Un exemple d'une localisation de Verdier

July 13, 2009

On notera $\mathcal{A}b$ la catégorie abélienne des groupes abéliens ou encore des $\mathbb{Z}$-modules et $\mathrm{D}(\mathcal{A}b)$ sa catégorie dérivée. On notera également $\mathbb{Q}$-ev la catégorie abélienne des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels vue comme une sous-catégorie abélienne (pleine) de $\mathcal{A}b$. Par abus de notations, $\mathrm{D}(\mathbb{Q}\text{-}ev)$ désignera la catégorie dérivée de $\mathbb{Q}$-ev ou la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A}b)$ formée des complexes à cohomologie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. Cet abus de notation ne sera pas dangereux pour la suite étant donné que les deux catégories en questions sont équivalentes... Notre but est d'expliciter le quotient de Verdier:

$$\mathcal{E} = \mathrm{D}(\mathcal{A}b)/\mathrm{D}(\mathbb{Q}\text{-}ev)$$

Ainsi que le foncteur de localisation:

$$L_{\mathbb{Q}} : \ \mathrm{D}(\mathcal{A}b) \longrightarrow \mathrm{D}(\mathcal{A}b)$$

Nous montrerons en fait le résultat suivant:

Proposition 0.1 — *Si A est un groupe abélien de* ***type fini*** *alors l'objet $L_{\mathbb{Q}}(A)$ est concentré en degré 0. De plus le morphisme canonique $A \longrightarrow L_{\mathbb{Q}}(A)$ est injectif et on a un isomorphisme:*

$$\frac{L_{\mathbb{Q}}(A)}{A} \simeq \frac{\hat{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}}{A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}}$$

avec $\hat{A}$ la complétion profinie de A.

Notons tout de suite que le résultat ci-dessus n'est pas valable pour A un groupe abélien non de type fini. Nous expliciterons à la fin un groupe A pour lequel $L_{\mathbb{Q}}(A)$ n'est pas dans le coeur de la t-structure canonique de $\mathrm{D}(\mathcal{A}b)$.

1 Un calcul de groupes d'extentions

Le but de cette section est de calculer le groupe $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$. Notre résultat est le suivant:

Proposition 1.1 — *Les groupes $Ext^i(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ sont nuls pour $i \neq 1$. De plus il existe un isomorphisme canonique:*

$$Ext^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \frac{\hat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}}{\mathbb{Q}}$$

Le fait que $\mathrm{Ext}^0(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ soit nul est clair. La nullité des $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}$ pour $i \geq 2$ est classique (l'anneau $\mathbb{Z}$ est régulier de dimension 1). Il s'agit donc prouver l'assertion concernant le Ext^1.

On considère d'abord la suite exacte courte:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

On en déduit une suite exacte longue:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i-1}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i-1}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i-1}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \cdots$$

En remarquant que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = 0$ on obtient une suite exacte courte:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^0(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

et donc un isomorphisme canonique:

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \frac{\hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}{\hom_{Z}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})}$$

On a évidement $\hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Il nous reste donc à calculer le groupe $\hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Pour celà on remarque qu'on a des isomorphismes canoniques:

$$\hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\otimes\hat{\mathbb{Z}}) \simeq \hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},(\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q})/\hat{\mathbb{Z}}) \simeq \hom_{\hat{\mathbb{Z}}}(\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q},(\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q})/\hat{\mathbb{Z}})$$

En utilisant alors la suite exacte courte:

$$0 \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q} \longrightarrow (\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q})/\hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

On obtient la suite exacte:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hom_{\hat{\mathbb{Z}}}(\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q},\hat{\mathbb{Z}}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \hom_{\hat{\mathbb{Z}}}(\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q},\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \hom_{\hat{\mathbb{Z}}}(\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q},(\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q})/\hat{\mathbb{Z}}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\hat{\mathbb{Z}}}(\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q},\hat{\mathbb{Z}}) \\
& 0 & \hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q} & &
\end{tikzcd}$$

Il suffira donc de prouver que le groupe $\mathrm{Ext}^1_{\hat{\mathbb{Z}}}(\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q},\hat{\mathbb{Z}})$ est nul. Ceci découle alors du lemme suivant:

Lemme 1.2 — *Toute suite exacte de la forme:*

$$0 \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{a} E \xrightarrow{b} \hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

est scindée.

Demonstration Pour tout entier strictement positif n posons:

$$E_n = b^{-1}(\hat{\mathbb{Z}}.\frac{1}{n})$$

On a donc une suite exacte courte:

$$0 \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{a} E_n \xrightarrow{b} \hat{\mathbb{Z}}.\tfrac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Cette suite exacte est clairement scindé et E_n est isomorphe non-canoniquement à $\hat{\mathbb{Z}}\oplus\hat{\mathbb{Z}}$. En particulier E_n est naturellement un espace profini compact.

Soit e_0 un élément de E envoyé sur 1 par b. Pour tout n, on choisit f'_n dans E_n qui soit envoyé sur $\frac{1}{n}$. On a en particulier.

$$n.f'_n - e_0 \in a(\hat{\mathbb{Z}})$$

Posons $e_n = n.f'_n \in E_1$. On considère le filtre $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $\mathbb{N}^*$ ordonné par la divisibilité. Etant donné que E_1 est compact, ce filtre admet une valeur d'adhérence e. Evidement $b(e) = 1$. Je dis que pour tout n il existe $f_n \in E_n$ tel que $e_n = n.f_n$. Pour voir celà on fixe un sous-filtre $(e_{n_k})_{k\geq 0}$ convergent vers e et tel que n_k divise n_{k+1} et n divise n_k pour $k \geq k_0$. On peut alors former le filtre $((n_k/n).f'_{n_k})_{k\geq k_0}$ Ce filtre converge alors vers un élément f_n. On a bien $n.f_n = e$. En utilisant la suite des f_n, on peut facilement construire une section $\hat{\mathbb{Z}}$-linéaire à b. Ceci est laissé en exercice. C.Q.F.D

Corollaire 1.3 — *Les groupes $Ext^i(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ sont nuls pour $i \neq 1$. De plus il existe une suite exacte canonique:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow Ext^1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \longrightarrow \frac{\hat{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0$$

Demonstration En effet la suite exacte courte:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donne la suite exacte:

$$\hom(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \longrightarrow \hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$$

On conclut alors en remarquant que les groupes $\hom(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ sont nuls. C.Q.F.D

On termine cette section par le résultat facile suivant:

Lemme 1.4 — *Pour tout entier i, le groupe $Ext^i(\mathbb{Q},\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est nul.*

Demonstration En effet les groupes en question sont naturellement des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels et des $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$-modules! C.Q.F.D

2 Le foncteur de localisation

Proposition 2.1 — *Le foncteur de localisation $L_{\mathbb{Q}}$ est donné par:*

$$L_{\mathbb{Q}}(A^\bullet) = RHom(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A^\bullet)[+1]$$

avec $A^\bullet$ un complexe de groupes abéliens. En particulier, la catégorie triangulée quotient

$$\mathcal{E} = \frac{D(\mathcal{A}b)}{D(\mathbb{Q}\text{-}ev)}$$

s'identifie naturellement à la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A}b)$ formée des objets isomorphes à des objets de la forme $RHom(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, ?)$.

Demonstration La suite exacte courte:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

définit un triangle distingué dans $\mathrm{D}(\mathcal{A}b)$:

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[+1]$$

Si $A = A^\bullet$ est un complexe de groupes abéliens, on obtient alors un triangle distingué:

$$\mathrm{RHom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A) \longrightarrow \mathrm{RHom}(\mathbb{Q}, A) \longrightarrow \mathrm{RHom}(\mathbb{Z}, A) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{RHom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)[+1]$$

On voit donc que l'image de α par le foncteur de projection $\mathrm{D}(\mathcal{A}b) \longrightarrow \mathcal{E}$ est un isomorphisme. Il nous reste donc à prouver que l'objet $\mathrm{RHom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)$ est $\mathbb{Q}$-local. Pour celà on remarque que:

$$\mathrm{RHom}(\mathbb{Q}, \mathrm{Rhom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)) \simeq \mathrm{RHom}(\mathbb{Q}^L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)$$

Mais étant donné que $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module plat, on voit que: $\mathbb{Q}^L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$. Ceci termine la preuve de la proposition. C.Q.F.D

Corollaire 2.2 — *Si $A = A^\bullet$ est un complexe borné à cohomologie de type fini, on a un isomorphisme canonique:*

$$L_{\mathbb{Q}}(A) \xrightarrow{\sim} Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$$