}^{\wedge m}$) est la paire formée de la $\widehat{K}$-variété rigide $\partial\mathbb{B}^m$ (resp. du K-schéma $\mathbb{E}^m$) et du diviseur à croisements normaux défini par l'équation $(t_1-1)\cdots(t_m-1)=0$. □

Théorème 3.2. — *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T*-spectre en complexes de préfaisceaux avec transferts sur* Sm/K *à valeurs dans les* Λ*-modules. Alors, le complexe de* Λ*-modules* $\mathrm{R}\Gamma(\widehat{K};\mathrm{Rig}^*\mathbf{E})$ *est naturellement quasi-isomorphe à*

$$\operatorname*{colim}_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{Tot}^{\square}\,\mathrm{Rig}^*\mathbf{E}_m(\partial\mathbb{B}^{\wedge m}\times\mathbb{B})[m]. \tag{3.2}$$

Ci-dessus, $\mathbb{B}$ *désigne la* $\widehat{K}$*-variété rigide cocubique qui à* $n\in\mathbb{N}$ *associe* $\mathbb{B}^n$ *et* $\mathrm{Tot}^{\square}$ *est le foncteur « complexe simple associé à un complexe cubique ». Les morphismes de transition sont induits par les morphismes*

$$\mathrm{Rig}^*\mathbf{E}_m \longrightarrow \mathrm{Rig}^*\mathbf{E}_{m+1}(\partial\mathbb{B}^{\wedge 1}\times -)[1]$$

adjoints des morphismes d'assemblage du T*-spectre* $\mathrm{Rig}^*\mathbf{E}$.

Démonstration. — Ceci découle directement de [**8**, Théorème 2.5.32]. En effet, considérons le T-spectre

$$(\boldsymbol{\Lambda}^{\infty}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{B}^1}\mathrm{Rig}^*(\mathbf{E}))_{\text{ét-fib}} \tag{3.3}$$

où $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{B}^1}=\mathrm{Tot}^{\square}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{B},-)$, $\boldsymbol{\Lambda}^{\infty}=\mathrm{colim}_{m\in\mathbb{N}}\boldsymbol{\Lambda}^{\circ m}$ est le foncteur de stabilisation des T-spectres (comme dans [**3**, Théorème 4.3.61]) et $(-)_{\text{ét-fib}}$ désigne un remplacement ét-fibrant niveau par niveau. D'après [**8**, Théorème 2.5.32(1)], le T-spectre $(\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{B}^1}\mathrm{Rig}^*\mathbf{E})_{\text{ét-fib}}$ est un remplacement $(\mathbb{B}^1,\text{ét})$-fibrant niveau par niveau de $\mathrm{Rig}^*\mathbf{E}$. (Dans [**8**], on utilise la version simpliciale du foncteur $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{B}^1}$, mais les deux versions simpliciale et cubique fournissent des complexes quasi-isomorphes.) Il s'ensuit, grâce à [**3**, Théorème 4.3.61], que $\boldsymbol{\Lambda}^{\infty}((\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{B}^1}\mathrm{Rig}^*\mathbf{E})_{\text{ét-fib}})$ est un remplacement stablement $(\mathbb{B}^1,\text{ét})$-fibrant de $\mathrm{Rig}^*\mathbf{E}$. Or, d'après [**8**, Théorème 2.5.32(2)], le morphisme évident

$$(\boldsymbol{\Lambda}^{\infty}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{B}^1}\mathrm{Rig}^*\mathbf{E})_{\text{ét-fib}} \longrightarrow \boldsymbol{\Lambda}^{\infty}((\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{B}^1}\mathrm{Rig}^*\mathbf{E})_{\text{ét-fib}})$$

est un quasi-isomorphisme niveau par niveau. Au final, ceci montre que le T-spectre (3.3) est un remplacement stablement $(\mathbb{B}^1,\text{ét})$-fibrant de $\mathrm{Rig}^*\mathbf{E}$. On en déduit des quasi-isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma(\widehat{K};\mathrm{Rig}^*\mathbf{E}) &\simeq \Gamma(\widehat{K};(\boldsymbol{\Lambda}^{\infty}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{B}^1}\mathrm{Rig}^*\mathbf{E})_{\text{ét-fib}}) \\ &\simeq \Gamma(\widehat{K};\boldsymbol{\Lambda}^{\infty}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{B}^1}\mathrm{Rig}^*\mathbf{E}). \end{aligned}$$

(En effet, le foncteur $\Gamma(\widehat{K};-)$ transforme une équivalence ét-locale entre complexes de préfaisceaux avec transferts en un quasi-isomorphisme.) Le résultat recherché s'ensuit car $\Gamma(\widehat{K};\boldsymbol{\Lambda}^{\infty}\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{B}^1}\mathrm{Rig}^*\mathbf{E})$ s'identifie au complexe (3.2) par la construction même des foncteurs $\boldsymbol{\Lambda}^{\infty}$ et $\underline{\mathrm{Sg}}^{\mathbb{B}^1}$. ■

Le théorème 3.2 ne suffira pas pour la suite, et il nous faut une description plus « économique » du complexe $\mathrm{R}\Gamma(\widehat{K};\mathrm{Rig}^*\mathbf{E})$. On introduit d'abord quelques notations.

Notation 3.3. — Pour $m, n \in \mathbb{N}$, on note $(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)_{\text{ét}}$ le pro-K-schéma des voisinages étales de $\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n$ dans le K-schéma $\mathbb{E}^m \times \mathbb{A}^n$. Plus précisément, considérons la catégorie $\mathcal{V}^{m,n}_{\text{ét}}$ ayant pour objets les couples (U, u) où U est un $\mathbb{E}^m \times \mathbb{A}^n$-schéma étale et $u : \partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n \longrightarrow U^{\text{anr}}$ est un morphisme de $\widehat{K}$-variétés rigides faisant commuter le triangle

$$\begin{tikzcd}
\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n \arrow[r, "u"] \arrow[dr] & U^{\text{anr}} \arrow[d] \\
& (\mathbb{E}^m \times \mathbb{A}^n)^{\text{anr}}.
\end{tikzcd}$$

(Bien entendu, la flèche oblique est l'inclusion évidente.) La catégorie $\mathcal{V}^{m,n}_{\text{ét}}$ est cofiltrante et le foncteur qui à (U, u) associe U définit le pro-K-schéma $(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)_{\text{ét}}$ qui est pro-étale sur $\mathbb{E}^m \times \mathbb{A}^n$.

On note $(\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B}^n)_{\text{ét}}$ la pro-K-paire formée de $(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)_{\text{ét}}$ et de l'image inverse du diviseur de $\mathbb{E}^m$ défini par l'équation $(t_1 - 1) \cdots (t_m - 1) = 0$. En faisant varier n, on obtient un pro-K-schéma cocubique $(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B})_{\text{ét}}$ ainsi qu'une pro-K-paire cocubique $(\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}}$. □

Théorème 3.4. — *Soit* $\mathbf{E}$ *un* T*-spectre en complexes de préfaisceaux avec transferts sur* Sm/K *à valeurs dans les* Λ*-modules. Alors, le complexe de* Λ*-modules* $\mathrm{R}\Gamma(\widehat{K}; \mathrm{Rig}^*\mathbf{E})$ *est naturellement quasi-isomorphe à*

$$\operatorname*{colim}_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{Tot}^{\square}\, \mathbf{E}_m((\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}})[r]. \tag{3.4}$$

Les morphismes de transition dans cette colimite sont donnés par les compositions de

$$\mathbf{E}_m((\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}}) \longrightarrow \mathbf{E}_{m+1}(\mathbb{E}^{\wedge 1} \wedge (\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}})[1] \longrightarrow \mathbf{E}_{m+1}((\partial\mathbb{B}^{\wedge m+1} \times \mathbb{B})_{\text{ét}})[1]$$

où la première flèche est déduite du morphisme d'assemblage du T*-spectre* $\mathbf{E}$*.*

Démonstration. — Vu le théorème 3.2, il suffit de montrer que le complexe $\mathrm{Tot}^{\square}\mathrm{Rig}^*F(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B})$ est naturellement quasi-isomorphe au complexe $\mathrm{Tot}^{\square}F((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B})_{\text{ét}})$ pour tout complexe de préfaisceaux avec transferts F sur Sm/K. Ceci découle immédiatement de (la version cubique de) [**8**, Théorème 2.4.16]. Plus précisément, on se ramène aussitôt au cas où $F = \Lambda_{\text{tr}}(X)$ pour X un K-schéma lisse. Ensuite, on spécialise la situation considérée dans [**8**, Notation 2.4.14] en prenant $B = \partial\mathbb{B}^m$ et $B_0 = \mathbb{E}^m$. ■

3.2. Calcul du complexe $\mathscr{A}_K$ et du morphisme $\int$. —

Le théorème 3.4 appliqué au T-spectre $\mathbf{\Omega}$ qui représente la cohomologie de de Rham sur Sm/K permet d'obtenir le résultat suivant.

Corollaire 3.5. — *Le complexe* $\mathscr{A}_K$ *est quasi-isomorphe à*

$$\operatorname*{colim}_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{Tot}^{\square}\Omega((\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}})[m] \tag{3.5}$$

où Ω *désigne le complexe de de Rham sur* Sm/K *et où les morphismes de transition sont donnés par la composition de*

$$\Omega((\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}}) \xrightarrow{\mathrm{d}\ln t_{m+1} \wedge -} \Omega(\mathbb{E}^{\wedge 1} \times (\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}})[1] \longrightarrow \Omega((\partial\mathbb{B}^{\wedge m+1} \times \mathbb{B})_{\text{ét}})[1]$$

avec $t_1, \cdots, t_{m+1}$ *les coordonnées sur* $\mathbb{E}^{m+1}$*.*

Démonstration. — Modulo (3.1), il s'agit du théorème 3.4 appliqué au T-spectre $\mathbf{\Omega}$. ■

On peut calculer le complexe $\mathrm{Tot}^{\square}\Omega((\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}})$ à quasi-isomorphisme près en utilisant la méthode développée dans [**5**, pages 97–102]. En effet, on dispose d'un complexe de $\mathrm{W}(K)$-modules cubiques Σ-enrichis (au sens de [**5**, Définition 2.94]) :

$$M^{\bullet}_m = \Omega^{\bullet}_{/\mathbb{A}}((\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}})$$

concentré en degrés cohomologiques $0 \leqslant e \leqslant m$ où il est donné par

$$M^e_m = \Omega^e_{/\mathbb{A}}((\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}}) = \bigoplus_{I \subset [\![1, m]\!],\ \mathrm{card}(I) = m-e} \mathcal{O}^{(I)}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B})_{\text{ét}}) \cdot \mathrm{d}\ln \widehat{t}_I.$$

Ci-dessus, $\mathcal{O}^{(I)}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B})_{\text{ét}})$ est le sous-K-vectoriel de $\mathcal{O}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B})_{\text{ét}})$ formé des fonctions g telles que $g|_{t_i=1} = 0$ pour tout $i \in I$ et $\mathrm{d}\ln\widehat{t}_I$ est le produit extérieur dans l'ordre décroissant des $\mathrm{d}\ln t_u$, pour $u \in [\![1,m]\!] \smallsetminus I$. Avec la notation de [**5**, Définition 2.97], on a tautologiquement :

$$\mathrm{Tot}^{\square}\Omega((\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}}) = \mathrm{Tot}(\mathrm{DR}_{\bullet}(M_m^{\bullet})).$$

De plus, modulo cette identification, les morphismes de transition dans (3.5) sont induits par les morphismes de complexes de $\mathrm{W}(K)$-modules $\mathrm{d}\ln t_{m+1} \wedge - : M_m^{\bullet} \longrightarrow M_{m+1}^{\bullet}[1]$. D'après [**5**, Proposition 2.100], il existe un quasi-isomorphisme canonique

$$\mathrm{Tot}\,\mathrm{DR}_{\bullet}(M_m^{\bullet}) \simeq \mathrm{Tot}(\widetilde{\Omega}^{\infty-\bullet}(M_m^{\bullet})).$$

En explicitant ce dernier complexe, on obtient l'énoncé suivant.

Théorème 3.6. — *Le complexe $\mathscr{A}_K$ est canoniquement quasi-isomorphe à*

$$\operatorname*{colim}_{m\in\mathbb{N}} \widetilde{\Omega}^{\infty-\bullet}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^{\infty})_{\text{ét}}) \tag{3.6}$$

où $\widetilde{\Omega}^{\infty-\bullet}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^{\infty})_{\text{ét}})$ sont des complexes concentrés en degrés homologiques positifs et qui admettent la description suivante. Pour $d \geqslant 0$, on a

$$\widetilde{\Omega}^{\infty-d}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^{\infty})_{\text{ét}}) = \bigoplus_{\substack{I\subset[\![1,m]\!],\ J\subset\mathbb{N}\smallsetminus\{0\},\\ \mathrm{card}(I)+\mathrm{card}(J)=d}} \mathcal{O}^{(I),(J)}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^{\infty})_{\text{ét}}) \cdot \mathrm{d}\ln\widehat{t}_I \wedge \mathrm{d}\widehat{z}_J$$

où :

- *$\mathcal{O}^{(I),(J)}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^{\infty})_{\text{ét}})$ est le sous-K-vectoriel de $\mathcal{O}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^{\infty})_{\text{ét}})$ formé des fonctions g telles que $g|_{t_i=1} = 0$ pour $i \in I$ et $g|_{z_j=\epsilon} = 0$ pour $j \in J$ et $\epsilon \in \{0,1\}$;*
- *le symbole $\mathrm{d}\ln\widehat{t}_I$ désigne le produit extérieur des $\mathrm{d}\ln t_u$, pour $u \in [\![1,m]\!] \smallsetminus I$, dans l'ordre décroissant ;*
- *le symbole $\mathrm{d}\widehat{z}_J$ désigne le produit extérieur infini des $\mathrm{d}z_v$, pour $v \notin J$, dans l'ordre croissant.*

La différentielle du complexe $\widetilde{\Omega}^{\infty-\bullet}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^{\infty})_{\text{ét}})$ est la différentielle de de Rham multipliée par $(-1)^m$. Enfin, les morphismes de transition dans la colimite (3.6) *sont donnés par* $\mathrm{d}\ln t_{m+1} \wedge -$.

Remarque 3.7. — On peut facilement adapter la preuve de [**5**, Proposition 2.102] pour montrer que la K-algèbre $\mathcal{O}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)_{\text{ét}})$ coïncide avec la sous-K-algèbre de $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n) \subset \mathcal{O}(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$ formée des éléments qui sont algébriques sur le corps des fractions rationnelles $K(t_1,\cdots,t_m,z_1,\cdots,z_n)$. (Voir la construction 1.3 dans l'introduction.) □

Corollaire 3.8. — *Le complexe $\mathscr{A}_K$ est (-1)-connexe et, en tant que K-vectoriel, $\mathrm{H}_0(\mathscr{A}_K)$ est le quotient de $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^{\infty} \times \mathbb{B}^{\infty}) = \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$ par le sous-K-vectoriel engendré par les éléments :*

- *$t_i \cdot \dfrac{\partial g}{\partial t_i}$, pour $g \in \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^{\infty} \times \mathbb{B}^{\infty})$ et $i \geqslant 1$;*
- *$\dfrac{\partial h}{\partial z_j} - h|_{z_j=1} + h|_{z_j=0}$, pour $h \in \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^{\infty} \times \mathbb{B}^{\infty})$ et $j \geqslant 1$.*

Corollaire 3.9. — *Étant donné un plongement complexe $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, le complexe $\mathscr{A}_{K,\mathrm{B}}$ est (-1)-connexe. De même, étant donnés un nombre premier ℓ et une clôture algébrique de K, le complexe $\mathscr{A}_{K,\ell}$ est (-1)-connexe.*

Démonstration. — Ceci découle aussitôt du corollaire 3.8 et des quasi-isomorphismes (2.58). ■

Notation 3.10. — On pose $\mathbf{A}_K = \mathrm{H}_0(\mathscr{A}_K)$. De même, sous les hypothèses du corollaire 3.9, on pose $\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}} = \mathrm{H}_0(\mathscr{A}_{K,\mathrm{B}})$ et $\mathbf{A}_{K,\ell} = \mathrm{H}_0(\mathscr{A}_{K,\ell})$. □

Remarque 3.11. — Puisque le complexe $\mathscr{A}_K$ est (-1)-connexe, on dispose d'un morphisme canonique $\mathscr{A}_K \longrightarrow \mathbf{A}_K$ dans la catégorie homotopique des K-dg-algèbres qui est donné par le zigzag

$$\mathscr{A}_K \xleftarrow{\text{q.-i.}} \tau_{\geqslant 0}\mathscr{A}_K \longrightarrow \mathbf{A}_K. \tag{3.7}$$

Il s'ensuit un foncteur monoïdal

$$\mathbf{A}_K \otimes_{\mathscr{A}_K} - : \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_K)) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A}_K). \tag{3.8}$$

La même chose s'applique également aux dg-algèbres $\mathscr{A}_{K,\mathrm{B}}$ et $\mathscr{A}_{K,\ell}$. □

Par construction, le morphisme de K-dg-algèbres (2.50) se factorise par $\mathbf{A}_K$ et fournit donc un morphisme de K-algèbres

$$\int : \mathbf{A}_K \longrightarrow \widehat{K}. \tag{3.9}$$

On termine la sous-section avec le résultat suivant qui fournit une description explicite de ce morphisme.

Proposition 3.12. — *Modulo la description de $\mathbf{A}_K$ fournie par le corollaire 3.8, le morphisme* (3.9) *envoie la classe d'une fonction $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$ sur*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathrm{cc}(f) \cdot \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n \tag{3.10}$$

où $\mathrm{cc}(f) \in \mathcal{O}(\mathbb{B}^n)$ est le coefficient de $t_1^0 \cdots t_m^0$ dans f vue comme un élément de $\mathcal{O}(\mathbb{B}^n)\{t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_m, t_m^{-1}\}$. (Voir la fin de la construction 1.3 pour la signification de l'intégrale multiple (3.10)*.)*

Démonstration. — On divise la preuve en deux étapes.

Étape 1. — On rappelle d'abord la construction du morphisme de K-dg-algèbres $\mathscr{A}_K \longrightarrow \widehat{K}$. On dispose d'un morphisme de cohomologies de Weil $\Gamma_{\mathrm{dR}}(-) \simeq \Gamma^{\dagger}_{\mathrm{dR}}(-)^{\mathrm{anr}}$ induisant un morphisme $\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{dR}} \longrightarrow \mathrm{Rig}_*\mathbf{\Gamma}^{\dagger}_{\mathrm{dR}}$ dans $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;K)$. Le morphisme $\mathscr{A}_K \longrightarrow \widehat{K}$ qui nous intéresse s'obtient, modulo les identifications évidentes, en appliquant $\mathrm{R}\Gamma(K;-)$ à la composition de

$$\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{dR}} \otimes \mathrm{Rig}_*\mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{Rig}_*\mathbf{\Gamma}^{\dagger}_{\mathrm{dR}} \otimes \mathrm{Rig}_*\mathbf{1} \xrightarrow{m} \mathrm{Rig}_*\mathbf{\Gamma}^{\dagger}_{\mathrm{dR}}; \tag{3.11}$$

voir la preuve du lemme 2.33. Le morphisme $\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{dR}} \longrightarrow \mathrm{Rig}_*\mathbf{\Gamma}^{\dagger}_{\mathrm{dR}}$ correspond par adjonction à un morphisme

$$\mathrm{Rig}^*\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{dR}} \longrightarrow \mathbf{\Gamma}^{\dagger}_{\mathrm{dR}} \tag{3.12}$$

dans $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};K)$. De plus, modulo l'isomorphisme de coprojection $\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{dR}} \otimes \mathrm{Rig}_*\mathbf{1} \simeq \mathrm{Rig}_*\mathrm{Rig}^*\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{dR}}$, la composition (3.11) s'identifie au morphisme $\mathrm{Rig}_*((3.12)) : \mathrm{Rig}_*\mathrm{Rig}^*\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{dR}} \longrightarrow \mathrm{Rig}_*\mathbf{\Gamma}^{\dagger}_{\mathrm{dR}}$. Au final, on voit que le morphisme $\mathscr{A}_K \longrightarrow \widehat{K}$ est donné par

$$\mathrm{R}\Gamma(\widehat{K};(3.12)) : \mathscr{A}_K = \mathrm{R}\Gamma(\widehat{K};\mathrm{Rig}^*\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{dR}}) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma(\widehat{K};\mathbf{\Gamma}^{\dagger}_{\mathrm{dR}}) = \widehat{K}. \tag{3.13}$$

Étape 2. — Modulo l'identification fournie par le corollaire 3.5, le morphisme (3.13) est donné par le morphisme évident

$$\operatorname*{colim}_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{Tot}^{\square}\Omega((\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}})[m] \longrightarrow \operatorname*{colim}_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{Tot}^{\square}\Gamma^{\dagger}_{\mathrm{dR}}(\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})(m)[m]. \tag{3.14}$$

Notons $(\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)^{\dagger}$ la $\widehat{K}$-variété rigide $\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n$ avec sa structure de surconvergence évidente et que l'on considère comme une pro-$\widehat{K}$-variété rigide. Par la construction de $\Gamma^{\dagger}_{\mathrm{dR}}$ (voir l'exemple 2.22), le morphisme (3.14) se factorise par le morphisme évident

$$\operatorname*{colim}_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{Tot}^{\square}\Omega((\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})_{\text{ét}})[m] \longrightarrow \operatorname*{colim}_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{Tot}^{\square}\Omega((\partial\mathbb{B}^{\wedge m} \times \mathbb{B})^{\dagger})[m] \tag{3.15}$$

et le membre à droite est encore quasi-isomorphe à $\widehat{K}$. Le calcul qui mène au théorème 3.6 permet de réécrire le morphisme (3.15) comme suit :

$$\operatorname*{colim}_{m\in\mathbb{N}} \widetilde{\Omega}^{\infty-\bullet}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^{\infty})_{\text{ét}}) \longrightarrow \operatorname*{colim}_{m\in\mathbb{N}} \widetilde{\Omega}^{\infty-\bullet}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^{\infty})^{\dagger}). \tag{3.16}$$

Le résultat recherché découle maintenant du lemme 3.13 ci-dessous. ■

Lemme 3.13. — *Considérons le $\widehat{K}$-vectoriel $P^{m,n}$ égal au quotient de $\mathcal{O}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)^{\dagger})$ par les éléments :*

- $t_i \cdot \dfrac{\partial g}{\partial t_i}$*, pour $g \in \mathcal{O}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)^{\dagger})$ et $i \in [\![1, m]\!]$;*

– $\dfrac{\partial h}{\partial z_j} - h|_{z_j=1} + h|_{z_j=0}$, *pour* $h \in \mathcal{O}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)^\dagger)$ *et* $j \in [\![1, n]\!]$.

Alors, dans $P^{m,n}$, *la classe d'une fonction* $f \in \mathcal{O}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)^\dagger)$ *est égale à celle de la fonction constante donnée par*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathrm{cc}(f) \cdot \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n.$$

Démonstration. — Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{O}((\partial\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)^\dagger)$, on note $\mathrm{c}_m(f) \in \mathcal{O}((\partial\mathbb{B}^{m-1} \times \mathbb{B}^n)^\dagger)$ le coefficient de t_m^0 dans f vue comme élément de $\mathcal{O}((\partial\mathbb{B}^{m-1} \times \mathbb{B}^n)^\dagger)\{t_m, t_m^{-1}\}$. Clairement, $f - \mathrm{c}_m(f)$ est dans l'image de l'opérateur $t_m \cdot \dfrac{\partial}{\partial t_m}$. Une récurrence simple montre alors que f et $\mathrm{cc}(f) = \mathrm{c}_1 \circ \cdots \circ \mathrm{c}_m(f)$ ont même classe dans $P^{m,n}$. Ainsi, on peut supposer que $m = 0$.

L'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial z_n}$ est surjectif sur $\mathcal{O}((\mathbb{B}^n)^\dagger)$. On peut donc trouver $h \in \mathcal{O}((\mathbb{B}^n)^\dagger)$ tel que $\dfrac{\partial h}{\partial z_n} = f$. Il s'ensuit que la classe de f dans $P^{0,n}$ est égale à celle de $h|_{z_n=1} - h|_{z_n=0} \in \mathcal{O}((\mathbb{B}^{n-1})^\dagger)$. Une récurrence simple permet maintenant de conclure. ∎

3.3. Constructions des nouvelles réalisations. — On achève ici les constructions des nouvelles réalisations en combinant les constructions de la sous-section 2.5 avec la (-1)-connexité des complexes $\mathscr{A}_K$, $\mathscr{A}_{K,\mathrm{B}}$ et $\mathscr{A}_{K,\ell}$. On rappelle que K est de caractéristique nulle et qu'on ne fait pas d'hypothèses sur la caractéristique de k. On fixe une $\mathbb{Q}$-algèbre Λ.

Définition 3.14. — *Fixons un morphisme d'anneaux* $\Lambda \longrightarrow K$. *La* nouvelle réalisation de type de Rham *sur* $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$ *est le foncteur*

$$\mathrm{R}_{\text{new}} : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A}_K) \tag{3.17}$$

défini comme étant la composition de

$$\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \xrightarrow[(2.49)]{\mathscr{R}_K} \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_K)) \xrightarrow[(3.8)]{\mathbf{A}_K \otimes_{\mathscr{A}_K} -} \mathbf{D}(\mathbf{A}_K) \tag{3.18}$$

où $\mathscr{R}_K$ *est le foncteur de l'exemple 2.36 ; voir la remarque 3.11. La* nouvelle réalisation de type de Rham *sur* $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda)$ *est le foncteur*

$$\mathrm{R}_{\text{new}} \circ \mathrm{rel} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A}_K). \tag{3.19}$$

Les deux foncteurs (3.17) *et* (3.19) *sont monoïdaux. Lorsque cela n'entraîne pas confusion, on écrit «* R_{new} *» au lieu de «* $\mathrm{R}_{\text{new}} \circ \mathrm{rel}$ *».*

Remarque 3.15. — Les réalisations nouvelles de type de Rham permettent de retrouver la réalisation de de Rham surconvergente sur $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$ ainsi que la réalisation rigide à la Berthelot sur $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda)$. Plus précisément, on a des triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{R}_{\text{new}}"] \arrow[dr, "\mathrm{R}_{\text{dR}}"'] & \mathbf{D}(\mathbf{A}_K) \arrow[d, "\widehat{K}\otimes_{\mathbf{A}_K}-"] \\ & \mathbf{D}(\widehat{K}) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{R}_{\text{new}}"] \arrow[dr, "\mathrm{R}_{\text{Bert}}"'] & \mathbf{D}(\mathbf{A}_K) \arrow[d, "\widehat{K}\otimes_{\mathbf{A}_K}-"] \\ & \mathbf{D}(\widehat{K}) \end{tikzcd} \tag{3.20}$$

à isomorphismes naturels près. Ceci découle aussitôt des triangles (2.51) et (2.60). Les réalisations nouvelles de type de Rham permettent aussi de retrouver les réalisations ℓ-adiques, pour ℓ différent de la caractéristique de k. Plus précisément, en fixant certaines données comme dans la remarque 2.39, on a également des triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{R}_{\text{new}}"] \arrow[dr, "\overline{\mathbb{Q}}_\ell\otimes_{\mathbb{Q}_\ell}\mathrm{R}_\ell"'] & \mathbf{D}(\mathbf{A}_K) \arrow[d, "\overline{\mathbb{Q}}_\ell\otimes_{\mathbf{A}_K}-"] \\ & \mathbf{D}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{R}_{\text{new}}"] \arrow[dr, "\overline{\mathbb{Q}}_\ell\otimes_{\mathbb{Q}_\ell}\mathrm{R}_\ell"'] & \mathbf{D}(\mathbf{A}_K) \arrow[d, "\overline{\mathbb{Q}}_\ell\otimes_{\mathbf{A}_K}-"] \\ & \mathbf{D}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{tikzcd} \tag{3.21}$$

à isomorphismes naturels près. □

Définition 3.16. —

(1) On fixe un plongement complexe $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. On définit les nouvelles réalisations de type Betti

$$\mathrm{R}_{\mathrm{new},\,\mathrm{B}} : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{R}_{\mathrm{new},\,\mathrm{B}} \circ \mathrm{rel} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}}) \tag{3.22}$$

en remplaçant « $\mathscr{R}_K$ », « $\mathscr{A}_K$ » et « $\mathbf{A}_K$ » par « $\mathscr{R}_{K,\mathrm{B}}$ », « $\mathscr{A}_{K,\mathrm{B}}$ » et « $\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}}$ » dans la définition 3.14.

(2) On fixe une clôture algébrique $\overline{K}/K$, un nombre premier ℓ et un morphisme d'anneaux $\Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$. On définit les nouvelles réalisations de type ℓ-adique

$$\mathrm{R}_{\mathrm{new},\,\ell} : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A}_{K,\ell}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{R}_{\mathrm{new},\,\ell} \circ \mathrm{rel} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A}_{K,\ell}) \tag{3.23}$$

en remplaçant « $\mathscr{R}_K$ », « $\mathscr{A}_K$ » et « $\mathbf{A}_K$ » par « $\mathscr{R}_{K,\ell}$ », « $\mathscr{A}_{K,\ell}$ » et « $\mathbf{A}_{K,\ell}$ » dans la définition 3.14.

Lorsque cela n'entraîne pas confusion, on écrit « $\mathrm{R}_{\mathrm{new},\,\mathrm{B}/\ell}$ *» au lieu de «* $\mathrm{R}_{\mathrm{new},\,\mathrm{B}/\ell} \circ \mathrm{rel}$ *».*

Remarque 3.17. — Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k et fixons une clôture algébrique de $\widehat{K}$ (ce qui détermine une clôture algébrique de K). Fixons aussi un morphisme d'anneaux $\Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$. Alors les nouvelles réalisations de type ℓ-adique permettent de retrouver les réalisations ℓ-adiques sur $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$ et $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda)$. Plus précisément, on a des triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{R}_{\mathrm{new},\ell}"] \arrow[dr, "\mathrm{R}_\ell"'] & \mathbf{D}(\mathbf{A}_{K,\ell}) \arrow[d, "\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbf{A}_{K,\ell}} -"] \\ & \mathbf{D}(\mathbb{Q}_\ell) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathbf{DA}^{\text{ét}}(k;\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{R}_{\mathrm{new},\ell}"] \arrow[dr, "\mathrm{R}_\ell"'] & \mathbf{D}(\mathbf{A}_{K,\ell}) \arrow[d, "\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbf{A}_{K,\ell}} -"] \\ & \mathbf{D}(\mathbb{Q}_\ell) \end{tikzcd} \tag{3.24}$$

à isomorphismes naturels près. Ceci découle aussitôt des triangles (2.57) et (2.61). □

Remarque 3.18. — Les nouvelles réalisations introduites dans les définitions 3.14 et 3.16 se comparent entre elles. En effet, sous les hypothèses de la remarque 2.39, on a une chaîne de quasi-isomorphismes

$$\mathbb{C} \otimes_K \mathbf{A}_K \simeq \mathbb{C} \otimes_\Lambda \mathbf{A}_{K,\mathrm{B}} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_\Lambda \mathbf{A}_{K,\mathrm{B}} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbf{A}_{K,\ell} \tag{3.25}$$

ainsi qu'une chaîne d'isomorphismes naturels

$$\mathbb{C} \otimes_K \mathrm{R}_{\mathrm{new}}(-) \simeq \mathbb{C} \otimes_\Lambda \mathrm{R}_{\mathrm{new},\,\mathrm{B}}(-) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_\Lambda \mathrm{R}_{\mathrm{new},\,\mathrm{B}}(-) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathrm{R}_{\mathrm{new},\,\ell}(-) \tag{3.26}$$

entre foncteurs définis sur $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda)$. Ceci découle aussitôt de (2.58) et (2.59). □

3.4. Quelques conjectures. — Dans cette sous-section, on énonce trois conjectures. La première porte sur le complexe $\mathscr{A}_K$ et les deux autres sur l'anneau $\mathbf{A}_K$.

Conjecture 3.19. — *L'homologie du complexe $\mathscr{A}_K$ est nulle sauf en degré zéro.*

Conjecture 3.20. — *L'anneau $\mathbf{A}_K$ est intègre.*

Conjecture 3.21. — *Le morphisme $\int : \mathbf{A}_K \longrightarrow \widehat{K}$ est injectif lorsque l'extension $K/\mathbb{Q}$ est algébrique.*

Voici quelques remarques sur ces conjectures.

Remarque 3.22. — La conjecture 3.19 est une variante de [**5**, §2.4, Conjecture A]. Si l'on suppose que $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;K)$ et $\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};K)$ possèdent des t-structures motiviques pour lesquelles le foncteur Rig^* ainsi que les foncteurs de réalisation R_{dR} et $\mathrm{R}^\dagger_{\mathrm{dR}}$ sont t-exacts, alors la conjecture 3.19 est vraie. L'argument est le même que celui qui a servi dans la preuve de [**5**, Lemme 2.145] : $\mathscr{A}_K$ est la réalisation de de Rham de $\mathrm{Rig}_*\mathbf{1} \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;K)$ qui est un objet t-négatif puisque Rig^* est t-exact et que $\mathbf{1} \in \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};K)$ est dans le cœur. Ceci entraîne que $\mathrm{H}_i(\mathscr{A}_K) = 0$ pour $i > 0$ ce qui suffit pour conclure car $\mathscr{A}_K$ est (-1)-connexe d'après le corollaire 3.8. □

Remarque 3.23. — La conjecture 3.19 est connue dans le cas suivant : k est de caractéristique nulle et $K = k(\varpi)$ muni de la valuation ϖ-adique. Il s'agit alors de la première assertion dans [**6**, Théorème 2.49]. (Voir aussi l'erratum [**7**].) □

Remarque 3.24. — Une version plus faible de la conjecture 3.20 affirmerait que l'anneau $\mathbf{A}_K$ est connexe. Malheureusement, même la connexité semble hors de porté (pour K d'inégales caractéristiques). Il convient de noter ici que la K-algèbre $\mathbf{A}_K$ contient une clôture algébrique de K dans $\widehat{K}$. Ainsi, la K-algèbre $\mathbf{A}_K$ n'est pas géométriquement connexe en général, mais il est raisonnable de conjecturer qu'elle est géométriquement connexe (et même géométriquement intègre) lorsque K est algébriquement clos dans $\widehat{K}$. □

Remarque 3.25. — La conjecture 3.21 est évidement une version p-adique (avec p la caractéristique de k) de la fameuse conjecture des périodes de Kontsevich–Zagier [**27**, §4.1] comme reformulée dans [**9**, Conjecture 1.1]. Il s'agit donc d'une conjecture de transcendence p-adique qui, de nos jours, semble des plus difficiles. Cependant, rappelons que $\int : \mathbf{A}_K \longrightarrow \widehat{K}$ est bien injectif lorsque k est de caractéristique nulle et que $K = k(\varpi)$ muni de la valuation ϖ-adique ; il s'agit alors de [**11**, Théorème 1.7]. □

Remarque 3.26. — La conjecture 3.21 entraîne la conjecture 3.20 pour K algébrique sur $\mathbb{Q}$ et on peut bien imaginer que le cas général s'y ramène, du moins pour K d'inégales caractéristiques. Remarquons aussi que [**11**, Théorème 1.7] entraîne que la conjecture 3.20 est vraie lorsque k est de caractéristique nulle et que $K = k(\varpi)$ muni de la valuation ϖ-adique. □

4. Action du groupe de Galois motivique

Tout au long de la section, on fixe un corps K muni d'une valuation de hauteur 1 et on note $\widehat{K}$ son complété. On désigne par K° et $\widehat{K}^\circ$ les anneaux de valuation de K et $\widehat{K}$, et on note k le corps résiduel de K° qu'on identifie à celui de $\widehat{K}^\circ$. On suppose que la caractéristique de K est nulle et on ne fait pas d'hypothèses sur la caractéristique de k. On fixe une $\mathbb{Q}$-algèbre Λ.

Ici, nous allons munir la nouvelle réalisation de type Betti $\mathrm{R}_{\mathrm{new,B}}$ d'une action du groupe de Galois motivique de K. On fixe une fois pour toute un plongement complexe $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et on note $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K) = \mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K, \sigma; \mathbb{Q})$ le groupe de Galois motivique associé à σ ; voir [**5**, Définition 2.106].

Rappelons que $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K)$ est un $\mathbb{Q}$-schéma en groupes affine (i.e., un pro-groupe algébrique linéaire défini sur $\mathbb{Q}$) qui agit sur les Λ-modules $\mathrm{H}_i(\mathrm{R}_{\mathrm{B}}(M))$ pour tout $M \in \mathbf{DA}^{\mathrm{\acute{e}t}}(K; \Lambda)$ et $i \in \mathbb{Z}$. En particulier, $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K)$ agit sur la Λ-algèbre $\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}} = \mathrm{H}_0(\mathrm{R}_{\mathrm{B}}(\mathrm{Rig}_*\boldsymbol{\Lambda}))$. Étant donné $M \in \mathbf{RigDA}^{\mathrm{\acute{e}t}}(\widehat{K}; \Lambda)$, $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K)$ agit également sur les $\mathrm{H}_i(\mathrm{R}_{\mathrm{new,B}}(M)) = \mathrm{H}_i(\mathrm{R}_{\mathrm{B}}(\mathrm{Rig}_* M))$, pour $i \in \mathbb{Z}$, et cette action est compatible à la structure de $\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}}$-module sur $\mathrm{H}_i(\mathrm{R}_{\mathrm{new,B}}(M))$. (Ceci découle aussitôt du fait que ladite structure de module provient de l'action naturelle de l'algèbre $\mathrm{Rig}_*\boldsymbol{\Lambda}$ sur $\mathrm{Rig}_* M$.) On obtient ainsi un foncteur homologique

$$\mathrm{H}_0(\mathrm{Rig}_*(-)) : \mathbf{RigDA}^{\mathrm{\acute{e}t}}(\widehat{K}; \Lambda) \longrightarrow \mathbf{Rep}(\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K); \mathbf{A}_{K,\mathrm{B}}) \tag{4.1}$$

à valeurs dans la catégorie abélienne des $\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}}$-modules munis d'une action semi-$\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}}$-linéaire de $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K)$. Ladite catégorie abélienne est équivalente à la catégorie $\mathbf{QCoh}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}})$ des modules quasi-cohérents sur le champs d'Artin

$$\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}} = [\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K)\backslash \mathrm{Spec}(\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}})]. \tag{4.2}$$

L'objectif principal de cette section est de montrer que le foncteur homologique (4.1) provient naturellement d'un foncteur triangulé monoïdal

$$\widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{new,B}} : \mathbf{RigDA}^{\mathrm{\acute{e}t}}(\widehat{K}; \Lambda) \longrightarrow \mathbf{DQC}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}}) \tag{4.3}$$

à valeurs dans la catégorie homotopique des dg-modules quasi-cohérents sur le champs $\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}}$.

4.1. Rappels et compléments sur [10]. —

Dans [**10**], nous avons construit un foncteur

$$\underline{\mathrm{Bti}}^* : \mathbf{DA}^{\mathrm{\acute{e}t}}(K; \Lambda) \longrightarrow \mathbf{HocoMod}(\underline{\mathcal{H}}_{\mathrm{mot}}(K); \Lambda) \tag{4.4}$$

à valeurs dans les comodules homotopiques sur l'algèbre de Hopf motivique. Dans cette sous-section, nous allons rappeler et généraliser la construction de (4.4). (Il convient de noter ici qu'un foncteur comme ci-dessus a été construit par Nori [**17**], et on s'attend bien entendu à ce que les deux foncteurs soient compatibles modulo l'isomorphisme des groupes de Galois motiviques de [**14**, Theorem 9.1].)

Notation 4.1. — Dans [**10**, §7], on a construit une monade pseudo-monoïdale ${}^{\mathrm{a}}\mathbf{Sing}^{\mathbb{D}}_{\mathrm{\acute{e}t}}$ de la catégorie

$$\mathbf{Spt}^{\sharp}_{T}(\mathbf{Cpl}(\mathbf{PSh}(\mathrm{Sm}/K; \Lambda))) \tag{4.5}$$

qui modélise la monade pseudo-monoïdale $\mathrm{Bti}_*\mathrm{Bti}^*$ de la catégorie homotopique $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\Lambda)$; voir [**10**, Lemma 7.14, Theorem 7.16]. Dans la suite, nous écrivons « $\mathbf{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ » au lieu de « ${}^{\mathrm{a}}\mathbf{Sing}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ » afin d'alléger les notations. La description explicite de $\mathbf{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ ne sera pas utile ici et nous nous abstenons de la rappeler. On note $\widehat{\mathbf{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ l'endofoncteur pseudo-monoïdal consimplicial de la catégorie (4.5) associé à $\mathbf{Sg}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}$ comme dans [**10**, Construction 3.9]. □

Soit $\mathbf{1}_{\text{fib}}$ un remplacement stablement $(\mathbb{A}^1,\text{ét})$-fibrant de l'algèbre commutative $\mathrm{Sus}^0_{T,\sharp}(\mathbb{Q}_{\text{cst}})$ dans la catégorie (4.5). D'après [**10**, Theorem 8.3], la dg-algèbre cosimpliciale

$$\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K;\Lambda) = \Gamma(K;\widehat{\mathbf{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{1}_{\text{fib}})) \tag{4.6}$$

est une $\mathbb{Q}$-algèbre de Hopf homotopique au sens de [**10**, Definition 2.1]. De plus, étant donné un $\mathbf{1}_{\text{fib}}$-module $\mathbf{E}$ qui est stablement $(\mathbb{A}^1,\text{ét})$-fibrant (en tant que T-spectre commutatif), le $\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K)$-module

$$\underline{\mathrm{Bti}}^*(\mathbf{E}) = \Gamma(K;\widehat{\mathbf{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{E})) \tag{4.7}$$

est un comodule homotopique. Ceci permet de définir un foncteur monoïdal (4.4) qui factorise la réalisation de Betti. On utilisera la généralisation suivante de cette construction.

Construction 4.2. — On suppose donnée une algèbre commutative $\mathbf{R}$ dans la catégorie (4.5). Quitte à remplacer $\mathbf{R}$ par une algèbre stablement $(\mathbb{A}^1,\text{ét})$-localement équivalente, on peut supposer que $\mathbf{R}$ est une $\mathbf{\Lambda}_{\text{fib}}$-algèbre stablement $(\mathbb{A}^1,\text{ét})$-fibrante. (Ici $\mathbf{\Lambda}_{\text{fib}}$ est un remplacement stablement $(\mathbb{A}^1,\text{ét})$-fibrant de l'algèbre commutative $\mathrm{Sus}^0_{T,\sharp}(\Lambda_{\text{cst}})$ qu'on suppose muni d'une structure de $\mathbf{1}_{\text{fib}}$-algèbre.)

Le comodule homotopique $\underline{\mathrm{Bti}}^*(\mathbf{R}) = \Gamma(K;\widehat{\mathbf{Sg}}^{\mathbb{D}}_{\text{ét}}(\mathbf{R}))$ est naturellement une algèbre commutative dans la catégorie des comodules homotopiques sur $\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K)$. De plus, étant donné un $\mathbf{R}$-module $\mathbf{E}$ stablement $(\mathbb{A}^1,\text{ét})$-fibrant, le comodule homotopique $\underline{\mathrm{Bti}}^*(\mathbf{E})$ est naturellement un module sur $\underline{\mathrm{Bti}}^*(\mathbf{R})$. Autrement dit, on dispose d'un foncteur triangulé monoïdal

$$\underline{\mathrm{Bti}}^* : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{HocoMod}(\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K);\underline{\mathrm{Bti}}^*(\mathbf{R})) \tag{4.8}$$

vers la catégorie homotopique des modules homotopiques sur $\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K)$ munis d'une action de l'algèbre cosimpliciale $\underline{\mathrm{Bti}}^*(\mathbf{R})$ compatible à celle de $\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K)$. □

Pour aller plus loin, on fait l'hypothèse suivante sur $\mathbf{R}$.

Hypothèse 4.3. — Le complexe $\mathrm{Bti}^*(\mathbf{R})$ est (-1)-connexe, i.e., $\mathrm{H}_i(\mathrm{Bti}^*(\mathbf{R})) = 0$ pour $i \leqslant -1$. □

Proposition 4.4. —

(i) Le complexe $\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K)(\underline{\mathbf{n}})$ est (-1)-connexe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Sous l'hypothèse 4.3, le complexe $\underline{\mathrm{Bti}}^*(\mathbf{R})(\underline{\mathbf{n}})$ est (-1)-connexe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. — Étant donné que l'algèbre cosimpliciale $\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K)$ est une algèbre de Hopf homotopique, on a des quasi-isomorphismes canoniques

$$\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K)(\underline{\mathbf{n}}) \simeq \mathcal{H}_{\text{mot}}(K)^{\mathrm{L}\otimes n}.$$

L'assertion (i) découle alors de la (-1)-connexité du complexe $\mathcal{H}_{\text{mot}}(K)$; voir [**5**, Corollaire 2.105]. Par ailleurs, étant donné que $\underline{\mathrm{Bti}}^*(\mathbf{R})$ est un comodule homotopique sur $\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K)$, on a des quasi-isomorphismes canoniques

$$\underline{\mathrm{Bti}}^*(\mathbf{R})(\underline{\mathbf{n}}) \simeq \mathrm{Bti}^*(\mathbf{R}) \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K)(\underline{\mathbf{n}}),$$

ce qui fournit l'assertion (ii). ■

Construction 4.5. — Grâce à la proposition 4.4(i), on dispose de deux morphismes de $\mathbb{Q}$-algèbres de Hopf homotopiques :

$$\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K) \xleftarrow{\text{q.-i.}} \tau_{\geqslant 0}\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K) \longrightarrow \mathrm{H}_0(\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K)) = \mathrm{B}(\mathbf{H}_{\text{mot}}(K)) \tag{4.9}$$

et le premier est un quasi-isomorphisme. Bien entendu, $\mathbf{H}_{\text{mot}}(K) = \mathrm{H}_0(\mathcal{H}_{\text{mot}}(K))$ et $\mathrm{B}(-)$ désigne le foncteur « objet cosimplicial classifiant associé à une bialgèbre » comme dans [**10**, Construction 1.1]. On pose :

$$\underline{\mathrm{Bti}}'^*(-) = \mathrm{B}(\mathbf{H}_{\text{mot}}(K)) \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\tau_{\geqslant 0}\underline{\mathcal{H}}_{\text{mot}}(K)} \underline{\mathrm{Bti}}^*(-). \tag{4.10}$$

On déduit de (4.9) un foncteur monoïdal

$$\mathrm{B}(\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(K)) \overset{\mathrm{L}}{\underset{\tau_{\geqslant 0}\mathcal{H}_{\mathrm{mot}}(K)}{\otimes}} - : \mathbf{HocoMod}(\underline{\mathcal{H}}_{\mathrm{mot}}(K); \underline{\mathrm{Bti}}^*(\mathbf{R})) \longrightarrow \mathbf{HocoMod}(\mathrm{B}(\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(K)); \underline{\mathrm{Bti}}'^*(\mathbf{R})). \quad (4.11)$$

En composant (4.8) et (4.11), on obtient un foncteur monoïdal

$$\underline{\mathrm{Bti}}'^* : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K; \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{HocoMod}(\mathrm{B}(\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(K)); \underline{\mathrm{Bti}}'^*(\mathbf{R})). \quad (4.12)$$

Supposons maintenant que l'hypothèse 4.3 est satisfaite. Le complexe cosimplicial $\underline{\mathrm{Bti}}'^*(\mathbf{R})$ est alors (-1)-connexe en chaque degré cosimplicial (utiliser la proposition 4.4(ii)). Ainsi, on dispose de deux morphismes de comodules homotopiques sur $\mathrm{B}(\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(K))$:

$$\underline{\mathrm{Bti}}'^*(\mathbf{R}) \overset{\text{q.-i.}}{\longleftarrow} \tau_{\geqslant 0}\underline{\mathrm{Bti}}'^*(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{H}_0(\underline{\mathrm{Bti}}'^*(\mathbf{R})) \quad (4.13)$$

et le premier est un quasi-isomorphisme. On pose :

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathrm{H}_0(\underline{\mathrm{Bti}}'^*(\mathbf{R})). \quad (4.14)$$

On déduit de (4.13) un foncteur monoïdal

$$\underline{\mathbf{A}}\, {}^{\mathrm{L}}\!\otimes_{\tau_{\geqslant 0}\underline{\mathrm{Bti}}'^*(\mathbf{R})} - : \mathbf{HocoMod}(\mathrm{B}(\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(K)); \underline{\mathrm{Bti}}'^*(\mathbf{R})) \longrightarrow \mathbf{HocoMod}(\mathrm{B}(\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(K)); \underline{\mathbf{A}}). \quad (4.15)$$

En composant (4.12) et (4.15), on obtient un foncteur monoïdal

$$\underline{\mathrm{Bti}}''^* : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K; \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{HocoMod}(\mathrm{B}(\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(K)); \underline{\mathbf{A}}). \quad (4.16)$$

Par construction, les foncteurs (4.12) et (4.16) commutent aux sommes directes quelconques. □

À ce stade, il convient de noter le résultat bien connu suivant.

Lemme 4.6. — *Soit k un corps de caractéristique nulle et soit G un k-schéma en groupes affine agissant sur une k-algèbre A. Alors, on dispose d'un foncteur triangulé monoïdal*

$$\mathrm{B} : \mathbf{D}(\mathbf{Rep}(G); A) \longrightarrow \mathbf{HocoMod}(\mathrm{B}(\mathcal{O}(G)); \mathrm{B}(A)) \quad (4.17)$$

qui commute aux sommes quelconques. De plus, les catégories source et but dans (4.17) *possèdent des t-structures naturelles pour lesquelles le foncteur* B *est t-exact. Enfin, le foncteur* B *induit une équivalence*

$$\mathrm{B} : \mathbf{D}(\mathbf{Rep}(G); A)^+ \longrightarrow \mathbf{HocoMod}(\mathrm{B}(\mathcal{O}(G)); \mathrm{B}(A))^+ \quad (4.18)$$

entre les sous-catégories des complexes bornés à gauche.

Démonstration. — Il s'agit d'un cas particulier de [**20**, Chapter I.3, §2.4, Proposition 2.4.3]. En effet, la catégorie $\mathbf{HocoMod}(\mathrm{B}(\mathcal{O}(G)); \mathrm{B}(A))$ s'identifie à la catégorie homotopique des dg-modules quasi-cohérents sur le champs d'Artin $\mathcal{X} = [G\backslash \mathrm{Spec}(A)]$ désignée par « $\mathrm{QCoh}(\mathcal{X})$ » dans [**20**]. ■

Dans [**10**, page 1508] nous avons affirmé que le foncteur

$$\mathbf{D}(\mathbf{Rep}(\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K); \Lambda)) \longrightarrow \mathbf{HocoMod}(\mathrm{B}(\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(K)); \Lambda)$$

était pleinement fidèle, ce qui n'est pas justifié. (La pleine fidélité découlerait de la finitude de la dimension cohomologique de $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K)$ conjecturée si l'extension $K/\mathbb{Q}$ est de type fini.) Le lemme 4.6 permet de réparer cette affirmation si l'on se restreint aux complexes bornés à gauche. En particulier, on a le résultat suivant.

Corollaire 4.7. — *On suppose que l'hypothèse 4.3 est satisfaite et on pose* $\mathbf{A} = \mathrm{H}_0(\mathrm{Bti}^*(\mathbf{R}))$. *Alors,* $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K)$ *agit sur la* Λ*-algèbre* $\mathbf{A}$ *et on dispose d'un foncteur triangulé monoïdal*

$$\widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{B}} : \mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathrm{ct}}(K; \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathbf{Rep}(\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K); \mathbf{A})) \quad (4.19)$$

qui factorise la restriction de (4.16) *aux motifs constructibles.*

Démonstration. — Le foncteur (4.16) commute aux sommes quelconques et il associe à un motif constructible $M \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K; \mathbf{R})$ un comodule homotopique $\underline{\mathrm{Bti}}''^*(M)$ sur $\mathrm{B}(\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(K))$ tel que $\underline{\mathrm{Bti}}''^*(M)(\underline{\mathbf{0}}) = \mathrm{Bti}^*(M)$ est un complexe parfait de $\mathbf{A}$-modules et en particulier borné à gauche. Le résultat recherché est alors une conséquence immédiate du lemme 4.6. ■

4.2. Le cas de la nouvelle réalisation de type Betti. — Ici, on spécialise les constructions décrites dans la sous-section 4.1 au cas qui nous intéresse. On fixe un plongement complexe $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. On rappelle que la nouvelle réalisation de type Betti

$$\mathrm{R}_{\mathrm{new,B}} : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}})$$

est définie comme étant la composition de

$$\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \xrightarrow[\sim]{\widetilde{\mathrm{Rig}_*}} \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}) \xrightarrow{\mathrm{R_B}} \mathbf{Ho}(\mathbf{Mod}(\mathscr{A}_{K,\mathrm{B}})) \xrightarrow{\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}}\otimes_{\mathscr{A}_{K,\mathrm{B}}}-} \mathbf{D}(\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}}).$$

On peut enrichir cette nouvelle réalisation d'une action du groupe de Galois motivique comme suit.

Construction 4.8. — Considérons le Λ-champs d'Artin :

$$\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}} = [\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K)\backslash\mathrm{Spec}(\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}})]. \tag{4.20}$$

La catégorie homotopique $\mathbf{DQC}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}})$ des dg-modules quasi-cohérents sur $\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}}$ s'identifie à celle des comodules homotopiques sur $\mathrm{B}(\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(K))$ munis d'une structure de modules sur $\mathrm{B}(\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}})$:

$$\mathbf{DQC}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}}) = \mathbf{HocoMod}(\mathrm{B}(\mathbf{H}_{\mathrm{mot}}(K));\mathrm{B}(\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}})). \tag{4.21}$$

En prenant $\mathbf{R} = \mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}$ dans la construction 4.5, on obtient donc un foncteur monoïdal

$$\underline{\mathrm{Bti}}''^* : \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}) \longrightarrow \mathbf{DQC}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}}). \tag{4.22}$$

On définit le foncteur monoïdal

$$\widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{new,B}} : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{DQC}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}}) \tag{4.23}$$

comme étant la composition de

$$\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}(\widehat{K};\Lambda) \xrightarrow[\sim]{\widetilde{\mathrm{Rig}_*}} \mathbf{DA}^{\text{ét}}(K;\mathrm{Rig}_*\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{fib}}) \xrightarrow{\underline{\mathrm{Bti}}''^*} \mathbf{DQC}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}}). \tag{4.24}$$

Par construction, le foncteur $\widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{new,B}}$ factorise le foncteur $\mathrm{R}_{\mathrm{new,B}}$. □

Proposition 4.9. — *Il existe un foncteur monoïdal*

$$\widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{new,B}} : \mathbf{RigDA}^{\text{ét}}_{\mathrm{ct}}(\widehat{K};\Lambda) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathbf{QCoh}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}})) \tag{4.25}$$

qui factorise la restriction de (4.24) *aux motifs rigides constructibles.*

Démonstration. — Il s'agit d'un cas particulier du corollaire 4.7. ■

4.3. Quelques conjectures. — On fixe un plongement complexe $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et on suppose que $\Lambda = \mathbb{Q}$. Dans cette sous-section, on énonce deux conjectures. La première porte sur l'action du groupe de Galois motivique $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K)$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}})$. La deuxième concerne le foncteur (4.25).

Conjecture 4.10. — *L'action de* $\mathbf{G}_{\mathrm{mot}}(K)$ *sur le* $\mathbb{Q}$*-schéma* $\mathrm{Spec}(\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}})$ *est transitive.*

Remarque 4.11. — La conjecture 4.10 est équivalente à chacune des deux assertions suivantes.

(a) Le $\mathbb{Q}$-champs d'Artin $\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}}$ est une gerbe.
(b) La catégorie $\mathbf{Coh}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}})$ des modules quasi-cohérents de type fini sur $\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}}$ est tannakienne.

En fait, il est naturel de considérer la catégorie $\mathbf{Coh}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}})$ comme un candidat pour la catégorie tannakienne des motifs mixtes rigides sur $\widehat{K}$. On s'attend aussi à ce que la catégorie tannakienne des motifs mixtes sur k s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Coh}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}})$ formée des objets à bonne réduction. (Lorsque la valuation de K est discrète, on peut définir la notion de « bonne réduction » dans $\mathbf{Coh}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}})$ via les réalisations ℓ-adiques : on demande que le groupe d'inertie de $\widehat{K}$ agisse trivialement.) □

Proposition 4.12. — *La conjecture 4.10 entraîne que les nombres de Betti ℓ-adiques des motifs mixtes sur k ne dépendent pas de ℓ.*

Démonstration. — On fixe un motif $M \in \mathbf{DA}^{\text{ét}}_{\mathrm{ct}}(k;\mathbb{Q})$. Si le $\mathbb{Q}$-champs d'Artin $\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}}$ est une gerbe, les $\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}}$-modules $\mathrm{H}_i(\mathrm{R}_{\mathrm{new,B}}(M))$, pour $i \in \mathbb{Z}$, sont libres de rang constant sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{A}_{K,\mathrm{B}})$. Le résultat recherché découle alors des théorèmes de comparaison (voir les remarques 3.18 et 3.17). ■

Il est également naturel de faire la conjecture suivante qui renforce la remarque 4.11.

Conjecture 4.13. — *La catégorie* $\mathbf{Coh}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}})$ *est abélienne (ce qui est le cas si la conjecture 4.10 est vraie) et le foncteur* (4.25) *induit une équivalence de catégories :*

$$\mathbf{RigDA}^{\text{ét}}_{\text{ct}}(\widehat{K};\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(\mathbf{Coh}(\mathbf{X}_{K,\mathrm{B}})). \tag{4.26}$$

Références

[1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat. MR 0354654

[2] *Cohomologie l-adique et fonctions L*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5), Edité par Luc Illusie. MR 0491704

[3] Joseph Ayoub, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. II*, Astérisque (2007), no. 315, vi+364 pp. (2008). MR 2438151

[4] ———, *La réalisation étale et les opérations de Grothendieck*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **47** (2014), no. 1, 1–145. MR 3205601

[5] ———, *L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, I*, J. Reine Angew. Math. **693** (2014), 1–149. MR 3259031

[6] ———, *L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, II*, J. Reine Angew. Math. **693** (2014), 151–226. MR 3259032

[7] ———, *Second erratum à L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, II [mr3259032]*, J. Reine Angew. Math. **693** (2014), 227–230. MR 3259033

[8] ———, *Motifs des variétés analytiques rigides*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (2015), no. 140-141, vi+386. MR 3381140

[9] ———, *Une version relative de la conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier*, Ann. of Math. (2) **181** (2015), no. 3, 905–992. MR 3296818

[10] ———, *From motives to comodules over the motivic Hopf algebra*, J. Pure Appl. Algebra **221** (2017), no. 7, 1507–1559. MR 3614965

[11] ———, *La version relative de la conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier revisitée*, Preprint (2017).

[12] Federico Bambozzi and Alberto Vezzani, *Rigidity for rigid analytic motives*, Preprint (2018).

[13] Pierre Berthelot, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) (1986), no. 23, 3, 7–32, Introductions aux cohomologies p-adiques (Luminy, 1984). MR 865810

[14] Utsav Choudhury and Martin Gallauer Alves de Souza, *An isomorphism of motivic Galois groups*, Adv. Math. **313** (2017), 470–536. MR 3649230

[15] Denis-Charles Cisinski and Frédéric Déglise, *Mixed Weil cohomologies*, Adv. Math. **230** (2012), no. 1, 55–130. MR 2900540

[16] Pierre Deligne, *La conjecture de Weil. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1980), no. 52, 137–252. MR 601520

[17] Najmuddin Fakhruddin, *Notes of Nori's lectures on mixed motives*, T.I.F.R. (2000).

[18] Jean-Marc Fontaine, *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque (1994), no. 223, 59–111, With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). MR 1293971

[19] Eric Friedlander, *Étale homotopy of simplicial schemes*, Annals of Mathematics Studies, vol. 104, Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982. MR 676809

[20] Dennis Gaitsgory and Nick Rozenblyum, *A study in derived algebraic geometry. Vol. I. Correspondences and duality*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 221, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. MR 3701352

[21] Elmar Groß-Klönne, *Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf*, J. Reine Angew. Math. **519** (2000), 73–95. MR 1739729

[22] ———, *De Rham cohomology of rigid spaces*, Math. Z. **247** (2004), no. 2, 223–240. MR 2064051

[23] A. Grothendieck, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 29, 95–103. MR 0199194

[24] Roland Huber, *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics, E30, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996. MR 1734903

[25] Daniel Isaksen, *Étale realization on the $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes*, Adv. Math. **184** (2004), no. 1, 37–63. MR 2047848

[26] Steven Kleiman, *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Adv. Stud. Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 359–386. MR 292838

[27] Maxim Kontsevich and Don Zagier, *Periods*, Mathematics unlimited—2001 and beyond, Springer, Berlin, 2001, pp. 771–808. MR 1852188 (2002i :11002)

[28] James S. Milne and Niranjan Ramachandran, *Integral motives and special values of zeta functions*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), no. 3, 499–555. MR 2053950

[29] Joël Riou, *Dualité de Spanier-Whitehead en géométrie algébrique*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **340** (2005), no. 6, 431–436. MR 2135324 (2006a :14028)

[30] Alberto Vezzani, *The Monsky-Washnitzer and the overconvergent realizations*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2018), no. 11, 3443–3489. MR 3810223

[31] Vladimir Voevodsky, *Cancellation theorem*, Doc. Math. (2010), no. Extra vol. : Andrei A. Suslin sixtieth birthday, 671–685. MR 2804268

[32] David White, *Model structures on commutative monoids in general model categories*, J. Pure Appl. Algebra **221** (2017), no. 12, 3124–3168. MR 3666740

Joseph Ayoub,
Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstr. 190, CH-8057 Zürich, Switzerland
CNRS, LAGA, Université Paris 13, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France
• *E-mail :* `joseph.ayoub@math.uzh.ch`