*Dans ce papier , je vais essayer de prouver que dans la suite des itérés du carré antisymétrique d'une représentation linéaire d'un groupe fini sur un corps fini , on peut trouver à partir d'un certain rang , une représentation $H$ - régulière .*

**I - Notations , définitions et préliminaires :**

1- Dans ce qui suit $G$ ,$V$ et $\rho$ désignent respectivement un groupe fini , un $K$ - espace vectoriel , et une représentation de $G$ sur $V$ . Si $A \subset V$ on notera $vect(A)$ le sous-espace de $V$ engendré par $A$. Enfin on notera $|E|$ le cardinal d'un ensemble fini $E$ .

2- On note $AS(V)$ le sous-espace vectoriel de $V \otimes V$ engendré par $\{(x \otimes y - y \otimes x), (x, y) \in V^2\}$,et $AS(\rho)$ le carré antisymétrique de $\rho$ ( i.e. la restriction de $\rho \otimes \rho$ à $AS(V)$ ) . On note aussi $AS(u)$ le carré antisymétrique d'un endomorphisme $u$ de $V$ . Enfin si $B$ est une base ordonné de $V$ on note $AS(B)$ la base de $AS(V)$ égale à $\{(e \otimes f - f \otimes e), (e, f) \in B^2, e < f\}$ ordonnée par l'ordre lexicographique .

3- Si $H$ est un sous-groupe de $G$ ,on dit que $\rho$ est $H$ - régulière si $H = \rho^{-1}(K^* Id_V)$ , $\dim(V) = |G/H|$ et s'il existe $x \in V$ tel que le rang de $\{\rho(g)(x), g \in G\}$ soit égal à $|G/H|$.

4- Rem: Dans ce texte , une matrice sera indéxée (en général) par sa base ou par des ensembles canoniquement équipotents à cette base .

Voici maintenant quelques conséquences directes des définitions :

1- Si $M = (a_{kl})_{k,l \in B}$ ,alors $AS(M) = (a_{ki}a_{lj} - a_{kj}a_{li})_{k<l, i<j}$ .

2- Si $\dim(V) \geq 3$ et $M$ est inversible , alors $AS(M)$ est diagonale (resp. scalaire) si et seulement si $M$ est diagonale (resp. scalaire).

3- Si $S$ est la partie semisimple de $M$ , alors $AS(S)$ est la partie semisimple de $AS(M)$ .

4- Si $(\lambda_k)_{k \in B}$ sont les valeurs propres de $M$ notées avec multiplicités alors $(\lambda_i \lambda_j)_{i,j \in B; i<j}$ sont les valeurs propres de $M$ , notées avec leurs multiplicités .

5- $dim(AS(V)) = \frac{1}{2} dim(V)(dim(V) - 1)$

Je démontrerai le 2 les autres étant évidents :

Si $M$ est diagonale évidement $AS(M)$ aussi .Si $AS(M)$ est diagonale alors pour $(i, j, k, l) \in B^4$ , on a : $\{k, l\} \neq \{i, j\} \Rightarrow a_{ki}a_{lj} = a_{kj}a_{li}$ . Fixons $(k, l) \in B^2$ avec $k \neq l$ . Si $i \notin \{k, l\}$ , alors $a_{ki} = a_{li} = 0$, car si par exemple $a_{ki} \neq 0$ , alors $\forall j \in B$ , $\{k, l\} \neq \{i, j\}$ et donc $a_{lj} = \frac{a_{li}}{a_{ki}} \times a_{kj}$ et la matrice $M$ n'est plus inversible ce qui est faux . Mais comme $|B| \geq 3$ , pour tout $i \neq k$ on peut trouver $l \notin \{i, k\}$ et donc $a_{ki} = 0$ .

**II - Le Théorème 1 :**

Dans ce paragraphe $\dim V \geq 4$ et le corps $K$ est fini .

On définit la suite de représentations $(\rho_i)_{i \geq 0}$ de $G$ par récurrence comme suit :

$\rho_0 = \rho$ , $V_0 = V$ et pour $i \geq 0$ , $\rho_{i+1} = AS(\rho_i)$ , et $V_{i+1} = AS(V_i)$ .

**Théorème :** ***Il existe*** $N \in \mathrm{N}$ ***, et une base*** $B_N$ ***de*** $V_N$ ***tel que si l'on pose*** $B_{N+i+1} = AS(B_{N+i})$ ***pour*** $i \geq 0$ ***on ait la propriété suivante :***

$\forall k \in B_{N+i}$ **,** $\forall g \in G$ **,** ***si*** $\rho_{N+i}(g)(k)$ ***est colinéaire à*** $k$ **,** ***alors*** $\rho_{N+i}(g)$ ***est une homothétie .***

Preuve :

La preuve du théorème se fera en trois étapes :

1- La démonstration d'une inégalité (seul résultat de la partie qui sera utilisé dans la suite de la preuve) .

2- Construction de $B_N$ .

3- Vérification des propriétés .

Posons $H = \rho^{-1}(K^* Id_V)$ .

Etape 1 :

(1) Comme $\dim(V) \geq 4$, alors $\lim_{i\to\infty}(\dim(V_i)) = +\infty$ . Soit $K_0$ une extension finie de $K$ qui contient tous les valeurs propres des $\rho(g)$ avec $g \in G$ (et donc des $\rho_i(g)$, d'après **I**) . Si $H = G$ le théorème est clair . On suppose l'inclusion stricte et on choisit $g \in G$ tel que $\rho(g)$ ne soit pas scalaire (et donc $\rho_i(g)$ aussi) . On pose $S_i(g) = sp(\rho_i(g))$ (le spectre de $\rho_i(g)$) .

(2) $(|S_i(g)|)_{i\geq 0}$ est majorée par $|K_0|$, il existe donc $N_0$ tel que $S_{N_0}$ possède un élément $a_0$ de multiplicité supérieure à $4$ . On pose $S^0_{N_0} = \{\lambda / a_0, \lambda \in S_{N_0}(g)\}$ et pour $i \geq 0$ ,

$S^0_{N_0+i+1} = \{\lambda\gamma, (\lambda,\gamma) \in (S^0_{N_0+i})^2, \lambda \neq \gamma, ou, m_{g,N_0+i}(a_0^{2^i}\lambda) \geq 2\}$ avec $m_{g,j}(\lambda)$, la multiplicité de $\lambda$ par rapport à $\rho_j(g)$ .Comme $1 \in S^0_{N_0}$ et $m_{g,N_0}(a_0) \geq 4$, alors $S^0_{N_0+i} \subset S^0_{N_0+i+1} \subset K_0$ . Il existe alors $N_1 \geq N_0$ tel que $S^0_{N_1+1} = S^0_{N_1} (= K(g))$ .On vérifie facilement que :

- $S_{N_1+i}(g) = a^{2^i}.K(g)$ avec $a = a_0^{2^{N_1-N_0}}$

- $m_{g,N_1+i+1}(a^{2^{i+1}}) \geq \frac{1}{2} m_{g,N_1+i}(a^{2^i}) \times (m_{g,N_1+i}(a^{2^i}) - 1)$ et $m_{g,N_1}(a) \geq 4$ .

- Si $\lambda \in K(g) - \{1\}$ , $m_{g,N_1+i+1}(\lambda a^{2^{i+1}}) \geq m_{g,N_1+i}(a^{2^i}) \times m_{g,N_1+i}(\lambda a^{2^i})$ .

Il vient que : $\forall \gamma \in K(g)$ , $\lim_{i\to\infty} m_{g,N_1+i}(\gamma a^{2^i}) = +\infty$ . Il existe alors $\varphi : \mathrm{N} \mapsto \mathrm{N}^*$ tel que $\lim \varphi = +\infty$ et $\forall g \in G - H, \forall i \in \mathrm{N}, \forall \lambda \in sp(\rho_i(g)), \varphi(i) \leq m_{g,i}(\lambda)$ .

Si $g \in G - H$ , $\rho_i(g)$ admet au moins deux valeurs propres distinctes , et donc la codimension d'un espace propre est supérieur à $\varphi(i)$ .

(3) notons $V_i^{\lambda}(g)$ l'espace propre de $\rho_i(g)$ relatif à la valeur propre $\lambda$ . Posons $W_i = \bigcup_{g\in G-H} (\bigcup_{\lambda\in K} V_i^{\lambda}(g))$ .

On a : $|W_i| \leq \dfrac{|G| \times |K| \times |V_i|}{\varphi(i)}$ , et donc : $\lim_{i\to\infty} \dfrac{|W_i|}{|V_i|} = 0$ .

Fixons un entier $q > 2 \times |G|$ . Comme $C^q_{\dim(V_i)}$ est un polynôme de degré $q$ en $\dim V_i$ ,on peut trouver $N \in \mathrm{N}$ tel que : $\boxed{\dfrac{|W_N| + q \times C^q_{\dim(V_N)} \times |K|^{q\times|G|}}{|V_N|} < \dfrac{|K|-1}{|K|}}$. Nous allons montrer que $N$ convient .

En fait on va monter qu'on peut trouver $B_N$ une base de $V_N$, vérifiant la propriété :
$(P): \forall A \subset B_N, |A| \leq q \Rightarrow vect(A)$, n'est pas stable par aucun des $\rho_N(g)$ avec $g \in G - H$ .(En particulier on a l'assertion du théorème pour $i = 0$).

Etape 2 :

(1) En effet construisons $B_N = (x_i)$ ainsi : $x_1 \in V_N - W_N$, et pour $1 \leq i \leq dim(V_N) - 1$ ,
$x_{i+1} \in V_N - \left[ \left( \bigcup_{A \subset [1,i], |A| \leq q} vect(\rho_N(g)(x_k), k \in A, g \in G) \right) \bigcup W_N \bigcup vect(x_1, \ldots, x_i) \right]$.

(2) Montrons que les $x_i$ existent . $vect(\rho_N(g)(x_k), k \in A, g \in G)$ est de dimension inférieure à $q \times |G|$ , si $|A| \leq q$ . Donc $\left| \bigcup_{A \subset [1,i-1], |A| \leq q} vect(\rho_N(g)(x_k), k \in A, g \in G) \right| \leq |K|^{q \times |G|} \times q \times C^q_{\dim(V_N)}$, car le nombre des parties de cardinale inférieur à $q$ est inférieur à $q \times C^q_{\dim(V_N)}$ .

(3) Donc par le choix de $N$ , $\left| V_N - \left[ \left( \bigcup_{A \subset [1,i-1], |A| \leq q} vect(\rho_N(g)(x_k), k \in A, g \in G) \right) \bigcup W_N \right] \right| \geq \frac{|V_N|}{|K|} + 1$.
Enfin $vect(x_1, \cdots, x_{i-1})$ est stricte dans $V_N$ , sont cardinal est inférieur à $\frac{|V_N|}{|K|}$. Donc l'ensemble où on choisit $x_i$ est non vide .

Etape 3 :

(1) Montrons que $B_N$ possède la propriété $(P)$ .
Si $g \in G - H$ , alors $\rho_N(g)(x_i) \notin vect(x_i)$ pour tout $i \in [1, \dim(V_N)]$ car par définition , $x_i \notin W_N$ .
Procédons par récurrence sur le cardinal de $A \subset [1, \dim(V_N)]$ : Si $|A| = p \leq q$, posons $m = \max(A)$, et $A' = A - \{m\}$ . Soit $g \in G - H$, tel que $\rho_N(g)(vect(x_k, k \in A)) = vect(x_k, k \in A)$. Par hypothèse de récurrence $\rho_N(g)(vect(x_k, k \in A')) \neq vect(x_k, k \in A')$. Il vient que : $vect(x_k, k \in A) = vect(x_k, k \in A') + \rho_N(g)(vect(x_k, k \in A'))$ . Mais alors on a : $x_m \in vect(\rho_N(1)(x_k), \rho_N(g)(x_k), k \in A')$, ce qui contredit la définition de $x_m$ .

(2) Il nous reste à montrer que les bases $B_{N+i}$ , vérifient $(P)$ . Je le ferai pour $B_{N+1}$ (la démonstration se fait de la même manière par récurrence) .
On supposera $B_N$ munie d'un ordre total quelconque . Soit $g \in G - H$ . On suppose par l'absurde qu'il existe : $(k_1, l_1), \cdots, (k_p, l_p) \in (B_N)^2$ (avec $p \leq q$ ) deux à deux distincts tels que : $k_i < l_i$, avec : $\rho_{N+1}(g)(vect(k_i \otimes l_i - l_i \otimes k_i, i \in [1, p])) = vect(k_i \otimes l_i - l_i \otimes k_i, i \in [1, p])$ .
Cela se traduit sur la matrice $(a_{uv})_{u,v \in B}$ de $\rho_N(g)$ par les équations : $a_{uk_i} a_{vk_j} = a_{vk_i} a_{uk_j}$ si $\{u, v\} \notin \{\{k_i, l_i\}, i \in [1, p]\}$ (*) .

(3) Je dis que : $\forall u \in B_N - \{l_i, k_i, i \in [1, p]\}$ , $a_{uk_i} = a_{ul_i} = 0$. En effet supposons $a_{u_0 k_i} \neq 0$ pour un certains $u_0 \notin \{k_i, l_i, i \in [1, p]\}$ . Alors $\forall v \in B_N$ , $a_{vk_i} a_{u_0 l_i} = a_{u_0 k_i} a_{vl_i}$ , et donc $a_{v,l_i} = \frac{a_{u_0 l_i}}{a_{u_0 k_i}} a_{vk_i}$ .
Mais cela est impossible car la matrice est inversible et $l_i \neq k_i$ .

(4) Pour $(i,j)\in[1,p]^2$, on pose $A_{i,j}=\begin{pmatrix} a_{k_ik_j} & a_{k_il_j} \\ a_{l_ik_j} & a_{l_il_j}\end{pmatrix}$. Soit $M$ la matrice définie par blocs par :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pp}\end{pmatrix}.$$

Je dis que : $\forall i\in[1,p]$, il existe un unique $\sigma(i)\in[1,p]$, tel que $A_{\sigma(i)i}\neq 0$.

Je le ferai pour $i=1$. On pose pour $i\in[1,p]$, $L_{2i-1}=(a_{k_ik_1},a_{k_il_1})$ et $L_{2i}=(a_{l_ik_1},a_{l_il_1})$. Supposons qu'il existe deux lignes $L_i$ et $L_j$ non nulles n'appartenant pas à une même matrice $A_{k1}$. D'après (*) $\det(L_i,L_j)=0$. Donc $L_i$ et $L_j$ sont proportionnelles. Soit $L_r$ une ligne quelconque. Evidemment on a : $\det(L_r,L_i)=0$ ou $\det(L_r,L_j)=0$. Dans les deux cas $L_r$ est colinéaire à $L_i$. Donc tous les lignes $L_r$ sont proportionnelles et donc aussi les $k_1$ et $l_1$ - colonnes de la matrice de $\rho_N(g)$, ce qui est absurde.

(5) $\sigma$ est une permutation de $[1,p]$. En effet elle est injective, car si $\sigma(i)=\sigma(j)$, $\rho_N(g)$ contient les colonnes de la transposée de la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{k_{\sigma(i)}k_i} & a_{l_{\sigma(i)}k_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k_{\sigma(i)}l_i} & a_{l_{\sigma(i)}l_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k_{\sigma(i)}k_j} & a_{l_{\sigma(i)}k_j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k_{\sigma(i)}l_j} & a_{l_{\sigma(i)}l_j} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Mais si $i\neq j$, nécessairement $\left|\{k_i,k_j,l_i,l_j\}\right|\geq 3$, ce qui montre que $\rho_N(g)$ contient trois colonnes liées ce qui est impossible.

(6) Les vecteurs $k_1,\cdots,k_p,l_1,\cdots,l_p$ sont deux à deux distincts. En effet si $\{k_i,l_i\}\bigcap\{k_j,l_j\}$ est non vide, comme $A_{\sigma(i)i}$ est inversible alors $\begin{pmatrix} a_{k_{\sigma(i)}k_i} \\ a_{l_{\sigma(i)}k_i}\end{pmatrix}\neq 0$ et $\begin{pmatrix} a_{k_{\sigma(i)}l_i} \\ a_{l_{\sigma(i)}l_i}\end{pmatrix}\neq 0$. Ainsi d'après (4) $\sigma(i)=\sigma(j)$. Donc $i=j$. Enfin $k_i\neq l_i$, d'où le résultat.

(7) On déduit du (6) que $M$ est un sous matrice de $\rho_N(g)$ et d'après (3) $M$ est la restriction de $\rho_N(g)$ à $vect(k_i\otimes l_i-l_i\otimes k_i, i\in[1,p])$. Si $\omega(x)$ désigne l'ordre de $x$ on a alors : $\omega(M)\big|\omega(g)\big|G\big|$, mais $\omega(\sigma)\big|\omega(M)$, on en déduit que $\omega(\sigma)\big|G\big|$, ( $a|b\Leftrightarrow a$ divise $b$ ).

(8) Enfin toute orbite de $\sigma$ est de longueur strictement supérieur à $q/2$, car $vect(D)$ ou $D=\{k_{\sigma^n(i)},l_{\sigma^n(i)},n\in\mathrm{N}\}$ est stable par $\rho_N(g)$, et si l'orbite de $i$ est de longueur inférieur à $q/2$ alors $|D|\leq q$, ce qui est en contradiction avec la propriété de $B_N$.

(9) On arrive enfin a la contradiction finale :
D'après (8) $\omega(\sigma)>q/2\geq|G|$, mais d'après (7) $\omega(\sigma)\leq|G|$.

Le théorème 1 est démontré !

**III – Le théorème 2 :**

Dans ce paragraphe $K$ est un corps fini , et $(\rho_i, V_i)_{i\geq 0}$ est définie par : $\rho_0 = \rho$ , $V_0 = V$ , $dim(V) \geq 4$ , et pour $i \geq 0$ , $\rho_{i+1} = AS(\rho_i)$ , $V_{i+1} = AS(V_i)$ . $H = \rho^{-1}(K^* Id_V)$ .
On commence par prouver 4 lemmes qui seront utilisés au cours de la preuve du théorème 2 :

**Lemme 1 :** ***Soit*** $E$ ***un ensemble fini et*** $a \in \mathrm{N}$ ***tel que*** $a < |E|$ ***. Soit*** $\Re$ ***une relation antiréflexive (i.e.*** $\forall x \in E, x(\neg\Re)x$ ***) et symétrique sur*** $E$ ***, tel que :*** $\forall A \subset E, |A| = a \Rightarrow \forall i \in E, \exists j \in E, i\Re j$ ***. Alors :*** $|\{\{i, j\} \subset E, i\Re j\}| \geq \frac{1}{2}|E|(|E| - a)$ .

Preuve :

$|\{\{x, i\}, x\Re i\}| \geq |E| - a$ , car sinon on peut former une partie $A$ de cardinal $a$ , contenant $x$ ,tel que : $\forall i \in A, x(\neg\Re)i$ , ce qui est impossible .
$|\{\{i, j\} \subset E, i\Re j\}| = \frac{1}{2}|\{(i, j) \in E^2, i\Re j\}| = \frac{1}{2}\sum_{x\in E}|\{i \in E, x\Re i\}| \geq \frac{1}{2}\sum_{x\in E}(|E| - a) = \frac{1}{2}|E|(|E| - a)$ .

**Lemme 2 :** ***Soit*** $M = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ ***. On associe à*** $M$ ***, l'application*** $M'$ ***définie par*** $M' : (K^p)^m \mapsto (K^p)^n$ , $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (\sum_{i=1}^{m} a_{1i}x_i, \cdots, \sum_{i=1}^{m} a_{ni}x_i)$ ***. Si*** $M$ ***est injective*** $M'$ ***aussi . Si*** $\ker(M) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m).K$ ***, alors*** $\ker(M') = \{(\lambda_1 x, \cdots, \lambda_m x), x \in K^p\}$ .

Preuve : évident !

**Lemme 3 :** ***Soient*** $M, N \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ , $M$ ***injective , et*** $M', N' : (K^p)^m \mapsto (K^p)^n$ ***. Soient*** $(x_1, \cdots, x_m)$ ***et*** $(y_1, \cdots, y_m)$ ***deux familles de*** $K^p$ ***, tel que*** $M'(x_1, \cdots, x_m) = N'(y_1, \cdots, y_m)$ ***, alors :*** $vect(x_1, \cdots, x_m) \subset vect(y_1, \cdots, y_m)$ .

Preuve :
Soit $M_0$ une sous matrice carrée de $M$ , inversible , de taille $m$ (possible car $M$ est de rang $m$ ) . Soit $N_0$ la sous matrice de $N$ obtenu en gardant les mêmes lignes que $M_0$ .
Evidemment $(M_0)'(x_1, \cdots, x_m) = (N_0)'(y_1, \cdots, y_m)$ .
Montrons que : $vect(x_1, \cdots, x_m) = vect((M_0)'(x_1, \cdots, x_m))$ . il est clair que $vect((M_0)'(x_1, \cdots, x_m))$ est inclus dans $vect(x_1, \cdots, x_m)$ car $(M_0)'(x_1, \cdots, x_m)$ est un $m$ -uplet formé de combinaisons linéaires des vecteurs $(x_i)$ . D'autre part $vect((M_0^{-1})'(M_0)'(x_1, \cdots, x_m)) \subset vect((M_0)'(x_1, \cdots, x_m))$ , ce qui fournit l'inclusion réciproque .
On a donc $vect(x_1, \cdots, x_m) = vect((N_0)'(y_1, \cdots, y_m)) \subset vect(y_1, \cdots, y_m)$ .
Rem : Si $N$ est injective ,les rôles étant symétriques il y a égalité .

**Lemme 4 :** ***Soient*** $M, N \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ ***de rang*** $m-1$ ***, tel que*** $\ker(M) = \ker(N) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)K$**.**
***Soient*** $(x_1, \cdots, x_m)$ ***et*** $(y_1, \cdots, y_m)$ ***deux familles de*** $K^p$ ***, tel que :*** $M'(x_1, \cdots, x_p) = N'(y_1, \cdots, y_m)$**.**
***Alors il existe*** $z \in K^p$ ***, et des scalaires*** $h_j^i$***, tel que :*** $\forall i \in [1, m], x_i = \lambda_i z + \sum_{j=1}^{m} h_i^j y_j$ .

Preuve :
Soit $P \in \mathrm{M}_{m,m}(K)$, inversible tel que $M = M_1 P$, $N = N_1 P$ et $\ker(M_1) = \ker(N_1) = (1,0,\cdots,0)K$.
Montrons le lemme pour $M_1$ et $N_1$ : Si $(M_1)'(x_1^0, \cdots, x_m^0) = (N_1)'(y_1^0, \cdots, y_m^0)$, alors
$(M_1)'(0, x_2^0, \cdots, x_m^0) = (N_1)'(0, y_2^0, \cdots, y_m^0)$ .
D'après le lemme 3 , $vect(x_2^0, \cdots, x_m^0) = vect(y_2^0, \cdots, y_m^0)$ . Posons $z = x_1^0 - y_1^0$ , alors il est facile de trouver des scalaires $h_i^j$ , tel que $x_i^0 = \delta_{1i} z + \sum_{j=1}^{m} h_i^j y_j^0$ ( $\delta_{ij}$ symbole de Kronécker) .
Passons au cas général : Posons $(x_1^0, \cdots, x_m^0) = P'(x_1, \cdots, x_m)$ et $(y_1^0, \cdots, y_m^0) = P'(y_1, \cdots, y_m)$ .
Il vient que $(M_1)'(x_1^0, \cdots, x_m^0) = (N_1)'(y_1^0, \cdots, y_m^0)$ . Donc :
$$(x_1, \cdots, x_m) = (P^{-1})'(x_1^0, \cdots, x_m^0) = (P^{-1})'(\delta_{11} z + \sum_{j=1}^{m} h_1^j y_j^0, \cdots, \delta_{1m} z + \sum_{j=1}^{m} h_m^j y_j^0) = P^{-1}(1,0,\cdots,0)z + \cdots$$
D'où le résultat puisque $\ker(M) = P^{-1}(1,0,\cdots,0)K$ et le terme restant est combinaison linéaire des $(y_i)$.

**Théorème 2 :** ***Il existe*** $N \in \mathrm{N}$ ***, tel que pour tout*** $n \geq N$ **,** $\rho_n$ ***contient une représentation*** $H$ **-** ***régulière*** **.**

Preuve :
Quitte à remplacer $\rho$ par un autre élément de la suite $(\rho_i)_{i \geq 0}$ , on peut supposer grâce au théorème 1 que $V_0$ est muni d'une base $B_0$ tel que si l'on pose $B_{i+1} = AS(B_i)$ pour $i \geq 0$ on ait :
$\forall i \geq 0, \forall g \in G, \forall k \in B_i, \forall \lambda \in K^*, (\rho_i(g)(k) = \lambda.k \Rightarrow \rho_i(g) = \lambda.Id_{V_i})$ .
Introduisons quelques notations :

- $(x_{kl}^g)$ où $(k,l) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} (B_i)^2$, tel que pour tout $n \in \mathrm{N}$ , $(x_{kl}^g)_{k,l \in B_n}$ soit la matrice de $\rho_n(g)$ dans $B_n$ .
- $(C_l^g)$ , la famille indexée par $\bigcup_{i=0}^{n} B_i$ , tel que pour tout $n \in \mathrm{N}$ , $C_l^g$ (avec $l \in B_n$ ) soit la $l$ -ième colonne de $\rho_n(g)$ .
- On notera $x \Delta y = x \otimes y - y \otimes x$ . Si $J \subset G$ , on note $\Lambda_n(J)$ le sous ensemble de $B_n$ formé par les vecteurs $k$ , pour lesquels la famille $(C_k^g)_{g \in J}$ est libre .
- On pose enfin $a = (2|K|)^{|G|}$ .

Il suffit de montrer qu'à partir d'un certain rang , il existe $k \in B_n$ tel que $(C_k^g)_{g \in G}$ est de rang $|G/H|$ , car alors $\{\rho_n(g)(k), g \in G\}$ est de rang $|G/H|$ .
On va procéder par l'absurde on supposant qu'il existe $b \in \mathrm{N}$ , $b < |G/H|$ , tel que :
$\forall n \in \mathrm{N}, \forall J \subset G, |J| > b \Rightarrow |\Lambda_n(J)| \leq 2a$ .

On suppose que $b$ est le plus petit possible , et on fixe $J$ dans $G$ de cardinal $b$ tel que $|\Lambda_n(J)| \geq 2a$ pour un certain $n$ , qu'on supposera nul dans la suite .

Etape 1 : $\forall i \geq 0, |\Lambda_i(J)| \geq 2a$ et en fait $\lim_{i\to\infty} |\Lambda_i(J)| = +\infty$ .

On fait cela par récurrence sur $i$ (pour $i = 0$ , c'est vrai) .

(1) Soit $(k,l) \in (\Lambda_i(J))^2$ , $k < l$ (pour l'ordre de $B_i$ ) .

Supposons que $(C^g_{k\Delta l})_{g\in J}$ soit liées , et soit $(\lambda_p)_{p\in J} \in K^J$ , différente de la famille nulle tel que :

$\sum_{p\in J} \lambda_p (x^p_{ik} x^p_{jl} - x^p_{jk} x^p_{il}) = 0$ , pour tout $(i,j) \in (B_i)^2$ . Soit $J_0 = \{p \in J, \lambda_p \neq 0\}$ , non vide . On a : $\sum_{p\in J_0} \lambda_p x^p_{ik} C^p_l = \sum_{p\in J_0} \lambda_p x^p_{il} C^p_k$ . La matrice $(\lambda_p x^p_{ik})_{i\in B_n, p\in J_0}$ est de rang $|J_0|$ , car $(C^p_k)_{p\in J_0}$ est libre .

D'après le lemme 3 , $vect(C^p_l, p \in J_0) = vect(C^p_k, p \in J_0)$ .

(2) On définit la relation $\Re$ sur $\Lambda_i(J)$ par :

$\forall (k,l) \in (B_i)^2, k\Re l \Leftrightarrow \forall J_0 \subset J$ ,( $J_0$ non vide), $vect(C^p_l, p \in J_0) \neq vect(C^p_k, p \in J_0)$ .

Evidemment $\Re$ est antiréflexive et symétrique . De plus d'après (1) , $k\Re l, k < l \Rightarrow k\Delta l \in \Lambda_{i+1}(J)$ .

(3) Soit $A$ une partie de $\Lambda_i(J)$ , $|A| = a$ ; fixons $k \in A$ et montrons qu'il existe $l \in A$, tel que $k\Re l$ .

Supposons par l'absurde que :

$\forall l \in A, \exists J^l_0 \subset J$ non vide tel que $vect(C^p_l, p \in J^l_0) = vect(C^p_k, p \in J^l_0)$ . Les $J^l_0 \subset J$ sont en nombre fini ($\leq 2^{|G|-1}$) . Il existe alors d'après le lemme de bergers , $J^*_0 \subset J$ , tel que :

$\left|\left\{l \in A - \{k\}, vect(C^p_k, p \in J^*_0) = vect(C^p_l, p \in J^*_0)\right\}\right| \geq a/(2^{|G|-1}) = 2|K|^{|G|}$ .

Soit $q \in J^*_0$, fixé . Comme $C^q_l \in vect(C^p_k, p \in J^*_0)$ si $l$ est dans l'ensemble ci-dessus , et que :

$|vect(C^p_k, p \in J^*_0)| \leq |K|^{|G|}$, d'après le lemme des bergers , il existe $l_1$ et $l_2$ distincts tel que $C^q_{l_1} = C^q_{l_2}$ , ce qui est absurde car $\rho_i(q)$ est inversible .

(4) On conclut maintenant à l'aide du lemme 1 .

Etape 2 :

Notre position est : $\exists J \subset G, |J| = b$ , tel que $\lim_{n\to\infty} |\Lambda_n(J)| = +\infty$ . Par le choix de $b$ , si $p_0 \notin J$ , les familles $\{C^{p_0}_k\} \cup \{C^p_k, p \in J\}$ avec $k \in \Lambda_n(J)$ , sont presque toujours liées (sauf peut être pour un nombre inférieur à $2a$ ) .

(1) il existe $p_0 \notin J$ tel que $C^{p_0}_k$ ne soit proportionnel à $C^p_k$ , pour tout $p \in J$ et $k \in B_n$ .

Supposons le contraire : Donc $\forall p_0 \notin J, \exists k \in B_n, \exists p \in P, \exists \lambda \in K, C^{p_0}_k = \lambda C^p_k$ . Il vient que

$\rho_n(p_0)(k) = \lambda \rho_n(p)(k) \Leftrightarrow \rho_n(p_0 p^{-1})(k) = \lambda k \Rightarrow p_0 p^{-1} \in H$ .

Ainsi $J$ contient un système de représentant de $G/H$ , ce qui est absurde car $|J| < |G/H|$ .

Fixons $p_0 \notin J$ ainsi .

(2) Pour $n$ assez grand on peut définir $\Lambda_n^*(J) \subset \Lambda_n(J)$ , tels que $\lim_{n\to\infty} \left|\Lambda_n^*(J)\right| = +\infty$ , et pour $n$ fixé :

(a) $\forall (k,l) \in \Lambda_n^*(J)^2, k \neq l \Rightarrow \forall J_0 \subset J$, (non vide), $vect(C_k^p, p \in J_0) \neq vect(C_l^p, p \in J_0)$ .

(b) $C_k^{p_0} = \sum_{p\in J} \alpha_p C_k^p$ , $(\alpha_p)$ indépendante de $k \in \Lambda_n^*(J)$ .

Rem : - Les $(\alpha_p)$ dépendent de $n$ .

– D'après (a) , et l'argumentation de l'étape 1 , $\forall (k,l) \in \Lambda_n^*(J)^2, k < l$ , la famille $(C_{k\Delta l}^p)_{p\in J}$ est libre .

(3) Je démontrerai le (a) , le (b) découle facilement par application du lemme des bergers à l'ensemble $\Lambda_n^0(J)$ ci dessous :

Soit $n$ tel que $\left|\Lambda_n(J)\right| \geq a^{2^{|G|}} \times d$ , alors il existe $\Lambda_n^0(J) \subset \Lambda_n(J)$ , $\left|\Lambda_n^0(J)\right| \geq d$ , vérifiant la propriété du (a) . Soit $\{J_1, \cdots, J_m\}$ l'ensemble des parties non vides de $J$ . On forme $\Lambda_{n,i}$ , par récurrence ainsi : $\Lambda_{n,0} = \Lambda_n(J)$ , pour $i+1$ , les classes d'équivalence de la relation $\Re$ définie par : $k\Re l \Leftrightarrow vect(C_k^p, p \in J_{i+1}) = vect(C_l^p, p \in J_{i+1})$ sont de cardinales inférieur à $a$ , à cause de l'inversibilité des $\rho_n(g)$ . Donc il existe $\Lambda_{n,i+1}$ de cardinal supérieur à $\frac{\left|\Lambda_{n,i}\right|}{a}$ , tel que : $\forall (k,l) \in (\Lambda_{n,i+1})^2\ k \neq l \Rightarrow vect(C_k^p, p \in J_{i+1}) \neq vect(C_l^p, p \in J_{i+1})$ (il suffit de choisir un élément dans chaque classe) . Maintenant on prend $\Lambda_n^0(J) = \Lambda_{n,m}$ .

Etape 3 : Dans cette étape on fixe $n \in \mathrm{N}$ suffisamment grand .

On pose $k = \min(\Lambda_n^*(J))$ (pour l'ordre de $B_n$ ) .

(1) Pour presque tout $l \in \Lambda_n^*(J) - \{k\}$ , on a : $C_{k\Delta l}^{p_0} = \sum_{p\in J} \lambda_p^l C_{k\Delta l}^p$ , avec $\lambda_p^l \in K$ . Les $(\lambda_p^l)_{p\in J}$ , sont en nombre fini , d'après le lemme des bergers , il existe $\Omega_n(J) \subset \Lambda_n^*(J)$ , tel que $\lim_{n\to\infty} \left|\Omega_n(J)\right| = +\infty$ , et pour tout $l \in \Omega_n(J)$, on a : $C_{k\Delta l}^{p_0} = \sum_{p\in J} \lambda_p C_{k\Delta l}^p$ , les $\lambda_p$ , indépendants de $l$ .

(2) Avant d'aller plus loin , notons que pour $n$ assez grand on a : $\lambda_p = 0 \Rightarrow \alpha_p = 0$ .

En effet supposons qu'il existe $p_1 \in J$ , tel que $\lambda_{p_1} = 0$ mais $\alpha_{p_1} \neq 0$ . Il vient de $C_l^{p_0} = \sum_{p\in J} \alpha_p C_l^p$ et de $C_{k\Delta l}^{p_0} = \sum_{p\in J-\{p_1\}} \lambda_p C_{k\Delta l}^p$ , que $\{C_{k\Delta l}^{p_0}\} \cup \{C_{k\Delta l}^p, p \in J - \{p_1\}\}$ est liée et $\{C_l^{p_0}\} \cup \{C_l^p, p \in J - \{p_1\}\}$ est libre pour $l \in \Omega_n(J)$. Si $n$ est suffisamment grand on peut reprendre l'argumentation de l'étape 1 , pour aboutir à une contradiction .

(3) d'après (1) : $\forall (k,l) \in \Omega_n(J)^2$ , on a :

$\sum_{p\in J} (\sum_{q\in J} \alpha_p \alpha_q x_{ik}^q - \lambda_p x_{ik}^p) x_{jl}^p = \sum_{p\in J} (\sum_{q\in J} \alpha_p \alpha_q x_{il}^q - \lambda_p x_{il}^p) x_{jl}^p$ (*).

(4) Soit $J_0 = \{p \in J, \lambda_p \neq 0\}$ . D'après (*) : $\sum_{p\in J_0} \psi_{ik}^p C_l^p = \sum_{p\in J_0} \psi_{il}^p C_k^p$ , où $\psi_{il}^p = \sum_{q\in J_0} \alpha_p \alpha_q x_{il}^q - \lambda_p x_{il}^p$ , et cela pour $i \in B_n$ et $l \in \Omega_n(J)$ .Il vient de (a) et du lemme 3 que la matrice $(\psi_{il}^p)_{p\in J_0, i\in B_n}$ , n'est pas injective et donc de rang strictement inférieur à $|J_0|$ pour tout $l \in \Omega_n(J) \bigcup \{k\}$.

(5) On peut donc trouver $(\mu_p)_{p\in J_0}$ des scalaires , tel que : $\sum_{p\in J_0} \mu_p (\sum_{q\in J_0} \alpha_p \alpha_q x_{il}^q - \lambda_p x_{il}^p) = 0$ , soit :

$\sum_{p\in J_0} (\sum_{q\in J_0} \mu_q \alpha_q \alpha_p) C_l^p = \sum_{p\in J_0} \mu_p \lambda_p C_l^p$ . On en déduit que $(\sum_{q\in J_0} \mu_q \alpha_q)\alpha_p = \mu_p \lambda_p$ .

(6) Comme $\mu_p \lambda_p \neq 0$ pour un certain $p \in J_0$ , on peut supposer $\sum_{q\in J_0} \mu_q \alpha_q = 1$ , il vient que $\mu_p = \frac{\alpha_p}{\lambda_p}$ .

Alors les $\mu_p$ sont uniques et ne dépendent pas de $l$ , car les $\alpha_p, \lambda_p$ sont uniques et ne dépendent pas de $l$ . Donc le rang des matrices $(\psi_{il}^p)_{p\in J_0, i\in B_n}$ est exactement $|J_0| - 1$ .

(7) Il existe $(Y_l)_{l\in\Omega_n(J)}$ , tel que : $\forall l \in \Omega_n(J)^2$ , on a : $C_l^p = \frac{\alpha_p}{\lambda_p} Y_l + \sum_{q\in J_0} h_q^p C_k^q$ , avec $h_q^p \in K$ ,

(les $h_q^p$ dépendent de $l$ ). En effet cela découle du (6) et du lemme 4 , puisque $(\mu_p)_{p\in J_0}$ est dans le noyau des matrices $(\psi_{il}^p)$ .

(8) $\left|\{h_p^q, (p,q) \in (J_0)^2\}\right| \leq |K|^{|G|^2}$ . Il existe si $n$ est suffisamment grand , $(l,l') \in \Omega_n(J)$ , $l \neq l'$ , tel que : $C_l^p = \frac{\alpha_p}{\lambda_p} Y_l + \sum_{q\in J_0} h_q^p C_k^q$ , et $C_{l'}^p = \frac{\alpha_p}{\lambda_p} Y_{l'} + \sum_{q\in J_0} h_q^p C_k^q$ , c'est à dire les scalaires de passages sont les même pour $l$ et $l'$ .

Il vient que $C_{l'}^p = C_l^p + \frac{\alpha_p}{\lambda_p}(Y_{l'} - Y_l)$ par soustraction des deux égalités .

On pose $\Phi_n(l) = \left\{ l' \in \Omega_n(J), \exists Y_{l'l} \in K^{B_n}, \forall p \in J_0, C_{l'}^p = C_l^p + \frac{\alpha_p}{\lambda_p} Y_{l'l} \right\}$ , il est clair que pour $n$ tel que $|\Omega_n(J)| \geq d \times |K|^{|G|^2}$ , il existe $l \in \Omega_n(J)$ , tel que $|\Phi_n(l)| \geq d$ .

Mais si $(t,s) \in \Phi_n(l)^2$ , on a $C_t^p = C_l^p + \frac{\alpha_p}{\lambda_p} Y_{tl}$ et $C_s^p = C_l^p + \frac{\alpha_p}{\lambda_p} Y_{sl}$ .

Donc : $C_s^p = C_t^p + \frac{\alpha_p}{\lambda_p}(Y_{sl} - Y_{tl})$ . On en déduit l'existences de $\Phi_n(J) \subset \Omega_n(J)$ vérifiant :

(a) $\lim_{n\to\infty} |\Phi_n(J)| = +\infty$ .

(b) Il existe $(Y_{st})_{s,t\in\Phi_n(J)}$ une famille de vecteurs de $K^{B_n}$ , tel que :

$\forall (s,t) \in \Phi_n(J)^2, C_s^p = C_t^p + \frac{\alpha_p}{\lambda_p} Y_{st}$ .

(9) Notons avant de passer à la dernière étape de la preuve que $\alpha_p = 0 \Leftrightarrow \lambda_p = 0$ , car si $\alpha_p = 0$ , pour $p \in J_0$ , alors $\forall (s,t) \in \Phi_n(J), C_s^p = C_t^p$ , ce qui est impossible puisque $\rho_n(p)$ est inversible .

Etape 4 : Dans cette étape on suppose $|\Phi_n(J)|$ suffisamment grand . On pose $h = \min(\Phi_n(J))$ .

(1) Il existe $\Omega_n^*(J) \subset \Phi_n(J) - \{h\}$ , tel que : $\forall l \in \Omega_n^*(J), C_{h\Delta l}^{p_0} = \sum_{p \in J} \lambda_p^* C_{h\Delta l}^p$ , les scalaires $\lambda_p^*$ étant indépendants de $l$ . L'argument du (2) de l'étape 3 , reste valable et donc : $\forall p \in J, \lambda_p^* = 0 \Rightarrow \alpha_p = 0$ .

(2) Si $|\Omega_n^*(J)|$ est suffisamment grand , on peut construire $\Lambda_{n+1}^*(J)$ dans $\{h\Delta l, l \in \Omega_n^*(J)\}$ . On peut alors refaire l'étape 3 au rang $n+1$ , pour obtenir un $\Phi_{n+1}(J)$ dans $\Lambda_{n+1}^*(J)$ , tel que :

$\forall (h\Delta s, h\Delta t) \in \Phi_{n+1}(J)^2, C_{h\Delta s}^p = C_{h\Delta t}^p + \frac{\lambda_p^*}{\varsigma_p} Y_{h\Delta s, h\Delta t}$ . (où $\varsigma_p$ jouent le role de $\lambda_p$ ) et cela pour tout $p \in J_o$ , d'après le (9) de l'étape 3 .

(3) $|J_0| \geq 2$ , car $C_l^{p_0}$ , n'est pas proportionel à $C_l^p$ d'après le choix fait au (1) de l'étape 2 . Soit alors $p, q \in J_0$ distincts , posons $g = q^{-1}p \neq 1$ (le neutre du groupe) .

On a pour tout $(s,t) \in \Phi_n(J)^2, \rho_n(p)(s-t) = \frac{\alpha_p}{\lambda_p} Y_{kl}$ . Il vient que :

$\rho_n(g)(s-t) = \frac{\lambda_q \alpha_p}{\lambda_p \alpha_q}(s-t) = \beta(s-t)$ . Donc $C_s^g - \beta s = C_t^g - \beta t$ . Alors il existe $Z \in K^{B_n}$ , tel que : $\forall l \in \Phi_n(J), C_l^g = Z + \beta l$ . Comme $\rho_n(g)$ n'est pas scalaire $Z$ est non nul car sinon , $\rho_n(g)(l) = \beta l$ , ce qui est absurde d'après le choix de la base .

(4) On a donc : $\forall (h\Delta l) \in \Phi_{n+1}(J)$ , $C_h^g = Z + \beta h$ , $C_l^g = Z + \beta l$ et $C_{h\Delta l}^g = Z' + \beta' h\Delta l$ (c'est la relation du (3) au rang $n+1$) .

(5) Supposons $Z = (z_i)_{i \in B_n}$ , alors $x_{li}^p = z_i + \beta \delta_{li}$ . Je dis qu'il existe $i \neq h, z_i \neq 0$ , car sinon , $C_h^g = ((\beta + z_h)\delta_{jh})_{j \in B_n}$ , et donc $\rho_n(g)(h) = (\beta + z_h)h$ , et donc $\rho_n(g)$ est une homothétie ce qui est faux . (On rappelle que la base vérifie la propriété du théorème 1)

(6) Fixons $j_0 \neq h, z_{j_0} \neq 0$ . Soit $h\Delta l \in \Phi_{n+1}(J)$ , $h \neq j_0$ . On a : $x_{it}^g = z_i + \delta_{ti}\beta$ , $t \in \Phi_n(J)$ .

– Si $l < j_0$ ( pour l'ordre de $B_n$ ) , on a :

$x_{l\Delta j_0, h\Delta l}^g = x_{lh}^g x_{j_0 l}^g - x_{ll}^g x_{j_0 h}^g = -\beta z_{j_0} \neq 0$ , et $x_{t\Delta j_0, h\Delta l}^g = 0$ , si $t \neq l, t < j_0$ , mais cela contredit la relation $C_{h\Delta l}^g = Z' + \beta' h\Delta l$ (**) .

– De meme si $l > j_0$ , on a :

$x_{j_0\Delta l, h\Delta l}^g = \beta z_{j_0} \neq 0$ , mais $x_{j_0\Delta t, h\Delta l}^g = 0$ , pour $t \neq l, j_0 > t$ . Cela contredit aussi (**) .

Donc notre supposition au départ aboutit à une contradiction .

Le théorème est démontré ! !